文章编号:1000-582X(2007)07-0138-06

模糊拟阵闭集的结构

吴德垠[1],刘志花[1],李永红[2]
(1. 重庆大学 数理学院,重庆 400030;2. 重庆邮电大学 计算机科学与技术学院,重庆 400065)

摘　要:模糊闭集和模糊超平面是模糊拟阵的 2 个基本概念,在模糊拟阵理论中起着重要的作用。文中研究了模糊闭集和模糊超平面的性质和结构,得到了相关的几个结论:模糊拟阵的闭集和它的导出拟阵的闭集之间的关系;普通拟阵所有超平面的交集是最小闭集且秩为 0;模糊拟阵所有超平面交集也是最小的闭集且秩为 0;利用数学归纳法证明了闭模糊拟阵模糊闭集的结构特征;找到了判定闭模糊拟阵的模糊闭集的一个充要条件. 这些结果有利于进一步研究模糊拟阵的其他性质。

关键词:拟阵;模糊拟阵;模糊闭集;模糊超平面
中图分类号:O157.2;O159　　**文献标志码**:A

1　基本概念和定理

定义 1　设 E 是有限集,I 是 E 的子集族,若 I 满足下列条件:

1) $\varphi\in I$;

2) 若 $X\in I, Y\subseteq X$,则 $Y\in I$;

3) 若 $X,Y\in I, |X|<|Y|, W\in I$,则 $X\subset W\subseteq X\cup Y$;

则称序偶(E,I)为 E 上的一个拟阵,记为 $M=(E,I)$。任意的 $X\subseteq E$,若 $X\in I$,则称 X 是 M 的独立集,否则称 X 为 M 的相关集[1-2]。

定义 2　设 $M=(E,I)$是一拟阵,若 $B\in I$,但不存在 $B'\supset B$ 使 $B'\in I$,则称 B 为 M 的基,即基是拟阵的极大独立集,用 B 或 $B(M)$ 表示拟阵 M 的所有基的集合[1]。

定义 3　拟阵的秩函数是一个函数 $\rho:2^E\to Z^+$,使对任意的 $A\subseteq E$,有 $\rho(A)=\max\{|X|\,|\,X\subseteq A, X\in I\}$,$\rho(E)$称为拟阵 M 的秩,通常记为 $\rho(M)=\rho(E)$(其中 2^E 表示 E 的所有子集的集合,Z^+ 表示非负整数的集合),若对 $X\subseteq E$ 且对任意的 $x\in E\backslash A$,有 $\rho(A\supset\{x\})=\rho(A)+1$,则称 A 为拟阵的闭集[1]。

定义 4　设 M 是关于 E 的一个拟阵,若 $H\subset E$ 是 M 的闭集且不存在 $H'\subset E$ 是 M 的闭集,使 $H'\supset H$,则 H 叫拟阵 M 的超平面[1]。

定理 1　设 X 是拟阵 M 的一个闭集,$\rho(X)=t$,则存在不同的超平面 $H_i, 1\leqslant i\leqslant\rho(M)-t$,使得 $X=\cap\{H_i|1\leqslant i\leqslant\rho(M)-t\}$[1]。

定理 2　设 $M=(E,I)$是一个拟阵,σ 是 M 的闭包算子,$X\subseteq E$ 是子集合,则 $X\in I$ 的充分必要条件是对任意的 $x\in X, x\notin\sigma(X\backslash x)$[1]。

定义 5　如果 E 是一个集合,则 E 上的模糊集(是一个映射 $\pi:E\to[0,1]$,E 上的模糊集的全体记为:$F(E)$,如果 $\mu,\nu\in F(E)$,有如下概念和符号(见参考文献[3-6]):

$\mathrm{supp}\mu=\{x\in E|\mu(x)<0\}$;

$R^+(\mu)=\{\mu(x)|\mu(x)>0, x\in E\}$;

$m(\mu)=\inf\{\mu(x)|x\in\mathrm{supp}\mu\}$;

$(\mu\wedge\nu)(x)=\min\{\mu(x),\nu(x)\}$;

$(\mu\wedge\nu)(x)=\max\{\mu(x),\nu(x)\}$;

$C_r(\mu)=\{x\in E|\mu(x)\geqslant r\}$;

$\forall a\in\mathrm{supp}\mu, \forall x\in E, (\mu\backslash\backslash a)(x)=\begin{cases}\mu(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases}$;

收稿日期:2007-02-19
作者简介:吴德垠(1955-),男,重庆大学副教授,主要从事拟阵和模糊拟阵方向研究,(E-mail)wdy@cqu.edu.cn。

