文章编号:1000-582X(2007)09-0084-04

线性系统极点正规配置问题

肖民卿,曹长修,陈金玉,杨 佳
(重庆大学 自动化学院,重庆 400030)

摘 要:基于正规矩阵特征值对其元素变化的不敏感性,讨论线性系统极点的正规配置问题,即设计状态反馈控制律,将闭环控制系统极点配置到期望位置的同时使闭环状态矩阵为正规矩阵,从而达到增强控制系统的鲁棒性的目的。对于线性时不变系统,给出期望极点集可正规配置的充分必要条件及反馈控制律的一般表达式,并结合示例给出算法。

关键词:线性时不变系统;正规矩阵;极点配置;极点正规配置;鲁棒性
中图分类号:TP13 **文献标志码**:A

极点配置是控制理论研究的主要问题之一[1-7]。众所周知,控制系统的动态和稳态特性取决于闭环系统的极点位置,通过控制器设计将闭环系统极点配置到适当位置或区域,将保证系统具有理想的性能。然而在工程实践中,由于辨识误差、元器件老化、环境变化等诸多因素引起的系统参数变化是不可避免的,这就对控制系统的鲁棒性提出了要求。对于状态空间描述的线性时不变系统而言,系统极点即为系统矩阵的特征值。由于正规矩阵关于其特征值的谱条件数最小,正规矩阵的特征值问题是良态的,也就是说,正规矩阵的特征值对其元的变化是不敏感的[8]。因此,若在根据系统的暂态和稳态性能要求进行极点配置的同时,使得闭环控制系统矩阵成为正规矩阵,无疑将提高控制系统的鲁棒性[9-10]。

基于上述原因,运用矩阵广义逆理论研究线性时不变系统极点的状态反馈正规配置问题,讨论在期望极点配置的同时,使闭环系统矩阵为正规矩阵的充分必要条件,在此基础上,给出相应反馈控制律的统一代数表达式。

1 问题的描述

设线性时不变系统为

$$\delta x(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

其中 $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times p}, p < n, x(t) \in R^n$ 为系统的状态向量,$u(t) \in R^p$ 为系统的输入向量,这里 R 表示实数域;δ 为广义算子符号:当系统(1)为连续系统时,$\delta x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$;当系统(1)为离散系统时,$\delta x(t) = x(t+1)$。

考虑状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t), \tag{2}$$

其中 $K \in R^{p\times n}$(下文即称 K 为反馈控制律),则闭环系统成为

$$\delta x(t) = (A + BK)x(t), \tag{3}$$

文中讨论的问题是

1) 对于给定的期望闭环极点集 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$,存在反馈控制律 K 使闭环系统矩阵 $\boldsymbol{A+BK}$ 为正规矩阵且特征值集恰为 Λ 的充分必要条件是什么?

2) 在1)中条件满足的情况下,反馈控制律 K 的一般表达式是什么?

为了叙述方便,给出如下定义。

定义 对于系统(1),给定期望闭环极点集 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$,如果存在状态反馈控制律 K 使矩阵 $\boldsymbol{A+BK}$ 为正规矩阵且特征值集恰为 Λ,则称期望极点集 Λ 可正规配置。

收稿日期:2007-05-23
基金项目:重庆市科委自然科学基金资助项目(102075120050121);福建省教育厅科研基金资助项目(JA04169)
作者简介:肖民卿(1970-),男,副教授,重庆大学博士研究生,主要从事线性系统代数理论、鲁棒控制研究。
曹长修(联系人),男,教授,博士生导师,(E-mail)cxcao@cqu.edu.cn。

2　主要结论

对于矩阵 $A\in R^{n\times n}$，记 A^{T} 为 A 的转置矩阵，若 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}$，则称 A 为正规矩阵。正规矩阵是包含对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵在内的一类特殊矩阵。下面的引理1是实正规矩阵的一个重要刻划。

