文章编号:1000-582X(2008)02-0162-04

一种不对称 DFT 算法及其应用

王 峰[1],王柏林[2],张燕姑[1]
(1. 温州大学 计算机科学与工程学院,浙江 温州 325035 ;2. 河海大学 电气工程学院,南京 210098)

摘 要:为了得到良好的统计特性,DFT(离散傅里叶变换)算法要求时域采样点数 N 足够大,但 N 越大计算量也越大。针对电力系统谐波分析中谐波次数远小于时域采样点数的特点,提出一种适用于电力系统谐波分析的不对称 DFT 算法,并从理论上论证了不对称 DFT 算法给出的结果正好是谐波系数的最小二乘估计。同时研究了不对称 DFT 算法在电力系统谐波分析中的应用,研究结果表明,不对称 DFT 算法不仅计算量比标准 FFT 算法少,而且统计特性也十分优良。

关键词:DFT;不对称 DFT; 谐波分析;最小二乘法
中图分类号:TN911.6 文献标志码:A

Asymmetry DFT Algorithm and Its Application

WANG Feng[1], *WANG Bo-lin*[2], *ZHANG Yan-gu*[1]
(1. Institute of Computer Science and Engineering, Wenzhou University, Wenzhou, Zhejiang 325027, P. R. China;
2. Institute of Electric Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China)

Abstract: In order to get good statistical properties, the DFT (Discrete Fourier Transform) algorithm requires the number of time-domain sampling points N is big enough, but the bigger N is, the bigger the amount of computation is. For the characteristic that the harmonic frequency is much less than the number of time-domain sampling points in harmonics analysis of power system, the asymmetry DFT algorithm is proposed to be applicable for the harmonics analysis of power system. It is demonstrated in the theory that the result the new algorithm gives is just the least squares estimation of harmonics coefficients. The application of the new algorithm in harmonics analysis of power system is studied. The research results prove the asymmetry DFT algorithm not only costs less time in the calculation, but also has better statistical properties than the standard FFT algorithm.

Key words: DFT; asymmetry DFT; harmonics analysis; least square method

在谐波分析中,最常用的算法是 DFT 或它的快速算法 FFT[1-2],DFT 定义为确定性时域序列与频域序列之间的变换[3],但是,时域信号不可避免地会受到随机噪声的污染。笔者研究了随机环境下用 DFT 进行谐波分析的统计特性,并发展了一种具有良好统计特性的快速 DFT 算法。

1 随机环境下 DFT 的统计特性

考虑受噪声污染的复多频正弦信号

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=0}^{M-1} X(m) e^{j\frac{2m\pi}{T}t} + \nu(t), \tag{1}$$

式中,$X(m)$是第 m 次谐波的系数,$2m\pi/T$ 是第 m 次谐波的角频率,$M-1$ 是最高次谐波的次数,T 是信号周期,$\nu(t)$是随机噪声。

收稿日期:2007-10-20
基金项目:浙江省自然科学基金资助项目(Y106145)
作者简介:王峰(1971-),男,温州大学硕士研究生,主要从事算法、DSP 应用等方向的研究。王柏林(联系人),男,重庆大学教授,博士生导师,(E-mail)phdwbl@163.com。

一个信号周期同步采样 N 个点,带入方程(1)就得到 N 个线性方程。如果 $N=M$,这 N 个线性方程就可以写成矩阵形式:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\nu}, \tag{2}$$

式中

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=[\tilde{x}(0)\quad \tilde{x}(1)\quad \cdots\quad \tilde{x}(N-1)]^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{X}=[X(0)\quad X(1)\quad \cdots\quad X(N-1)]^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\nu}=[\nu(0)\quad \nu(1)\quad \cdots\quad \nu(N-1)]^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & e^{j\frac{2\pi}{N}2} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)}\\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}2} & e^{j\frac{2\pi}{N}4} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}2(N-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2}\end{bmatrix}, \tag{6}$$

当 $\nu=0$ 时,$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 构成 DFT 对。

DFT: $$\boldsymbol{X}=\frac{1}{N}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{x}, \tag{7}$$

IDFT: $$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \tag{8}$$

其中,$\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵,$\boldsymbol{X}$ 是谐波系数的真值,$\boldsymbol{x}$ 是无噪声时的采样序列,

$$\boldsymbol{x}=[x(0)\quad x(1)\quad \cdots\quad x(N-1)]^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

当 $\nu\neq 0$ 时,$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 不是 DFT 对。

现在研究 $\nu\neq 0$(有噪声)的情况,首先,矩阵方程(2)的最小二乘解为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\tilde{\boldsymbol{x}}, \tag{10}$$

因为

$$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=NI_N, \tag{11}$$

所以式(10)可简化为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{A}^{*}\tilde{\boldsymbol{x}}, \tag{12}$$

