

文章编号:1000-582X(2007)08-0040-04

高码率多进制 LDPC 码在 AWGN 信道中的性能分析

包杰^{1a}、马龙^{1b}、王琳²

(1. 重庆邮电大学 a 应用技术学院, b 编码技术研究所, 重庆 400065; 2. 厦门大学 通信工程系, 福建 361005)

摘要:为了解决多进制 LDPC 码原有译码算法复杂度较高,不利于硬件实现的问题,研究了多进制 LDPC 码的 2 种简化译码算法:基于快速傅里叶变换的信度传播译码算法(FFT-BP)和基于对数运算的 Log-BP 译码算法。同时分析了基于这 2 种译码算法的高码率(1/2~1)多进制 LDPC 码在 AWGN 信道中的性能优势。仿真结果表明:当多进制 LDPC 码采用这 2 种不同的译码算法时,随着码率的下降,编码增益和性能曲线与香农限的距离都会随之而增大,即多进制 LDPC 码适合于高码率情况下的应用。并在牺牲一定的信噪比时,Log-BP 算法能够使多进制 LDPC 码的硬件复杂度得到较大的改善。

关键词:FFT-BP 算法;Log-BP 算法;高码率;香农限

中图分类号:TN919.32

文献标志码:A

1998 年, D. MacKay 和 Spielman 提出了不规则 LDPC 码^[1]。不规则二进制 LDPC 码的理论门限值在 AWGN 信道下距离香农限只有 0.004 5 dB,而仿真结果也只距离香农限 0.045 dB^[2]。另一方面,通过将迦罗瓦域从二元域扩展到多元域就可以得到多进制 LDPC 码。扩展 LDPC 码域的大小也就相当于增加卷积码编码器的存储单元个数。同时研究表明在 AWGN 信道中,多进制 LDPC 码在 1/4 到 1/2 的低码率情况下,其性能好于相同码率的二进制 LDPC 码^[3-4]。

文献[4]提出了基于快速傅里叶变换多进制 LDPC 译码算法即 FFT-BP 译码算法,但这种译码算法的硬件实现比较困难。2004 年 Henk Wymeersch 提出了基于对数运算的信度传播译码算法即 Log-BP 译码算法^[5]。针对这 2 种不同的译码算法,笔者分析和对比了它们在高码率($R \geq 1/2$)情况下的仿真结果。同时研究了性能曲线和香农限的距离。仿真结果表明相对于 FFT-BP 算法 Log-BP 算法有一定的性能损失,但它降低了计算复杂度。同时研究发现随着码率的下降,编码增益和与香农限的距离都会增大。

1 多进制 LDPC 码的两种简化译码算法

FFT-BP 译码算法和传统的信度传播译码算法具有相同的步骤。主要不同点在于计算从校验点 m

到变量点 n 的信息的方法。它也包含了 2 步^[6]:

$$r_{mn}^{f_i} = \sum_{x_n=f_i} \delta(\sum_{n \in N(m)} H_{mn} x_n = z_m) \prod_{n' \in N(m) \setminus n} q_{mn'}^{x_{n'}}, \quad (1)$$

$$q_{mn}^{f_i} = \alpha_{mn} p_n^{f_i} \prod_{m' \in M(n) \setminus m} r_{m'n}^{f_i}. \quad (2)$$

这里 $M(n) = \{m; H_{m'n} \neq 0\}$, $M(n) \setminus m = \{m; H_{m'n} \neq 0, m' \neq m\}$ 并且 x_n 可以是任意的 $f_i \in GF(q)$, $i = 0, L, q-1$ 。注意式(1)的和运算也即是变量 $q_{mn'}^{x_{n'}}$ 的卷积。所以该式可以用 $q_{mn'}^{x_{n'}}$ 的傅里叶变换的乘积运算和逆傅里叶变换运算来代替。设 $(Q_{mn'}^0, Q_{mn'}^1, \dots, Q_{mn'}^{q-1})$ 表示向量 $(q_{mn'}^0, q_{mn'}^1, \dots, q_{mn'}^{q-1})$ 的 FFT 运算结果。在考虑了对应非零矩阵元素 $H_{mn'}$ 的影响后, $r_{mn}^{f_i}$ 就是第 f_i 个 $(\prod_{n' \in N(m) \setminus n} Q_{mn'}^0), (\prod_{n' \in N(m) \setminus n} Q_{mn'}^1), \dots, (\prod_{n' \in N(m) \setminus n} Q_{mn'}^{q-1})$ 的逆变换。这里的 FFT 变换是一个 p 维的 FFT 变换。其中, $q=4$ 的一个例子如下。域元素用多项式来表示,所以对于 $GF(4)$ 有:

$$Q_{mn'}^0 = (q_{mn'}^0 + q_{mn'}^2) + (q_{mn'}^1 + q_{mn'}^3), \quad (3)$$

$$Q_{mn'}^1 = (q_{mn'}^0 - q_{mn'}^2) + (q_{mn'}^1 - q_{mn'}^3), \quad (4)$$

$$Q_{mn'}^2 = (q_{mn'}^0 + q_{mn'}^2) - (q_{mn'}^1 + q_{mn'}^3), \quad (5)$$

$$Q_{mn'}^3 = (q_{mn'}^0 - q_{mn'}^2) - (q_{mn'}^1 - q_{mn'}^3). \quad (6)$$

文献[5]提出的 Log-BP 译码算法包含 4 个步骤。首先按照信道模型来定义变量点 N 的对数似然比向量 LLRV。对数似然比向量 LLRV 的第 i 个元素

收稿日期:2007-02-07

基金项目:教育部新世纪优秀人才支持计划资助(NCET-04-0601)

作者简介:包杰(1950-),男,重庆人,副教授,重庆邮电大学应用技术学院院长,主要研究方向为宽带通信技术。

为

$$L_{ch}(c_n)_i = \sum_{j:\psi^{-1}(\alpha_j)=+1} \frac{2x_{nb+j}}{\sigma^2} \quad (7)$$

对于 BPSK 调制,表示由信道接收到的实数值。从这个对数似然比向量,从变量点 n 到校验点 m 的信息可以初始化为 $L(m \leftarrow n) = L_{ch}(C_n)$ 。

对于每一个校验点和与其相连的变量点 $n_{m,k}$,从校验点 m 传递到变量点 $n_{m,k}$ 信息为

$$L(m \rightarrow n_{m,k}) = L(H_{m,n_{m,k}}^{-1} \sigma_{m,n_{m,k-1}} + H_{m,n_{m,k}}^{-1} \rho_{m,n_{m,k+1}}), \quad (1 \leq m \leq M, n \in N(m)). \quad (8)$$

这里 $\sigma_{m,n_{m,k-1}}, \rho_{m,n_{m,k+1}}$ 是 $GF(q)$ 域中新的随机变量:

$$\sigma_{m,n_{m,k-1}} = \sum_{j \leq k-1} H_{m,n_{m,j}} c_{n_{m,j}}, \quad (9)$$

$$\rho_{m,n_{m,k+1}} = \sum_{j \geq k+1} H_{m,n_{m,j}} c_{n_{m,j}} \quad (10)$$

$\sigma_{m,n_{m,k-1}}$ 和 $\rho_{m,n_{m,k+1}}$ 的对数似然比分布可以按照下式来递归地运算:

$$L(\sigma_{m,n_{m,k-1}}) = L(\sigma_{m,n_{m,k-2}} + H_{m,n_{m,k-1}} c_{n_{m,k-1}}), \quad (11)$$

$$L(\rho_{m,n_{m,k+1}}) = L(\rho_{m,n_{m,k+2}} + H_{m,n_{m,k+1}} c_{n_{m,k+1}}), \quad (12)$$

这里 $c_{n_{m,k-1}}, c_{n_{m,k+1}}$ 的对数似然比向量 LLRV 由 $L(m \leftarrow n_{m,k-1}), L(m \leftarrow n_{m,k+1})$ 给出。通过田字运算^[5],可以计算 $L(\sigma_{m,n_{m,k-1}})$ 和 $L(\rho_{m,n_{m,k+1}})$ 。所以 $L(m \rightarrow n_{m,k})$ 也可以通过田字操作来计算。

从变量点 n 传递到校验点 m 的对数似然比信息由下式给出

$$L(m \leftarrow n) = L_{ch}(c_n) + \sum_{j \in M(n) \setminus m} L(j \rightarrow n), \quad (1 \leq n \leq N, m \in M(n)). \quad (13)$$

