

文章编号:1000-582X(2007)09-0080-04

# 基于信号噪声子空间的 OFDM 信道估计

曾孝平, 赵铁军, 韩庆文

(重庆大学通信工程学院, 重庆 400030)

**摘要:**在分析基于奇异值分解(SVD)的线性最小均方误差(LMMSE)估计的实现原理的基础上, 结合信号、噪声子空间理论, 给出了矩阵低阶近似时秩的选取方法。计算机仿真结果表明提出的低阶秩选取准则能够提高该算法在各种工作环境下的适应性。

**关键词:**正交频分复用; 信道估计; 低阶近似

**中图分类号:** TN911.5

**文献标志码:** A

OFDM<sup>[1]</sup>作为一种多载波调制技术, 具有频谱利用率高、抗频率选择性衰落或窄带干扰等优点。OFDM系统一般是通过信道估计使得收端可以获得与发送端同频同相的载波信息, 从而实现性能优异的相干解调。而信道估计算法又以频域信道估计算法<sup>[2-4]</sup>为主。

文献[5]中提出了利用奇异值分解(SVD)的线性最小均方误差(LMMSE)估计, 通过奇异值分解在不影响估计性能的前提下有效降低了计算量。然而, 在该文中, 矩阵秩的选取只是通过经验值获得, 并没有给出精确的选取方法, 由于信道条件的不稳定性, 需要信道估计具有较强的自适应能力。文献[6]中虽然给出了一种基于信息论的自适应秩跟踪方法, 但却并未给出信道条件变化情况下的自适应准则。笔者在分析LMMSE简化算法的基础上, 提出了秩的选取准则。该方法能够在估计性能与估计复杂度之间作出准确的折中, 并且能够根据信道条件的变化自适应的调整估计过程中矩阵的阶数。仿真结果表明所提出的阶数选取准则能够提供较优异的估计性能。

## 1 OFDM 信道模型和子空间理论

### 1.1 OFDM 信道模型

OFDM是一种特殊的多载波传送方案, 利用离散傅里叶变换(DFT/IDFT)完成基带多个子载波的调制、解调工作。根据DFT/IDFT的时频特性, 同时假定

信道是慢衰落(即在一个OFDM符号内信道特性基本一致)的瑞利信道, 就可以将系统表示为一系列平行的高斯信道, 如图1所示, 系统中载波总数为 $N$ , 循环前缀CP长度为 $L$ 。

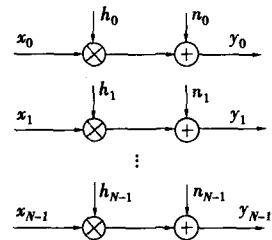


图1 OFDM 信道模型

图1中,  $h_k$ 为每个子信道的衰减因子(即子载波信道的频率响应),  $n_k$ 是独立的高斯白噪声, 均值为0, 方差为 $\sigma_n^2$ 。假设接收信号向量为 $y$ , 发送信号构成对角阵 $X$ , 线性滤波器的传递函数为 $h$ , 信道噪声为 $n$ , 则有

$$y = Xh + n.$$

笔者研究的是基于训练序列的线性最小均方误差(LMMSE)估计。在已知传输数据 $X$ 、接收数据 $y$ 以及信道的频域自相关函数 $R_{hh}$ 的前提下, 信道传递函数的LMMSE估计为

$$\hat{h}_{\text{lmmse}} = R_{hh} \cdot (R_{hh} + \sigma_n^2 \cdot (XX^H)^{-1})^{-1} \cdot \hat{h}_{\text{ls}}, \quad (1)$$

其中 $\hat{h}_{\text{ls}}$ 是信道的最小平方估计;  $\sigma_n^2$ 是信道加性噪声

收稿日期: 2007-04-03

作者简介: 曾孝平(1956-), 男, 重庆大学教授, 博士生导师, 主要从事通信信号处理研究, (Tel) 023-65103544;

(E-mail) zxp@ccee.cqu.edu.cn.