进一步可证明

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}, \tag{13}$$

显然,式(12)和式(13)是 DFT 对,也就是说,有噪声时采样序列 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 与谐波系数的最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 构成 DFT 对。所以,在随机环境下,如果 DFT 仍然用式(7)(8)的形式,就要注意其含义的变化:这时 x 是信号(含噪声)的时域采样值,$\boldsymbol{X}$ 是谐波系数的最小二乘估计(不是真值)。

根据最小二乘估计理论,如果 $\nu(t)$ 是方差为 σ^2 的白噪声,则 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的一致无偏估计,可以求出最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 的方差为

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}\quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*}]=\frac{1}{N\times N}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\nu}\quad \boldsymbol{\nu}^{*}]\boldsymbol{A}=\frac{\sigma^2}{N}I_N, \tag{14}$$

上式清楚地说明,N 越大估计的方差越小。

2　随机环境下 DFT 的新算法

如前所说,在随机环境下,要减少估计的方差,时域采样点数必须充分多,所以在工程应用中(比如电力系统),常取 $N>>M$,即 DFT 的输入与输出不对称。$N>>M$ 时,信号模型为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{\nu}, \tag{15}$$

其中,$\tilde{\boldsymbol{x}}\in R^N$,$A_1\in R^{N\times M}$,$X_1\in R^M$。

方程(15)的最小二乘解为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_1=(\boldsymbol{A}_1^{*}\boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{A}_1^{*}\tilde{\boldsymbol{x}}, \tag{16}$$

因为 $\boldsymbol{A}_1^{*}\boldsymbol{A}_1=I_M$,所以上式可简化为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_1=\frac{1}{N}A_1^{*}\tilde{\boldsymbol{x}}, \tag{17}$$

显然,$\boldsymbol{A}_1^{*}$ 是 $M\times N$ 矩阵($N\geqslant M$),并且

$$\boldsymbol{A}_1^{*}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)}\\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}4} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(M-1)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)(N-1)}\end{bmatrix}。 \tag{18}$$

式(17)可看作 $N>>M$ 的不对称 DFT, 在不对称情况下,用标准 FFT 计算,有时不是最快的。比如 ,当 $M<\log_2 N$ 时直接用公式(17)计算比标准 FFT 计算量少[3]。还有一个方法是修剪算法[4-5],它是在标准 FFT 的计算"树"上修剪掉无用的分枝,从而减少计算量,不过对于数千点的 FFT,这种修剪也不容易。

结合电力系统谐波分析的特点,设计了一种比标准 FFT 快的算法(当 $N>>M$),该算法的原理是:取 $N=K\times M$ 且 $M=2^r$(r 为正整数),这样 $\boldsymbol{A}_1^{*}$ 就是 M 行和($K\times M$)列的矩阵。如果能将矩阵 $\boldsymbol{A}_1^{*}$ 合理分割成 K 个 $M\times M$ 维的方阵,并且每个 $M\times M$ 维方阵都满足 M 点 FFT 的条件,那么,一个 $K\times M$ 点的 FFT 就分解为 K 个 M 点的 FFT,从而使计算量大为减少。

依次取矩阵 $\boldsymbol{A}_1^{*}$ 的第($iK+1$)($i=0,1,\cdots,M-1$)列构成矩阵 $\boldsymbol{F}_0$,取矩阵 $\boldsymbol{A}_1^{*}$ 的第($iK+2$)($i=0,1,\cdots,M-1$)列构成矩阵 $\boldsymbol{F}_1$,……,取矩阵 $\boldsymbol{A}_1^{*}$ 的第($iK+K$)($i=0,1,\cdots,M-1$)列构成矩阵 $\boldsymbol{F}_{K-1}$。显然,

$$\boldsymbol{F}_0=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}K} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2K} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)K}\\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2K} & e^{-j\frac{2\pi}{N}4K} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(M-1)K}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)K} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(M-1)K} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)2K}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{F}_k=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ e^{-j\frac{2\pi}{N}k} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(K+k)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(2K+k)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}[(M-1)K+k]}\\ e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(K+k)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(2K+k)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2[(M-1)K+k]}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)k} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)(K+k)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)(2K+k)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(M-1)[(M-1)K+k]}\end{bmatrix},\tag{20}$$

$k=0,1,2,\cdots,K-1$ 因为 $N=K\times M$，式(19)等价为：

$$\boldsymbol{F}_0=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{M}} & e^{-j\frac{4\pi}{M}} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{M}(M-1)}\\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{M}} & e^{-j\frac{8\pi}{M}} & \cdots & e^{-j\frac{4\pi}{M}(M-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{M}(M-1)} & e^{-j\frac{4\pi}{M}(M-1)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{M}(M-1)^2}\end{bmatrix},\tag{21}$$