对每个变量点,后验对数似然比向量 $L_{post}(c_n)$ 是

$$L_{post}(c_n) = L_{ch}(c_n) + \sum_{j \in M(n)} L(j \rightarrow n), \quad (1 \leq n \leq N) \quad (14)$$

由式(14)就可以判决变量的值。

2 仿真结果

表 1 给出了用于仿真实验的多进制 LDPC 码的参数,它们均为十六进制码型且校验矩阵 H 的列重为 3。现在来考察基于不同译码算法的十六进制 LDPC 码在 AWGN 信道中的性能。

表 1 多进制 LDPC 码的性能参数

类型	$GF(q)$	n	k	R
LDPC - I	$GF(16)$	1 152	1 024	8/9
LDPC - II	$GF(16)$	5 760	5 120	8/9
LDPC - III	$GF(16)$	11 520	10 240	8/9
LDPC - IV	$GF(16)$	1 152	768	2/3
LDPC - V	$GF(16)$	1 152	576	1/2

仿真图 1 和图 2 给出了基于 FFT - BP 译码算法

的十六进制 LDPC 码在 AWGN 信道中的性能曲线。从图 1 可以看出,在相同码率情况下,随着 LDPC 码码长增大,编码增益也不断增大。当误码率(BER)为 10^{-5} 时 LDPC - III 分别比 LDPC - I 和 LDPC - II 好 0.35 dB 和 0.06 dB。从图 1 还可以看出当码长小于 5 000 并且误比特率为 10^{-5} 的时候,LDPC - I 码与香农限的距离是 0.93 dB,随着码长的增大,LDPC - II 与香农限的距离缩小为 0.63 dB,而 LDPC - III 距离香农限只有 0.57 dB。这说明多进制 LDPC 码在高码率(1/2 ~ 1)和中长码长的时候具有较好的性能。

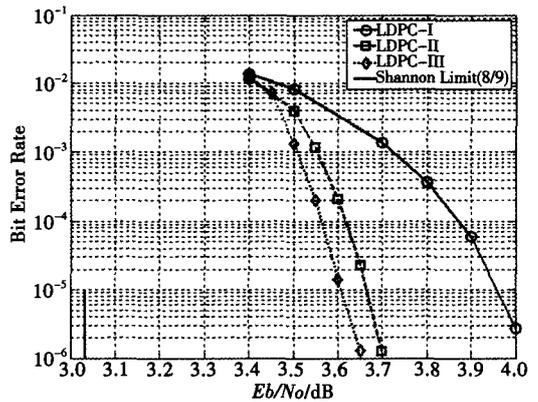


图 1 基于 FFT - BP 算法码率为 0.888 9 的 16 - LDPC 码仿真曲线

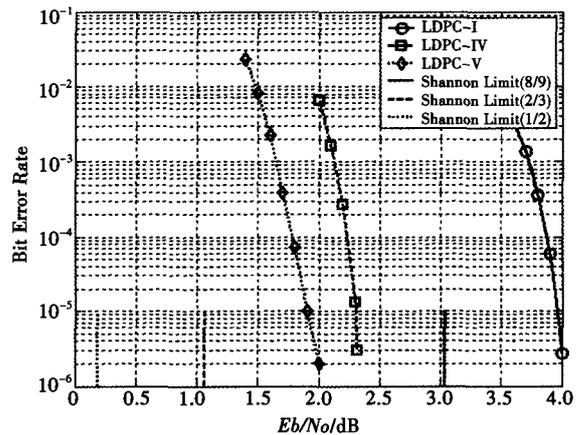


图 2 具有相同码长以 FFT - BP 算法译码 16 - LDPC 码仿真曲线

图 2 显示了具有相同码长不同码率的 3 个 16 - LDPC 码在 AWGN 信道中的仿真结果。由图可见,随着码率的降低编码增益逐渐变大。当误码率为 10^{-5} 时,LDPC - V 分别比 LDPC - IV 和 LDPC - I 好 0.4 dB 和 2 dB。另外研究还发现了一个有趣的现象:随着码率的下降,虽然编码增益增大,但仿真曲线与香农限的距离也同时变大了。图 2 中当码率为 8/9 时,LDPC - I 曲线与香农限的距离是 1 dB。码率为 2/3