$\forall X \subseteq E, \forall \lambda \in (0,1], \omega(X,\lambda)(x) = \begin{cases} \lambda & x \in X \\ 0 & x \notin X \end{cases}$；

$S_e^\lambda = \omega(\{e\},\lambda)$；

定义6　设 E 是一个有限集，$\Psi \in F(E)$ 是一个满足下列条件的非空模糊集族：

($\Psi 1$)若 $\mu \in \Psi, \nu \in F(E)$，且 $\nu < \mu$，则 $\nu \in \Psi$；

($\Psi 2$)若 $\mu,\nu \in \Psi$，$|\mathrm{supp}\mu| < |\mathrm{supp}\nu|$，则存在 $\omega \in \Psi$，使

1) $\mu < \omega \leqslant \mu \vee \nu$；

2) $m(\omega) \geqslant \min\{m(\mu), m(\nu)\}$；

则称序偶 $M = (E,\Psi)$ 是 E 上的模糊拟阵，Ψ 称为 M 的模糊独立集族。若 $\mu \in F(E)$，但 $\mu \notin \Psi$，则称 μ 为 M 的相关集[3]。

定义7　设 $M(E,\Psi)$ 是模糊拟阵，M 的模糊秩函数是映射 $\rho: F(E) \to [0+\infty)$，使得对任意的 $\mu \in F(E)$，$\rho(\mu) = \sup\{|\nu| \mid \nu \leqslant \mu, \nu \in \Psi\}$，其中 $|\nu| = \sum_{x \in E} \nu(x)$[3]。

定义8　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，称 $\mu \in F(E)$ 为 M 的一个模糊基，如果 $\forall \nu \in \Psi$，$\mu \leqslant \nu$，都有 $\mu = \nu$，即模糊拟阵 M 的模糊集是 M 的极大模糊独立集[3]。

定理3　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，M 是闭的当且仅当对任意的 $\mu \in \Psi$，存在一个模糊基 $\nu \in \Psi$，使得 $\mu \leqslant \nu$[4]。

定理4　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，$\forall \mu \in F(E)$，则 $\mu \in \Psi \Leftrightarrow$ 对每一个 $\beta \in R^+(\mu)$，$C_\beta(\mu) \in I_\beta$[4]。

定义9　设 $M = (E,\Psi)$ 是模糊拟阵，$\mu \in F(E)$，$\lambda \in (0,1)$，$e \in E$，称 S_e^λ 与 ∞ 相关，如果 $\rho(S_e^\lambda \vee \mu) = \rho(\mu)$，记为 $S_e^\lambda \sim \mu$[5]。

定义10　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，M 的模糊闭包算子是一个函数 $\sigma: F(E) \to F(E)$，$\forall m \in F(E)$，$\sigma(\mu) = \nu\{S_e^\lambda | S_e^\lambda \sim \mu, \forall \lambda \in (0,1], \forall e \in E\}$[5]。

定义11　设 $M = (E,\mu)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，σ 是 M 的模糊闭包算子，若 $\forall \mu \in F(E)$，满足 $\sigma(\mu) = \mu$，则称 μ 为 M 的模糊闭集[5]。

定理5　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，μ,ν 为 M 的模糊闭集，则 $\mu \wedge \nu$ 也为 M 的模糊闭集[5]。

定义12　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，$\forall \mu \in F(E)$ 称为 M 的一个模糊超平面，如果 μ 满足：1) μ 为闭集且 $\mathrm{supp}\mu \subset E$；2) 若 $\nu \in F(E)$，$\mathrm{supp}\nu \subset E$ 且 $\mu \leqslant \nu$，则 $\mu = \nu$[6]；

定理6　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，$r_0 < r_1 < \cdots < r_n$ 为 M 的基本序列，σ_1 是 $M_1 = (E, I_{r_1})$ 的闭包算子，则对 $\forall \mu \in F(E)$，都有 $\sigma_1(\mathrm{supp}\mu) = \mathrm{supp}(\sigma(\mu))$[6]。

定理7　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，若 H 是 M 的一个模糊超平面，则 $R^+(H) = \{1\}$[6]。

定理8　设 $H \in F(E)$ 是模糊拟阵 $M = (E,\Psi)$ 的模糊超平面，σ 是 M 模糊闭包算子。则 $\mathrm{supp}(\sigma(H)) \subset E$，但 $\forall e \in E \setminus \mathrm{supp}H$，$\forall \lambda \in (0,1]$，使得 $\mathrm{supp}(\sigma(H \vee S_e^\lambda)) = E$[6]。