的方差。令  $\beta = E\{|x_k|^2\}E\{|1/x_k|^2\}$  是一个与信号星座图相关的常数,则式(1)可简化为

$$\hat{h} = R_{hh} (R_{hh} + \frac{\beta}{SNR} I)^{-1} \hat{h}_{ls} \quad (2)$$

### 1.2 信号、噪声子空间理论

在信号处理和系统科学等领域中,观测数据不可避免的存在观测误差或噪声,通常采用  $X = A + W$  的模型进行分析。其中,  $A$  表示真实数据,  $W$  表示观测误差或噪声。

定义  $X$  的自相关矩阵:  $R_X = E\{X^H X\} = E\{(A + W)^H (A + W)\}$ 。

假设观测误差  $W$  与真实数据  $A$  统计不相关,则

$$R_X = E\{X^H X\} = E\{A^H A\} + E\{W^H W\}。$$

令  $R = E\{A^H A\}$  和  $E\{W^H W\} = \sigma_w^2 I$ , 则  $R_X = R + \sigma_w^2 I$ 。

对矩阵  $R = E\{A^H A\}$  进行特征值分解,

$$R_X = U \sum U^H + \sigma_w^2 I = U (\sum + \sigma_w^2 I) U^H = U \Pi U^H$$

式中

$$\Pi = \sum + \sigma_w^2 I = \text{diag}(\sigma_1^2 + \sigma_w^2, \sigma_2^2 + \sigma_w^2, \dots, \sigma_r^2 + \sigma_w^2, \sigma_w^2, \dots, \sigma_w^2)$$

其中,  $\sum = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$ , 且  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2$  为信号自相关矩阵  $E\{A^H A\}$  的非零特征值。在一定的信噪比下,  $\sigma_r^2$  明显大于  $\sigma_w^2$ , 则将含噪声的自相关矩阵  $R_X$  的前  $r$  个大特征值

$\lambda_1 = \sigma_1^2 + \sigma_w^2, \lambda_2 = \sigma_2^2 + \sigma_w^2, \dots, \lambda_r = \sigma_r^2 + \sigma_w^2$  称为主特征值, 而将剩余的  $n - r$  个小特征值

$$\lambda_{r+1} = \sigma_w^2, \lambda_{r+2} = \sigma_w^2, \dots, \lambda_n = \sigma_w^2$$

称为次特征值。

这样, 自相关矩阵  $R_X$  的特征值分解即可写成

$$R_X = [U_s, U_n] \begin{bmatrix} \sum & 0 \\ 0 & \sum_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s^H \\ U_n^H \end{bmatrix}。$$

令  $S$  是与观测数据自相关矩阵的  $r$  个主特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  对应的特征向量的矩阵, 其列空间  $\text{Span}(S) = \text{Span}\{U_1, U_2, \dots, U_r\}$  称为观测数据空间  $\text{Span}(X)$  的信号子空间。而与另外  $n - r$  个次特征值对应的特征向量矩阵的列空间  $\text{Span}\{U_{r+1}, U_{r+2}, \dots, U_n\}$  称为观测数据空间的噪声子空间。

### 2 基于信号、噪声子空间的秩选取准则

在文献[2]中, 将信道频域自相关函数  $R_{hh}$  作奇异值分解(SVD)后代入式(2), 进行化简后得到基于奇异值分解的低阶近似:

$$\hat{h} = U \Lambda U^H (U \Lambda U^H + \frac{\beta}{SNR} I)^{-1} \hat{h}_{ls} = U \Delta_p U^H \hat{h}_{ls} \quad (3)$$

其中, 矩阵  $\Delta_p = (\frac{\Lambda}{\Lambda + \frac{\beta}{SNR}})$ , 由信道频域自相关函数的

奇异值经过运算后构成。根据矩阵奇异值分解的性质, 若矩阵的秩为  $p$ , 则前  $p$  个奇异值由大到小递减, 从第  $p + 1$  个奇异值开始都近似于 0, 从而降低了式(3)的计算复杂度。

在该文中, 低阶近似的阶数  $p$  根据经验公式可选取为  $(2BT + 1)$ , 其中,  $B$  为单边带宽,  $T$  为信道的时域间隔。然而, 在不同的信道条件下它并不能准确的获得  $p$  的合适取值, 从而影响了估计性能, 必须提出更加准确的选取准则。

通过对式(2)的分析可以发现, 对该式的逼近主要从对  $R_{hh}$  和  $(R_{hh} + \frac{\beta}{SNR} I)$  两个因子的低阶逼近入手。

对于自相关矩阵  $R_{hh}$ , 其低阶近似比较容易实现。只需利用奇异值分解确定有效秩<sup>[7]</sup>的两种常用方法: 归一化奇异值法和范数比法。所对应的阶数作为有效秩的近似估计。通过 MATLAB 仿真工具的计算, 降阶阶数的选取如表 1 所示。