时,LDPC - IV 曲线距离香农限 1.3 dB。1/2 码率的 LDPC - V 距离香农限 1.8 dB。这进一步证明了多进制 LDPC 码适合应用于高码率的情况。

图 3 和图 4 是基于 Log - BP 译码算法的十六进制 LDPC 码在 AWGN 信道中的仿真结果。由图可知,当采用 Log - BP 译码算法时,多进制 LDPC 码在 10^{-5} 误比特情况下有 0.4 dB 的性能损耗。造成损耗的原因是在 Log - BP 译码算法中,雅克比对数的修正项用阶梯函数来进行了近似。由图 3,在 AWGN 信道中,当码率为 8/9 时,基于 Log - BP 算法的十六进制 LDPC 码与基于 FFT - BP 算法的十六进制 LDPC 码具有相似的特性:随着码长的增大编码增益也逐渐增大。不同之处仅在于前者具有一定的性能损失。

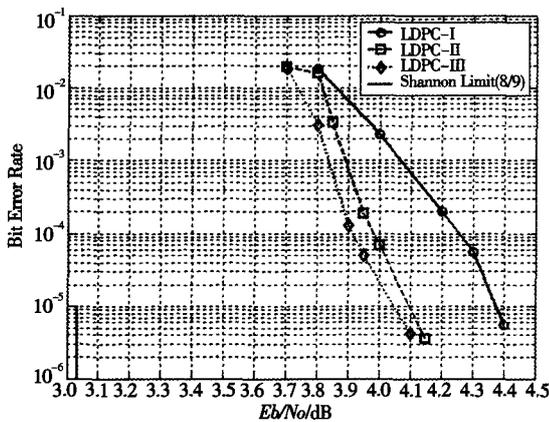


图 3 基于 Log - BP 算法 码率为 0.8889 的 16 - LDPC 码仿真曲线

法时,随着码率的下降编码增益增大,同时曲线与香农限的距离也增大。这说明当应用 Log - BP 算法进行译码时,多进制 LDPC 码仍然适用于高码率情况。

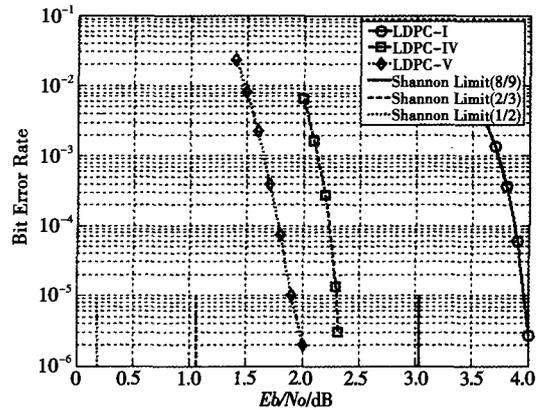


图 4 具有相同码长以 Log - BP 算法译码的 16 - LDPC 码仿真曲线

图 4 的 3 条曲线表明,在相同码长情况下 LDPC - V 分别比 LDPC - IV 和 LDPC - I 好 0.31 dB 和 1.92 dB。显然地,当应用 Log - BP 译码算法时,编码增益同样随码率的降低而增大。同时可以看出 LDPC - I 的曲线与香农限的距离为 1.4 dB,LDPC - IV 曲线距离香农限 1.7 dB,LDPC - V 与香农限的距离为 2.2 dB。类似于图 2,可以得到相同的结论:当应用 Log - BP 译码算

4 计算复杂度

当比较 2 种译码算法的复杂度时,首先要估计它们所需的存储单元数。研究表明,Log - BP 算法可以降低硬件实现所需的存储单元数。表 2 给出了 2 种算法的计算复杂度。

统计一次迭代中所进行的加法、乘法和操作的次数。各种运算的总次数由域 ($q = 2^p$),校验矩阵 H 的列重 w_c 和行重 w_r 决定。注意每个 \max^* 对应于一次 $\max()$ 操作,两次加法运算和一个查表操作。由表 2 可知,FFT - BP 算法的计算复杂度为 $O(q)$,但该算法存在乘法运算,这对于硬件实现中时钟的跳变不利。在 Log - BP 算法中,如果用 $\max()$ 操作近似 \max^* 操作则可以大大减少加法的次数。所以它可以改善硬件系统的时钟频率。很显然在硬件实现中 Log - BP 算法更具有实用价值。