定理9　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵。H 是 M 的一个模糊超平面，则 $H = \omega(\mathrm{supp}H, 1)$[6]。

2　超平面交集的性质

定理10　设 $M = (E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个模糊拟阵，σ 是模糊拟阵 M 的模糊闭包算子，σ_1 是拟阵 $M_1 = (E, I_{r_1})$ 的闭包算子。取 $\mu \in F(E)$，$\forall e \in \mathrm{supp}\mu$，令 $\nu = \omega(\{e\}, \mu(e))$，若 $\mu \in \Psi$，则 $\nu \leqslant \sigma(\mu \setminus\setminus e)$。

证明：假设结论不成立，即 $\nu \leqslant \sigma(\mu \setminus\setminus e)$。于是 $\{e\} = \mathrm{supp}\nu \subseteq \mathrm{supp}(\sigma(\mu \setminus\setminus e))$。由定理6得：$\mathrm{supp}(\sigma(\mu \setminus\setminus e)) = \sigma_1(\mathrm{supp}(\mu(\setminus\setminus e)) = \sigma_1((\mathrm{supp}\mu) \setminus\setminus e)$，即：$\forall e \in \mathrm{supp}\mu$，有 $e \in \sigma_1((\mathrm{supp}\mu) \setminus e)$。根据定理2有：$\mathrm{supp}\mu \in I_{r_1}$。于是由定理4得：$\mu \notin \Psi$，与已知矛盾，结论得证。

下面讨论普通拟阵超平面交集的某些性质……。

定理11　设 $M = (E,I)$ 是一拟阵，$H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是 M 的所有超平面，若 $\bigcap_{i=1}^m H_i \neq \Phi$，则 $\bigcap_{i=1}^m H_i$ 是 M 的最小闭集且 $\rho(\bigcap_{i=1}^m H_i) = 0$。

证明：由定理1知 $\bigcap_{i=1}^m H_i$ 是 M 的最小闭集，下面证明 $\rho(\bigcap_{i=1}^m H_i) = 0$。

在定理1中，令 $t = 0$，设有拟阵 M 的闭集 X 满足：$\rho(X) = 0$ 且存在有限个超平面使得：$X = \cap\{H_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \rho(M)\}$，显然 $X \supseteq \bigcap_{i=1}^m H_i$。于是 $\rho(\bigcap_{i=1}^m H_i) \leqslant \rho(X) =$

0,从而$\rho(\bigcap_{i=1}^{m}H_i)=0$。

定理12 设$M=(E,\Psi)$是一个有限集E上的模糊拟阵,基本序列为$0<r_1<r_2<\cdots<r_n$。由于$\mathrm{supp}H\subseteq E$且$R^+(H)=1$,故模糊超平面只有有限个。设这些超平面为$H_1,H_2,\cdots,H_m$,则$\mathrm{supp}H_1,\mathrm{supp}H_2,\cdots,\mathrm{supp}H_m$就是$M$的导出拟阵$M_{r_1}=(E,I_{r_1})$的全部超平面。

证明:设σ_1是M_{r_1}的闭包算子,H是M的任一模糊超平面。则

$$\mathrm{supp}H=\mathrm{supp}(\sigma(H))=\sigma_1(\mathrm{supp}H),$$

于是$\mathrm{supp}H$是闭集且$\mathrm{supp}H\subset E$。由定理8知:对$\forall e\in E\setminus\mathrm{supp}H$, $\exists\lambda\in(0,1]$,使得:$E=\mathrm{supp}(\sigma(H\vee S_e^{\lambda}))=\sigma_1(\mathrm{supp}(H\vee S_e^{\lambda}))=\sigma_1(\mathrm{supp}H\cup\{e\})$从而$\mathrm{supp}H$是$M_{r_1}$的超平面。于是得到了若$H_1,H_2,\cdots,H_m$是模糊拟阵$M$的全部超平面,则$\mathrm{supp}H_1,\mathrm{supp}H_2,\cdots,\mathrm{supp}H_m$就是$M$的导出拟阵$M_{r_1}=(E,I_{r_1})$的超平面这个结论。