表 1 归一化奇异值法和范数比法确定的低阶阶数

低阶算法的阈值	归一化奇异值 ( $\epsilon$ 取 0.1)	范数比 ( $\alpha = 0.997$ )
阶数值	4	6

对于式(2)起决定性作用的是  $(R_{hh} + \frac{\beta}{SNR} I)$  因子, 这也是笔者的研究重点。通过对该因子的分析可以发现, 其本质与信号、噪声模型的自相关函数相同, 故可利用信号、噪声子空间的思想, 将其信号子空间所对应的阶数  $r$  作为低阶近似的阶数。特征值分解的低阶近似用公式表示为:

$$R_{hh} + \sigma_n^2 I = U (\sum + \sigma_n^2 I) U^H \approx \sum_{i=1}^r U_i (\sigma_i^2 + \sigma_n^2) U_i^H。$$

利用 MATLAB, 计算出不同信噪比下信号子空间维数, 也即是  $(R_{hh} + \frac{\beta}{SNR} I)$  因子低阶近似对应的阶数, 如表 2 所示。

表 2 不同信噪比下确定的低阶阶数

信噪比/dB	噪声自相关( $\sigma_n^2$ )	阶数( $p$ )
5	0.307 2	2
10	0.093 7	4
15	0.030 3	7
20	0.009 9	14
25	0.003 2	19

信道自相关矩阵  $R_{hh}$  为 Hermitian 矩阵, 由于 Hermitian 矩阵的奇异值分解与特征值分解是一致的, 所以可以将信号、噪声子空间的分析和基于奇异值分解的压缩算法结合起来, 把  $R_{hh}$  和  $(R_{hh} + \frac{\beta}{SNR}I)$  两个因子分别确定的阶数进行综合, 取较大者作为 LMMSE 算法的降秩阶数  $p$ , 即可保证两个因子的逼近性能, 从而保证整个近似估计算法的性能。

### 3 计算量分析

将式(3)表示为一阶向量和的形式, 即:  $\hat{h}_p = (\sum_{k=0}^{p-1} \delta_k U_k U_k^H) \hat{h}_{1s}$ 。记  $q_k = \delta_k U_k$ , 则进一步简化为  $\hat{h}_p = (\sum_{k=0}^{p-1} U_k^H \hat{h}_{1s}) q_k$ 。该表达式包括  $p$  项和项, 其中每一个和项需要  $2N$  次乘法运算, 总共需要进行  $2pN$  次乘法运算, 即每个载波需要  $2p$  次乘法运算。与未降秩的 LMMSE 算法相比, 每个子载波的计算复杂度从  $N$  降到  $2p$ 。当  $p$  远小于  $N$  时, 计算量就能大大简化。

### 4 仿真结果与分析

仿真条件为: OFDM 子载波总数  $N = 64$ , 采用 BPSK 调制方式, 假设循环前缀 (CP) 能够消除符号间干扰 (ISI), 采用训练序列导频。定义均方误差 (MSE) 为

$$MSE = \|h - \hat{h}\|^2$$

图 2、3 分别给出了对于不同的信道条件(7 径瑞利衰落信道和 2 径瑞利衰落信道), 在不同信噪比 (SNR) 下, 最小平方 (LS)、线性最小均方误差 (LMMSE) 和降秩的线性最小均方误差三种方法的估计均方误差比较曲线。