表 2 FFT - BP 算法和 Log - BP 算法的计算复杂度

	加法	乘法	\max^*
FFT - BP	$nq w_c (w_c + 1) + m w_r q (w_r + p)$	$2m w_r q p$	0
Log - BP	$2(3w_r - 4)m(q - 1)^2 + w_r m (w_c - 1)(q - 1)$	0	$2(3w_r - 4)m(q - 1)^2$

5 结束语

笔者比较了基于 FFT - BP 算法和 Log - BP 算法的多进制 LDPC 码在高码率情况下的系统性能和计算复杂度。可以看出,基于 2 种算法的多进制 LDPC 码在高码率时均具有逼近香农限的特性。Log - BP 译码算法的计算复杂度低于 FFT - BP 算法,虽然后者表现出更好的系统性能但前者更适合于硬件实现。这对于

将多进制 LDPC 码应用于实际具有很重要的意义。

参考文献:

[1] MACKAY D, WILSON S, DAVEY M. Comparison of constructions of irregular Gallager codes[J]. IEEE Transaction on Communication, 1999, 47(10):1449 - 1454.
 [2] CHUNG S Y, FORNEY J G D, RICHARDSON T, et al. On the design of low-density parity-check codes within 0.0045

- dB of the Shannon limit[J]. IEEE Communication Letter, 2001, 5(2):58 - 60.
- [3] DAVEY M C, MACKAY D J C. Low density parity check codes over GF (q)[J]. IEEE Communication Letter, 1998, 2(6):165 - 167.
- [4] DAVEY M C. Error-correction using low-density parity-check codes[D]. Cambridge, U. K. :Univ. Cambridge, 1999.
- [5] WYMEERSCH H, STEENDAM H, MOENECLAIEY M. Log-domain decoding of LDPC codes over GF (q):proc. IEEE ICC2004[C]. Paris, France:[s. n.], 2004: 772 - 776.
- [6] CHEN JUNBIN, WANG LIN, LI YONG. Performance comparison between non-binary LDPC codes and reed-solomon codes over noise bursts channels: proc IEEE ICCAS 2005 [C]. Hong Kong, China:[s. n.], 2005:1 - 4.
- [7] HU X, ELEFTERIOU E, ARNOLD D M, et al. Efficient implementations of the sum-product algorithm for decoding LDPC codes: proc. IEEE Globecom. 2001 [C]. SanAntonio, USA:[s. n.], 2001,2:1036 - 1036E.

Performance Analysis of High-rate Non-binary LDPC Codes Under AWGN Channels

BAO Jie^{1a}, MA Long^{1b}, WANG Lin²

(1a. Inst. of Application Technology, Chongqing Univ of Posts &Telecomm. Technology, Chongqing 400065, China;

1b. Inst. of Coding & Inform, Chongqing, Univ of Posts &Telecomm. Technology, Chongqing 400065, China;

2. Dept. of Comm. Engineering, Xiamen Univ. , Xiamen, Fujian 361005, China)

Abstract: To solve the problem of high computational complexity and inconvenient for hardware implementation in original decoding algorithm for non-binary LDPC codes, two simplified decoding algorithms are introduced for non-binary LDPC codes: the fast Fourier transform belief propagation (FFT - BP) decoding algorithm and the Log-domain belief propagation (Log - BP) decoding algorithm. The performance comparison between two different decoding algorithms for LDPC Codes over GF (q) is investigated at high code rates ($1/2 \sim 1$) over AWGN channel. The performance curves show that by the decreasing of code rate, both coding gains and the distances from Shannon limit increase with the two algorithms, which means that non-binary LDPC Codes are suit for applications at high rates. Meanwhile it is shown that Log - BP decoding algorithm may contribute a considerable improvement in computational complexity at the cost of sacrificing some performance, which is important for Log - BP decoding algorithm to be applied in hardware implementation.

Key words: FFT - BP algorithm; Log - BP algorithm; high rate; Shannon limit.

(编辑 吕建斌)

更正

我刊 2007 年第 30 卷第 5 期第 23 页论文《痕量金属对农贸市场废弃物厌氧消化的影响》,作者“谢金连,徐龙君,吴江,农丽薇,鲜学福”,下方基金资助项目应为“重庆市院士基金项目(2004-8260)”,误为“国家自然科学基金资助项目(50478066)”,特此更正。