下面说明$\mathrm{supp}H_1,\mathrm{supp}H_2,\cdots,\mathrm{supp}H_m$是$M$的导出拟阵$M_{r_1}$的全部超平面。否则,存在$\mathrm{supp}(H_{m+1})$是$M_{r_1}$的不同于$\mathrm{supp}H_1,\mathrm{supp}H_2,\cdots,\mathrm{supp}H_m$的一个超平面。令

$$H'_{m+1}=\omega(\mathrm{supp}(H_{m+1}),1),$$

由定理9知:H'_{m+1}是模糊拟阵M的超平面,与$H_1,H_2,\cdots,H_m$是M的所有模糊超平面矛盾。

结论得证。

在定理11和定理12的基础上,给出模糊拟阵所有模糊超平面的交集的秩为0这个性质。

定理13 设$M=(E,\Psi)$是一个有限集E上的模糊拟阵,$H_1,H_2,\cdots,H_m$是模糊拟阵M的所有模糊超平面,则$H_1,H_2,\cdots,H_m$的交集的秩为零。

证明:若$\rho(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)=\alpha\neq0$,则存在模糊独立集$\mu$满足$\mu<\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$且$\rho(\mu)=\alpha$。由$\mu<\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$得

$$\mathrm{supp}\mu\subseteq\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)=\bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{supp}H_i, \qquad (1)$$

而$\mathrm{supp}\mu=C_{r_1}(\mu)$是$M$的导出拟阵的独立集,于是$\rho(\mathrm{supp}\mu)>0$。而由(1)得:$\rho(\mathrm{supp}\mu)\leqslant\rho(\bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{supp}H_i)$,从而$\rho(\bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{supp}H_i)>0$与定理11矛盾。故有限集$E$上的模糊拟阵所有模糊超平面交集的秩等于0。

定理14 设$M=(E,\Psi)$是有限集E上的一个闭模糊拟阵,$H_1,H_2,\cdots,H_m$是M的所有模糊超平面。若$\bigwedge_{i=1}^{m}H_i\neq0$,则$\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$是$M$的最小闭集。

证明:由模糊拟阵闭集的定义和定理5知$\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$是M的闭集。

下面证明极小性。假设结论不成立,即存在模糊闭集μ,使得$\mu<\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$。而$\rho(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)=0$,于是$\rho(\mu)\leqslant\rho((\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)\vee\mu)\leqslant\rho(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)+\rho(\mu)=\rho(\mu)$,即$\sigma(\mu)\geqslant\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$,与$\mu$为闭集矛盾。从而$\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$是$M$的最小闭集。

3 闭正规基好模糊拟阵闭集的结构

首先给出了闭模糊拟阵的模糊基的个数只有有限个这个结论,接着在这个结论的基础上,将给出闭模糊拟阵闭集的结构,即:在一个闭正规基好模糊拟阵$M=(E,\Psi)$上的任意2个超平面的协助下所确定的模糊闭集的范围,最后将这个结论进行了推广。

定理15 设$M=(E,\Psi)$是有限集E上的一个闭模糊拟阵,其基本序列为$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$,则模糊拟阵$M$的模糊基只有有限个。

证明:设μ为M的模糊基,$R^+(\mu)\subseteq\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}$。而$E$是有限集,$\mathrm{supp}\mu\subseteq E$。故$\mu$只有有限个,也就是说模糊拟阵$M$的模糊基只有有限个。

定理16 设$M=(E,\Psi)$是闭模糊拟阵,若$\mu\in\psi$,则存在模糊基β使得$\mu\leqslant\beta$。如果存在$x\in\mathrm{supp}\mu$,满足$\mu(x)<\beta(x)$,则对任意的$\lambda>\mu(x)$,都有$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\mu)$。

证明:1)当$\mu(x)<\lambda\leqslant\beta(x)$时,有$\mu\vee S_x^{\lambda}\leqslant\beta$。下面说明在这种情况下$\mu\vee S_x^{\lambda}$是$M$的模糊独立集。设模糊拟阵$M$的基本序列是$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$,因为$\mu\in\psi$,故对每一个$r_i\in R^+(\mu)$都有$C_{r_i}(\mu)\in I_{r_i}$。不妨假定$r_j<\lambda\leqslant r_{j+1}$,于是:当$i>j$时得出:$C_{r_i}(\mu\vee S_x^{\lambda})=C_{r_i}(\mu)\in I_{r_i}$;当$i\leqslant j$时,有$C_{r_i}(\mu\vee S_x^{\lambda})\subseteq C_{ri}(\beta)\in I_{r_i}$。因此$\mu\vee S_x^{\lambda}\in\psi$,故$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\mu)$。

2)当$\lambda>\beta(x)$时,$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})\geqslant\rho(\mu\vee S_x^{\beta(x)})$。由1)得$\rho(\mu\vee S_x^{\beta(x)})>\rho(\mu)$,于是$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\mu)$成立。