容易证明

$$\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{F}_0,\quad k=0,1,\cdots,K-1,\tag{22}$$

式中，

$$\boldsymbol{D}_k=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & e^{-j\frac{2k\pi}{N}} & & & \\ & & e^{-j\frac{4k\pi}{N}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{-j\frac{2(M-1)k\pi}{N}}\end{bmatrix},$$

$$k=0,1,\cdots,K-1,\tag{23}$$

依次取向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的第 $(iK+1)$ $(i=0,1,\cdots,M-1)$ 个元素构成向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}_0$，取向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的第 $(iK+2)$ $(i=0,1,\cdots,M-1)$ 个元素构成向量 $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots$，取 $\tilde{x}$ 的第 $(iK+M)$ $(i=0,1,\cdots,M-1)$ 个元素构成向量 $\tilde{x}_{M-1}$。就有

$$\hat{\boldsymbol{X}}_1=\frac{1}{N}\boldsymbol{A}_1^*\tilde{x}=\frac{1}{N}[F_0\quad F_1\quad\cdots\quad F_{K-1}]\begin{bmatrix}\tilde{x}_0\\ \tilde{x}_1\\ \vdots\\ \tilde{x}_{K-1}\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{K-1}F_k\tilde{x}_k=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{K-1}D_kF_0\tilde{x}_k,\tag{24}$$

上式中，每个 $F_0\tilde{x}_k(k=0,1,2,\cdots,M-1)$ 都可以用标准 M 点 FFT 来计算，而 $\boldsymbol{D}_k$ 是对角矩阵，所以，计算 $\hat{X}_1$ 可按下列步骤进行：

1) 计算 $\boldsymbol{\eta}_k=F_0\tilde{x}_k$，$M$ 点 FFT 运算，$k=0,1,2,\cdots,K-1$；

2) 计算 $\rho_k=D_k\times\boldsymbol{\eta}_k$，$k=0,1,2,\cdots,K-1$，共 $(K-1)\times(M-1)$ 次复数乘法，$K\times(M-1)$ 次复数加法；

3) 计算 $\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{K-1}\rho_k$，总共 $(K-1)$ 次复数加法，一次乘法。

上述新算法的总计算量是：复数乘法 $0.5KM\log_2M+(K-1)(M-1)$ 次，复数加法 $KM\log_2M+(K-1)M$ 次。在时域采样点数都是 $M\times M$ 点的前提下，用标准 FFT 的总计算量是：复数乘法 $0.5KM\log_2(KM)$ 次，复数加法 $KM\log_2(KM)$ 次。

如果 $K=M=32$，采样 1 024 个点，计算 0～31 次谐波，则标准 FFT 的总计算量是：复数乘法 5 120 次，复数加法 10 240 次；新算法的总计算量是：复数乘法 3 521 次，复数加法 6 149 次。同时，新算法在计算过程中只需暂存 32 个中间结果，而标准 FFT 在计算过程中需要暂存 1 024 个中间结果，仅此一项新算法就节省了近 1 000 个 RAM。此外，新算法只需采样一个信号周期的数据，实时性非常好。为了克服同步偏差，可以对采样序列“加窗”[6]或进行频谱校正[7]。

3 仿真研究

电力系统谐波分析信号模型如式(15)，$M=32$，$\nu(l)=R\times\text{randn}$，randn 是方差为 1 的高斯白噪声，$R$ 是实常数，信号各次谐波系数真值如表 1 的 A 行。

仿真 1：$R=0$，用新算法计算 $\hat{X}_1$，结果如表 1 的 B 行（限于篇幅只列出部分系数），结果表明：无噪声时新算法是正确的。仿真 2：$R=0.2$，$M=32$，$N=32\times32=1\ 024$，同时用标准 N 点 FFT 和新算法两种算法计算 $\hat{X}_1$，N 点 FFT 计算 1 024 个频点，取其低频段的 32 个值即为 $\hat{X}_1$，结果如表 1 的 C 行；新算法只计算 32 个频点，结果如表 1 的 D 行；结果表明：在要求的 32 个频点上，新算法与 FFT 的结果完全相同。