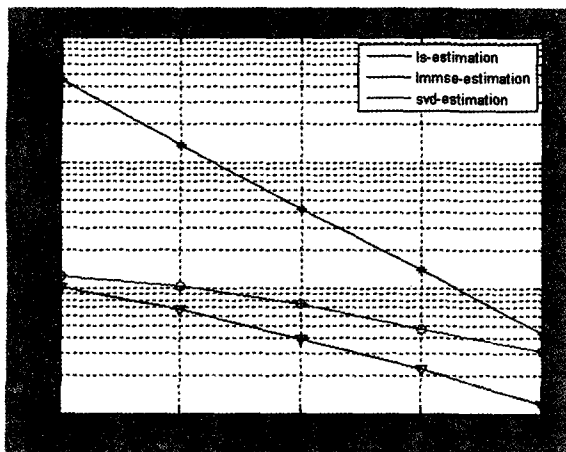


图 2 7 径瑞利衰落信道条件下信道估计

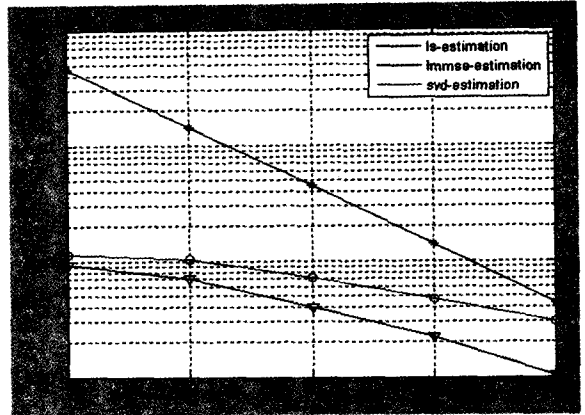


图 3 2 径瑞利衰落信道条件下信道估计

从图 2、3 中可以看出, 利用了频率相关特性的线性最小均方误差估计算法具有最好的性能, 经过降秩处理后估计算法性能稍有下降, 但是同最小平方算法相比, 仍然具有一定的优势。而且对于不同的信道条件, 降秩的 LMMSE 算法具有基本相同的估计性能, 证明了该算法的可行性。

图 4 给出了不同信噪比下, 降秩的和未降秩的线性最小均方估计的误符号率。误符号的计算是通过如下方法: 进行 100 次循环测试, 收端每次将接收到的信号进行简单的译码后与发端对比, 对错误的符号个数进行统计, 最后求平均即得到平均的误符号率。

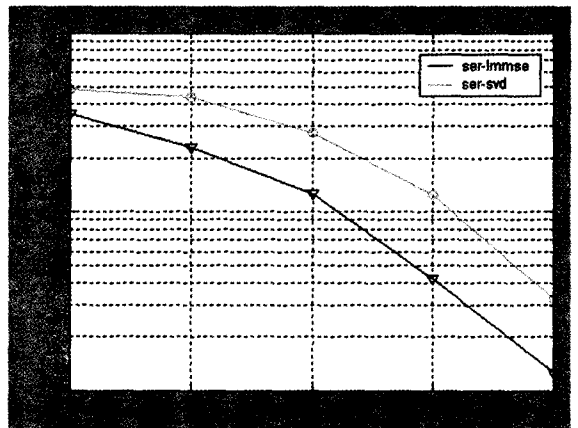


图 4 降秩前后误符号率对比曲线

从图上可以看到, 降秩后的算法与未降秩的算法相比, 虽然估计误符号率有 3 dB 左右的性能损失, 但仍然处于可接受的范围。

### 5 结论

主要研究了基于奇异值分解的 OFDM 低秩信道估计技术, 提出了秩的选取准则和根据信道条件自适应跟踪的方法。仿真表明, 提出的秩选取方法能够准确的反映出信号子空间的大小, 在大大降低计算量的同时能够保证信道估计的性能。进一步的工作将放在

如何利用信道的时频二维特性进行信道估计,以及时频特性未知条件下的估计方法的研究。

#### 参考文献:

- [1] HARA S, PRASAD R. Multicarrier techniques for 4G mobile communications [M]. Boston Mass: Arthch House, 2003: 56-61.
- [2] MINN H, KIM DI, BHAGAVA V K. A reduced complexity channel estimation for OFDM systems with transmit diversity in mobile wireless channels[J]. IEEE Transactions on Communications, 2002, 50(5): 799-807.
- [3] CHANG M X, SU Y T. Model based channel estimation for OFDM signals in rayleigh fading[J]. IEEE Transactions on Communications, 2002, 50(4): 540-544.
- [4] 黄爱苹, 胡荣. 基于导频和多项式模型的信道估计[J]. 电子学报, 2002, 30(4): 584-586.
- [5] EDFORS O, VAN DE BEEK J J, WILSON S K, et al. OFDM channel estimation by singular value decomposition [J]. IEEE Transactions on Communications, 1998, 46(7): 931-938.
- [6] 李悦, 李子, 蔡跃明, 等. OFDM 系统基于导频的低秩信道估计方法[J]. 通信学报, 2004, 25(10): 154-162.
- [7] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 354-356.

## OFDM Channel Estimation Based on Signal-noise Subspace

ZENG Xiao-ping, ZHAO Tie-jun, HAN Qing-wen

(College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** Channel estimation is one of the key technologies for Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM). The contradiction of estimation property and estimation simplicity is the algorithm's key issue to be solved. The Linear Minimum Mean-Squared Error (LMMSE) estimation base on Singular Value Decomposition (SVD) was analyzed. Combined with the signal-noise subspace theory, a new rank-choose criterion for low-rank approximation was raised. The simulation results showed that the modified low-rank order choosing criterion strengthened the LMMSE algorithm's environment adaptability.

**Key words:** orthogonal frequency division multiplexing; channel estimation; low-rank approximation

(编辑 吕建斌)