综上所述,对任意的$\lambda>\mu(x)$,都有$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})$

$>\rho(\mu)$。

下面思考闭正规基好模糊拟阵 $M=(E,\Psi)$ 的模糊基具有的特点。

不妨假定 β_1,β_2 是 M 的任意 2 个模糊基。设 M 的基本序列是 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant 1$，由于 M 是闭正规的，于是 $R^+(\beta_1)=R^+(\beta_2)=\{r_1,\cdots,r_n\}$。根据模糊拟阵 M 是基好模糊拟阵可以得出 $\forall x\in \mathrm{supp}\beta_1\cap \mathrm{supp}\beta_2$，都有 $\beta_1(x)=\beta_2(x)$。下面给出闭正规基好模糊拟阵闭集的结构。

定理 17　设 $M=(E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个闭正规基好模糊拟阵，H_1H_2 是 M 的模糊超平面。设 $\beta=\vee\beta_i$（其中 β_i 表示 M 的全部模糊基），若 $\mathrm{supp}H_1\cap \mathrm{supp}H_2\neq\Phi$。令

$$\bar{\omega}(x)=\begin{cases}B(x) & x\in \mathrm{supp}(H_1)\backslash \mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)\\ 1 & x\in \mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)\\ 0 & x\notin \mathrm{supp}(H_1)\end{cases},$$

则 $\forall\mu\in F(E)$，满足 $H_1\wedge H_2\leqslant\mu<\bar{\omega}\leqslant H_1$，$\mu$ 都为 M 的模糊闭集。

证明：（数学归纳法）

1）当 $|\mathrm{supp}\,\bar{\omega}|=|\mathrm{supp}H_1|=|\mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)|+1$ 时，由 $H_1\wedge H_2<\mu<\bar{\omega}\leqslant H_1$ 知：$\mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)\subseteq \mathrm{supp}\mu\subseteq \mathrm{supp}\,\bar{\omega}=\mathit{supp}H_1$。据定理 7 有：$R^+(H_1)=R^+(H_2)=R^+(H_1\wedge H_2)=\{1\}$，于是存在唯一的 $x\in \mathrm{supp}\,\bar{\omega}\backslash \mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)$ 且 $\mu(x)<\bar{\omega}(x)=\beta(x)$。

下面证明 μ 是闭的。否则，存在 $\lambda\in(0,1)$，$\lambda>\mu(x)$ 满足

$$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})=\rho(\mu),\qquad(2)$$

由 $\mu\in F(E)$ 知：存在 $\nu\in\Psi$，$\nu\leqslant\mu$，使得 $\rho(\nu)=\rho(\mu)=|\nu|$。于是 $\rho(\mu\wedge S_x^{\lambda})=\rho(\mu)=\rho(\nu)=|\nu|$，且必定有 $x\in \mathrm{supp}\nu$。否则，若 $x\in \mathrm{supp}\nu$，则 ν 是 μ 的极大模糊独立集。从而 ν 也是 $\mu\backslash\backslash x$ 的极大模糊独立集。即 ν 是 $H_1\wedge H_2$ 的极大独立集。于是

$$\rho(H_1\wedge H_2)=\rho(\nu)=\rho(\mu)=\rho((H_1\wedge H_2)\vee S_x^{\mu(x)}),\qquad(3)$$

其中 $x\in E\backslash \mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)$。由已知得 H_1,H_2 是闭集。根据定理 5 有：$H_1\wedge H_2$ 也是闭集，与(3)矛盾。所以 $x\in \mathrm{supp}\nu$。

由于 $\nu\in\Psi$，于是存在某个模糊基 β_i，使得 $\nu\leqslant\beta_i$。$\nu\leqslant\mu$，所以 $\nu(x)\leqslant\mu(x)$。而 $\mu(x)<\bar{\omega}(x)=\beta(x)$（前面得到的结论），于是 $\nu(x)<\beta(x)$。又因为 M 是闭正规基好模糊拟阵，所以 $\beta_i(x)=\beta(x)$。根据定理 16 得：对上述 λ，有 $\rho(\nu\wedge S_x^{\lambda})>\rho(\nu)$。于是 $\rho(\mu\wedge S_x^{\lambda})\geqslant\rho(\nu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\nu)=\rho(\mu)$，与(2)矛盾。故 μ 是 M 的模糊闭集。

2）假设当 $|\mathrm{supp}\,\bar{\omega}|=|\mathrm{supp}H_1|=|\mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)|+(k-1)$ 时结论成立，即：当 $|\mathrm{supp}\,\bar{\omega}=|\mathrm{supp}H_1|=|\mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)|+(k-1)$ 时，$\forall\mu\in F(E)$，满足 $H_1\wedge H_2\leqslant\mu<\bar{\omega}\leqslant H_1$，$\mu$ 都为 M 的模糊闭集。