表 1　仿真结果

	ζ_0	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5	ζ_{15}	ζ_{24}	ζ_{31}
A	0.000	1.000	0.500 0	0.333 3	0.250 0	0.200 0	0.066 7	0.041 7	0.032 3
B	0.000 0 − 0.000 0i	1.000 0 − 0.000 0i	0.500 0 − 0.000 0i	0.333 3 − 0.000 0i	0.250 0 − 0.000 0i	0.200 0 − 0.000 0i	0.066 7 − 0.000 0i	0.041 7 − 0.000 0i	0.032 3 − 0.000 0i
C	0.005 5 + 0.000 0i	1.000 8 + 0.000 0i	0.496 1 + 0.002 5i	0.332 4 + 0.008 4i	0.249 8 − 0.009 4i	0.201 3 + 0.003 3i	0.071 9 − 0.002 9i	0.046 0 − 0.005 2i	0.030 7 − 0.006 4i
D	0.005 5 + 0.000 0i	1.000 8 + 0.000 0i	0.496 1 + 0.002 5i	0.332 4 + 0.008 4i	0.249 8 − 0.009 4i	0.201 3 + 0.003 3i	0.071 9 − 0.002 9i	0.046 0 − 0.005 2i	0.030 7 − 0.006 4i

4　结　论

在随机环境下,用 DFT 进行谐波分析是可行的,但 DFT 的含义有所变化,已经证明:时域采样序列 $\tilde{x}$ 与谐波系数的最小二乘估计 $\hat{X}$ 构成 DFT 对。如果 $\nu(t)$ 是方差为 σ^2 的白噪声,则 $\hat{X}$ 是 X 的一致无偏估计,并且估计方差是 σ^2/N。

要使谐波系数估计具有优良的的统计特性,必须增加时域采样点数($N >> M$),一种专用于 $N >> M$ 的新算法减少了 DFT 的计算量和 RAM 的使用量。电力系统谐波分析中的仿真验证了理论分析和算法的有效性。

参考文献:

[1] WANG MAOHAI, SUN YUANZHANG. A practical method to improve phasor and power measurement accuracy of DFT algorithm [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2006, 21(3):1054-1062.

[2] SEDLACEK MILOS, TITERA MICHAL. Interpolations in frequency and time domains used in FFT spectrum analysis [J]. Journal of the International Measurement Confederation, 1998, 23 (3): 185-193.

[3] JOHN G, PROAKIS, DIMITRIS G, et al. Digital signal processing: principles, algorithms, and applications (3rd Edition) [M]. [sl]:Prentice Hall PTR, 2004.

[4] BOUGUEZEL SAAD, AHMAD M, OMAIR, et al. Efficient pruning algorithms for the DFT computation for a subset of output samples [J]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2003(4): IV97-IV101.

[5] FAN CHIH-PENG, SU GUO-AN. Pruning fast Fourier transform algorithm design using group-based method [J]. Signal Processing, 2007 (11): 2781-2798.

[6] S KAY, D SMITH. An optimal sidelobeless window [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1999, 47 (9): 542-546.

[7] 王柏林. 频谱小偏差校正新方法[J]. 电力系统自动化, 2005 (20): 46-49.
WANG BO-LIN. Novel small synchronous error correction method in spectrum analysis [J]. Automation of Electric Power Systems, 2005(20) : 46-49.

[8] 杨文军,徐泳,王峰. 宽带雷达系统失真补偿信号的提取方法[J]. 现代雷达, 2006 (5): 8-11.
YANG WEN-JUN, XU YONG, WANG FENG. Compensation signal extraction for wideband radar system distortion [J]. Modern Radar, 2006, 28(5):8-11.

(编辑　陈移峰)

(上接第 157 页)

参考文献:

[1] 杨颖,李夔宁,童明伟. 小麦种子的真空冷冻干燥处理[J]. 重庆大学学报:自然科学版, 2002, 25(8):61-64.
YANG YING , LI KUI -NING, TONG MING-WEI. Lyophilization treatment of wheat seed[J]. Journal of Chongqing University :Natural Science Edition, 2002, 25(8):61-64.

[2] TASIRIN S M, KAMARUDIN S K, JAAFAR K, et al. The drying kinetics of bird's chillies in a fluidized bed dryer[J]. Journal of Food Engineering, 2007, 79:695-705.

[3] BULENT K, ADAN C V, JORGE W C. Drying of seeds in a superheated steam vacuum fluidized bed[J]. Journal of Food Engineering, 2006, 75:383-387.

[4] CHALIDA N, SAKAMON D. Drying kinetics and quality of coconut dried in a fluidized bed dryer[J]. Journal of Food Engineering, 2005, 66:267-271.

[5] SYAHRUL S, DINCER I, HAMDULLAHPUR F. Thermodynamic modeling of fluidized bed drying of moist particles[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2003, 42:691-701.

[6] HAJIDAYALLOO E, HAMDULLAHPUR F. Thermal analysis of a fluidized bed drying process for crops[J]. Energy Res, 2000, 24(9):791-807.

[7] 管国锋,赵汝. 化工原理[M]. 北京:化学工业出版社,2003.

[8] 方安平,叶卫平. Origin7.5 科技绘图及数据分析[M]. 北京:机械工业出版社,2006.

(编辑　张　苹)