引理1[11]　设 $A\in R^{n\times n}$，A 的特征值为 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_s,a_1\pm b_1i,\cdots,a_t\pm b_ti\}$（$\lambda_1,\cdots,\lambda_s,a_1,\cdots,a_t,b_1,\cdots,b_t$ 均为实数，i 为虚数单位，$s+2t=n$），则 A 为正规矩阵的充分必要条件是存在正交矩阵 U 使得

$$U^{\mathrm{T}}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_s,H_1,\cdots,H_t)$$

其中 $H_k=\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ -b_k & a_k\end{pmatrix}$，$k=1,2,\cdots,t$。

引理2[12]　设 $A\in R^{m\times n}$，$B\in R^{m\times q}$，则线性矩阵方程 $AX=B$ 的充分必要条件是

$$(I_m-AA^+)B=0,\tag{4}$$

其中：I_m 为 m 阶单位矩阵；A^+ 为 A 的 Moore-Penrose 广义逆；0 表示适维零矩阵。进一步地，若(4)式成立，则矩阵方程 $AX=B$ 的全部解为

$$X=A^+B+(I_n-A^+A)Y,\tag{5}$$

其中 $Y\in R^{n\times q}$ 为任意矩阵。

考虑线性时不变系统(1)，设输入矩阵 B 的奇异值分解为 $B=P\begin{pmatrix}\sum & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$，其中 P、Q 分别为 n 阶、p 阶正交矩阵，$\sum=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$，$\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ 为 B 的正奇异值，$r=\mathrm{rank}B$。给定期望的闭环极点集 $\Lambda=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_s,a_1\pm b_1i,\cdots,a_t\pm b_ti\}$（$\lambda_1,\cdots,\lambda_s,a_1,\cdots,a_t,b_1,\cdots,b_t\in R$ 且 $s+2t=n$）。记 $A'=P^{\mathrm{T}}AP$，$H_k=\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ -b_k & a_k\end{pmatrix}$，$k=1,2,\cdots,t$，$H=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_s,H_1,\cdots,H_t)$。于是，有

定理　对于线性时不变系统(1)，期望闭环极点集 Λ 可正规配置的充分必要条件是存在 n 阶正交矩阵 V，使得

$$(0\quad I_{n-r})(VH-A'V)=0,\tag{6}$$

进一步地，若上述条件成立，则反馈控制律的统一表达式为

$$K=B^+(PVHV^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}-A)+(I_p-B^+B)Y,\tag{7}$$

其中 Y 为任意 $p\times n$ 实矩阵。

证明　对于线性系统(1)，期望闭环极点集 Λ 可正规配置当且仅当存在 $K\in R^{p\times n}$ 使得 $A+BK$ 为正规矩阵且特征值集为 Λ。由引理1立即知，期望闭环极点集 Λ 可正规配置当且仅当存在 $K\in R^{p\times n}$ 和 n 阶正交矩阵 U 使得

$$A+BK=UHU^{\mathrm{T}},\tag{8}$$

即

$$BK=UHU^{\mathrm{T}}-A,\tag{9}$$

由引理2，式(9)成立当且仅当

$$(I_n-BB^+)(UHU^T-A)=0,\tag{10}$$

注意到 U 是正交矩阵，式(10)成立当且仅当

$$(I_n-BB^+)(UH-AU)=0,\tag{11}$$

又 B 的奇异值分解为 $B=P\begin{pmatrix}\sum & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$，根据矩阵广义逆理论知，$B^+=Q\begin{pmatrix}\sum^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}$，于是有

$$BB^+=P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}},$$

这样，

$$P^{\mathrm{T}}(I_n-BB^+)P=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix},\tag{12}$$

而 P 是正交矩阵，则式(12)成立当且仅当

$$P^{\mathrm{T}}(I_n-BB^+)P(P^{\mathrm{T}}UH-P^{\mathrm{T}}AU)=0,\tag{13}$$

即

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}(P^{\mathrm{T}}UH-P^{\mathrm{T}}APP^{\mathrm{T}}U)=0,\tag{14}$$