当 $|\mathrm{supp}\,\bar{\omega}|=|\mathrm{supp}H_1|=|\mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)|+k$ 时，存在 $x_i(1\leqslant i\leqslant k)$，使得 $x_i\in \mathrm{supp}\,\bar{\omega}\backslash \mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)$。当 $H_1\wedge H_2\leqslant\mu<\bar{\omega}\leqslant H_1$ 时，由于 $R^+(H_1)=R^+(H_2)=R^+(H_1\wedge H_2)=\{1\}$，则至少存在一个元素 $x_j(1\leqslant j\leqslant k)$ 使得 $\mu(x_j)<\bar{\omega}(x_j)=\beta(x_j)$。由假设知当 $H_1\wedge H_2\leqslant\mu<(H_1\wedge H_2)\vee(\bigvee_{i=1}^{k-1}S_{x_i}^{\beta(x_i)})$ 时，μ 是闭的。要证明 $H_1\wedge H_2\leqslant\mu<(H_1\wedge H_2)\vee(\bigvee_{i=1}^{k}S_{x_i}^{\beta(x_i)})$ 时，μ 是 M 的模糊闭集。只需证明当 $|\mathrm{supp}\mu|=|\mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)|+k$ 时结论成立即可。

设 $\mu=(H_1\wedge H_2)\vee(\bigvee_{i=1}^{k}S_{x_i}^{\mu(x_i)})$，若 μ 不是闭的，则存在 $\lambda>\mu(x)$，满足

$$\rho(\mu\vee S_{x_i}^{\lambda})=\rho(\mu),\qquad(4)$$

于是存在 $\nu\in\Psi$，$\nu\leqslant\mu$，使得 $\rho(\nu)=\rho(\mu)$。则对所有的 x_i，都有 $x_i\in \mathrm{supp}\nu$。否则，若存在某个 $x_m(1\leqslant m\leqslant k)$，$x_m\notin \mathrm{supp}\nu$，则 $\nu\leqslant\mu\backslash\backslash x_m$。从而 ν 也是 $\mu\backslash\backslash x_m$ 的极大独立集。于是

$$\rho(\mu\backslash\backslash x_m)=\rho(\mu)=\rho((\mu(\backslash\backslash x_m)\wedge S_{x_m}^{\mu(x_m)})=\rho(\nu),$$

从而 $\mu\backslash x_m$ 不是 M 的闭集，与假设矛盾。故对所有的 $x_i(2\leqslant i\leqslant k)$，都有 $x_i\in \mathrm{supp}\nu$。

由于 $\nu\in\psi$，于是存在某个模糊基 β_i，使得 $\nu\leqslant\beta_i$。$\nu\leqslant\mu$，所以 $\nu(x)\leqslant\mu(x)$。而 $\mu(x_j)<\bar{\omega}(x_j)=\beta(x_j)$。于是 $\nu(x)<\beta(x)$。又因为 M 是闭正规基好模糊拟阵，所以 $\beta_i(x)=\beta(x)$。根据定理 16 得：对上述 λ 有：$\rho(\nu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\nu)$，从而 $\rho(\mu\vee S_{x_i}^{\lambda})>\rho(\nu)=\rho(\mu)$ 与(4)矛盾。所以当 $|\mathrm{supp}\mu|=|\mathrm{supp}H_1|=|\mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)|+k$ 时结论成立，原命题得证。

同样，还可以得到下面的定理。

定理 18　设 $M=(E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个闭模糊拟阵，H_1,H_2 是 M 的模糊超平面。设 $\beta=\vee\beta_i$（其中 β_i 是 M 的模糊基），若 $\mathrm{supp}H_1\cup \mathrm{supp}H_2\neq\Phi$，令

$$\overline{\omega}(x)=\begin{cases}B(x) & x\in \mathrm{supp}(H_2)\backslash \mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)\\ 1 & x\in \mathrm{supp}(H_1\wedge H_2)\\ 0 & x\notin \mathrm{supp}(H_2)\end{cases},$$

则任意的$\mu\in F(E)$,满足$H_1\wedge H_2\leqslant\mu<\overline{\omega}\leqslant H_2$,$\mu$都为$M$的模糊闭集。

在上面的定理中,H_1,H_2是M的任意模糊超平面,可以把它推广到一般的情形:

定理19 设$M=(E,\Psi)$是有限集E上的一个闭模糊拟阵,$H=\{H_1,H_2,\cdots,H_n\}$是M的模糊超平面集。设$\beta=\vee\beta_i$(其中β_i是M的模糊基),令

$$\overline{\omega}(x)=\begin{cases}B(x) & x\in \mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)\backslash \mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)\\ 1 & x\in \mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)\\ 0 & x\notin \mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)\end{cases},$$

(m为正整数,$\forall H_i\in H,m<n$)

则$\forall\mu\in F(E)$:满足$\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i\leqslant\mu<\overline{\omega}\leqslant\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$,$\mu$为$M$的模糊闭集。

证明:(数学归纳法)

1) $|\mathrm{supp}\overline{\omega}|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)|+1$时,由$\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i\leqslant\mu<\overline{\omega}\wedge\leqslant_{i=1}^{m}H_i$知:$\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)\subseteq\mathrm{supp}\mu\subseteq\mathrm{supp}\ \overline{\omega}=\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)$。根据定理7得:$R^+(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)=R^+\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)=\{1\}$。于是存在唯一的$x\in\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)\backslash(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)$且$\mu(x)<\overline{\omega}(x)=\beta(x)$。下面证明$\mu$是闭的。否则存在$\lambda\in(0,1)$:$\lambda>\mu(x)$满足

$$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})=\rho(\mu),\tag{5}$$

由$\mu\in F(E)$知:存在$\nu\in\Psi,\nu\leqslant\mu$,使得$\rho(\nu)=\rho(\nu)=|\nu|$。于是$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})=\rho(\mu)=\rho(\nu)=|\nu|$,且必定有$x\in\mathrm{supp}\nu$。否则,若$x\notin\mathrm{supp}\nu$,则$\nu$是$\mu$的极大模糊独立集,从而$\nu$也是$\mu\backslash\backslash x$的极大模糊独立集,即$\nu$是$\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i$的极大独立集。从而

$$\rho(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)=\rho(\nu)=\rho(\mu)=\rho((\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)\vee S_x^{\mu(x)}),\tag{6}$$

其中$x\in E\backslash\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)$。

由已知得:$H_1,H_2,\cdots,H_n$是闭集。根据定理5有:$\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i$也是闭集,与式(6)矛盾。从而$x\in\mathrm{supp}\nu$。

由于$\nu\in\Psi$,于是存在模糊基β_i,使得$\nu\leqslant\beta_i$。由于$\nu\leqslant\mu$,所以$\nu(x)\leqslant\mu(x)$。而$\mu(x)<\overline{\omega}(x)=\beta(x)$,于是$\nu(x)<\beta(x)$。又因为$M$是闭正规基好模糊拟阵,所以$\beta_i(x)=\beta(x)$。根据定理16得:对上述$\lambda$,有$\rho(\nu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\nu)$,即$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\nu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\nu)=\rho(\mu)$,与式(5)矛盾。所以$\mu$是$M$的模糊闭集。

2) 假设当$|\mathrm{supp}\ \overline{\omega}|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)|+(k-1)$时结论成立。当$|\mathrm{supp}\ \overline{\omega}|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)|+(k-1)$时,$\forall\mu\in F(E)$:满足$\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i\leqslant\mu<\overline{\omega}\leqslant\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$,$\mu$为$M$的模糊闭集。

那么当$|\mathrm{supp}\ \overline{\omega}|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)|+k$时,存在$x_i(1\leqslant i\leqslant k)$,使得$x_i\in\mathrm{supp}\ \overline{\omega}\backslash\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)$。当$\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i\leqslant\mu<\overline{\omega}\leqslant\bigwedge_{i=1}^{m}H_i$时,由于$R^+(H_i)=R^+(\bigwedge_{i=1}^{m}H_i)=\{1\}$,于是至少存在一个元素$x_j(1\leqslant j\leqslant k)$使得$\mu(x_j)<\overline{\omega}(x_j)=\beta(x_j)$。由假设知当$\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i\leqslant\mu<(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)\vee(\bigvee_{i=1}^{k-1}S_{x_i}^{\beta(x_i)})$时,$\mu$是闭的。要证明$\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i\leqslant\mu<(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)\vee(\bigvee_{i=1}^{k}S_{x_i}^{\beta(x_i)})$时结论成立,只需证当$|\mathrm{supp}\mu|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)|+k$时结论成立即可。

设$\mu=(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)\vee(\bigvee_{i=1}^{k}S_{x_i}^{\mu(x_i)})$,若$\mu$不是闭的,则存在$\lambda>\mu(x)$,满足

$$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})=\rho(\mu),\tag{7}$$

于是存在$\nu\in\Psi,\nu\leqslant\mu$,使得$\rho(\nu)=\rho(\mu)$。则对所有的$x_i$,都有$x_i\in\mathrm{supp}\nu$。否则,存在某个$x_m(1\leqslant m\leqslant k)$,$x_m\notin\mathrm{supp}\nu$,则$\nu\leqslant\mu\backslash\backslash x_m$。从而$\nu$也是$\mu\backslash\backslash x_m$的极大独立集,于是$\rho(\mu\backslash\backslash x_m)=\rho(\mu)=\rho((\mu\backslash\backslash x_m)\backslash\backslash s_{x_m}^{\mu(x_m)})=\rho(\nu)$。从而$\mu\backslash\backslash x_m$不是$M$的闭集,与假设矛盾。于是对所有的$x_i(1\leqslant i\leqslant k)$,都有$x_i\in\mathrm{supp}\nu$。

由$\nu\in\Psi$知,存在模糊基β_i,使得$\nu\leqslant\beta_i$。由于$\nu\leqslant\mu$,所以$\nu(x)\leqslant\mu(x)$。而$\mu(x_j)<\overline{\omega}(x_j)=\beta(x_j)$。于是$\nu(x)<\beta(x)$。又因为$M$是闭正规基好模糊拟阵,所以$\beta_i(x)=\beta(x)$。根据定理16得:对上述$\lambda$有:$\rho(\nu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\nu)$,从而$\rho(\mu\vee S_x^{\lambda})>\rho(\nu)=\rho(\mu)$与(7)矛盾。所以当$|\mathrm{supp}\mu\mu|=|\mathrm{supp}\bigwedge_{i=1}^{m}H_i|=|\mathrm{supp}(\bigwedge_{i=1}^{m+1}H_i)|+k$

时结论成立，原命题得证。

4　判断模糊闭集的必要条件

定理 20　设 $M=(E,\Psi)$ 是有限集 E 上的一个闭模糊拟阵，H 是 M 的模糊超平面集，不妨假定 H 中有 n 个元素。设 $\beta=\vee\beta_j$（其中 β_j 是 M 的模糊基），$\mu\in F(E)$，若 μ 为 M 的模糊闭集则 $\mu=\omega(E,1)$，或者 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\leqslant\mu\leqslant H_i$。

证明：若 μ 为 M 的模糊闭集且 $\mu\neq\omega(E,1)$，下面证明一定有 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\leqslant\mu\leqslant H_i$ 成立。

1）当 $\mu>H_i$ 时，因为 H_i 是模糊拟阵 M 有模糊超平面，由模糊超平面的定义知 H_i 是 M 的极大真闭子集。故任意 $\mu>H_i$，μ 不是 M 的模糊闭集。

2）当 $\mu<H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 时，由定理 14 得：$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 是模糊拟阵 M 的最小闭集，故 $\forall\mu<H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$，$\mu$ 不是 M 的模糊闭集。

参考文献：

[1]　刘桂珍，陈庆华. 拟阵[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1994.

[2]　WELSH D J A. Matroid Theory[M]. London: Academic Press, 1976.

[3]　R GOETSCHEL R J, VOXMAN W. Fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets And Systems, 1988 (27): 291-302.

[4]　R GOETSCHEL R J, VOXMAN W. Bases of Fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets And Systems, 1989(31): 253-261.

[5]　吴德垠，李传东. 模糊拟阵中模糊闭包算子的特征[J]. 重庆大学学报：自然科学版，2002, 130-133.

[6]　吴德垠，李传东. 模糊拟阵的对偶与超平面[J]. 重庆大学学报：自然科学版，2002, 116-119.

Structure of Closed Sets in Fuzzy Matroid

WU De-yin[1], *LIU Zhi-hua*[1], *LI Yong-hong*[2]

(1. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. College of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: The authors study the properties and structures of fuzzy closed sets and fuzzy hyperplanes. The relationship between the closed set and it's derived matroid's closed set; The intersection of all hyperplanes in matroids is the smallest closed set and its rank is zero; The intersection of all fuzzy hyperplanes in fuzzy matroids is the smallest closed set and its rank is zero; The characteristics of structures of fuzzy closed sets is showed in using mathematical induction; a necessary and sufficient condition has been found in judging whether a fuzzy set is closed or not.

Key words: matroids; fuzzy matroids; fuzzy closed sets; fuzzy hyperplanes

（编辑　陈移峰）