记 $V=P^{\mathrm{T}}U$，则式(11)等价于

$$(0\quad I_{n-r})(VH-A'V)=0$$

由 P 是正交矩阵知，V 为正交矩阵当且仅当 U 为正交矩阵，因此，期望闭环极点集 Λ 可正规配置当且仅当存在 n 阶正交矩阵 V，使式(6)成立。

若存在 n 阶正交矩阵 V，使式(6)成立，由上面的证明过程和引理2易知，反馈控制律为

$$K=B^+(PVHV^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}-A)+(I_p-B^+B)Y,$$

其中 Y 为任意 $p\times n$ 实矩阵。证毕。

说明：

1)根据线性系统理论，如果(A,B)能控，则线性时不变系统(1)通过状态反馈可以任意配置极点。但是并非任意期望极点集都可实现正规配置，即使(A,B)能控。例如，$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$，其中 a,b,c 为任意实数，$B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，根据能控的秩判据容易知道，$(A,B)$能控，但是不存在矩阵 K 使得 $A+BK$ 为正规矩阵。事实上，设 $K=(k_1,k_2,k_3)$，则 $A+BK=\begin{pmatrix}a+k_1 & b+k_2 & c+k_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$，若$A+$

BK 为正规矩阵,由正规矩阵定义可知,$A+BK$ 的第二行元素的平方和应当等于第二列元素的平方和,即 $1=(b+k_2)^2+4$,而 b 和 k_2 都是实数,这是不可能的。因此,对任意 K,$A+BK$ 都不是正规矩阵,也就是说,此系统对任意期望极点集都无法实现正规配置。

2)对于能控的单输入线性时不变系统,给定期望闭环极点,实现极点配置的状态反馈控制律 K 是唯一确定的,从而闭环系统矩阵唯一确定。直接通过极点配置算法求出 K 和 $A+BK$,判断 $A+BK$ 是否正规矩阵。当然,由于 K 不存在可选性,寻求适当 K 使 $A+BK$ 为正规矩阵的想法是没有意义的。

3)式(7)给出实现期望极点正规配置的状态反馈控制律的参数化表示,其中 $p\times n$ 矩阵 Y 为自由参数,可适当选取 Y,使 K 的元素总体上尽量小。如果 B 是列满秩的,即 $\operatorname{rank}B=p$,于是 $I_p-B^+B=0$,此时对于确定的 V 来说,K 是唯一的。

3 算法与示例

由上节定理的证明过程,对于系统(1),给出期望极点正规配置问题的算法步骤。

期望极点正规配置算法:

Step1 对于给定期望极点集 $\Lambda=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_s,a_1\pm b_1 i,\cdots,a_t\pm b_t i\}$,构造 $H=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_s,H_1,\cdots,H_t)$,其中 $H_k=\begin{pmatrix} a_k & b_k\\ -b_k & a_k\end{pmatrix}$,$k=1,2,\cdots,t$。

Step2 对 B 进行奇异值分解,得 $B=P\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{\mathrm T}$,计算 $B^+=Q\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{\mathrm T}$,记 $r=\operatorname{rank}\boldsymbol B$。计算 $A'=P^{\mathrm T}AP$。

Step3 求解满足矩阵方程 $(0\quad I_{n-r})(VH-A'V)=0$ 的正交矩阵 V。若无解,则期望极点集 Λ 无法正规配置,计算结束;若有解,进入下一步。

Step4 给出状态反馈控制律:$K=B^+(PVHV^{\mathrm T}P^{\mathrm T}-A)+(I_p-B^+B)Y$,其中 Y 为任意 $p\times n$ 实矩阵。

例[10] 已知连续线性时不变系统 $\dot x(t)=Ax(t)+Bu(t)$,其中

$$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

给定期望极点集 $\Lambda=\{-2,-1\pm i\}$,判定是否可正规配置,若可正规配置,给出反馈控制律 K。

运用上述算法计算:

1)根据期望极点集写出 $H=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$。

2)对 B 进行奇异值分解,得:

$$B=P\begin{pmatrix}\Sigma\\0\end{pmatrix}Q^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},r=\operatorname{rank}B=2$$

$$B^+=Q(\Sigma^{-1}\quad 0)P^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}\frac12&0&\frac12\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A'=P^{\mathrm T}AP=\begin{pmatrix}\frac32&-\frac{\sqrt2}{2}&-\frac12\\0&1&0\\\frac12&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac32\end{pmatrix}$$

3)求解满足矩阵方程 $(0\quad 0\quad 1)(VH-A'V)=0$ 的正交矩阵,有解为

$$V=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$$

4)系统对于期望极点集可正规配置,由于 B 是列满秩,$I_2-B^+B=0$,故状态反馈控制律为

$$K=B^+(PVHV^{\mathrm T}P^{\mathrm T}-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}$$

闭环系统矩阵 $A+BK=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 具有期

望特征值且为正规矩阵。所得结果与文献[10]一样,但是从过程看,文中将问题转化为矩阵方程的求解,避免了文献[10]中算法的偶然性。需要指出的是,算法的关键和难点在于 Step3 中矩阵方程的求解,要求解阵是正交矩阵,可以利用正交矩阵定义转化为矩阵二次方程,最终归结为多元二次代数方程组,通过现有数学计算工具软件(如 Matlab、Maple 等)进行求解。当然,当系统矩阵阶数高时,计算量将很大。

4 结 论

从增强反馈控制系统的鲁棒性出发,研究了线性时不变系统基于状态反馈的极点正规配置问题,即在通过状态反馈控制进行期望极点配置时,使得到的闭环控制系统矩阵为正规矩阵。以矩阵方程形式给出了期望极点可正规配置的充分必要条件,及在此条件下反馈控制律的一般表达式,并提出极点正规配置算法,示例表明算法是可行的。

参考文献:

[1] FALLSIDE F. Control system design by pole-zero assignment [M]. New York: Academic, 1977.

[2] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[3] BHATTACHARYYA S P, DE SOUZA E. Pole assignment via sylvester' s equations [J]. Systems Cont Lett, 1982, 1 (4): 261-263.

[4] SANTOS-MENDES R, AGUILAR-MARTIN J. Robust pole placement design [J]. Int J Control, 1989, 50 (1): 113-128.

[5] SUN J G. Perturbation analysis of the pole assignment problem [J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1996, 17: 313-331.

[6] MEHRMANN V, XU H. Numerical methods in control [J]. J Comp & Appl Math, 2000, 123: 371-394.

[7] NURGES U. Robust pole assignment via reflection coefficients of polynomials [J]. Automatica, 2006, 42: 1223-1230.

[8] WILKINSON J H. The algebraic eigenvalue problem [M]. London: Clarendon Press, 1965.

[9] 张霖,吴麒,高黛陵. 设计多变量鲁棒控制系统的正规矩阵方法[J]. 自动化学报,1994,20(2): 138-145.

[10] 易宜连. 鲁棒控制系统的正规矩阵设计法[J]. 华东交通大学学报,1996,13(4): 12-15.

[11] 王品超. 高等代数新方法[M]. 济南: 山东教育出版社, 1989.

[12] BEN-ISRAEL A, GREVILE TNE. Generalized inverse: theory and applications [M]. New York: Wiley, 1974.

Pole Normal Assignment for Linear Control Systems

XIAO Min-qing, CAO Chang-xiu, CHEN Jin-yu, YANG Jia

(College of Automatic, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The eigenvalues of a normal matrix are not sensitive to its elements perturbation. Based on the fact, the pole normal assignment problem for linear control systems is discussed. The aim is to find a state feedback control law. When the closed-loop system has desired poles and the closed-loop system matrix is a normal matrix, the robustness of the control system is enhanced. For linear constant systems, a necessary and sufficient condition is given to normal assignment of the desired poles. When the condition holds, a unified expression of the state feedback control laws is showed. An example is given for illustration of the proposed algorithm.

Key words: linear constant systems; normal matrix; pole assignment; pole normal assignment; robustness

(编辑　陈移峰)