

文章编号:1000-582X(2008)03-0339-05

## 拉压不同模量弯压柱的近似弹性力学解

何晓婷, 郑周练, 陈山林

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400030)

**摘 要:**通过合理简化模型,将不同模量弹性理论中定义在主坐标系下的本构关系重新建立在普通坐标系下,进行拉压分区,从而推导了考虑自重且顶部有水平推力的不同模量弯压柱近似弹性力学解答,并由横截面上正应力为零判定了中性层的形状和位置。研究表明:材料的不同模量以及剪应力的方向和大小对中性层的位置和形状具有一定影响。

**关键词:**拉压不同模量;弯压柱;弹性力学

中图分类号:O343.5

文献标志码:A

### Approximate Elasticity Solution of Bending-compression Column with Different Tension-compression Moduli

HE Xiao-ting, ZHENG Zhou-lian, CHEN Shan-lin

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)

**Abstract:** By simplifying the mechanical model, constitutive relation defined in principal direction based on elasticity theory with different moduli was rebuilt in common ordinates, and tension-compression area was divided. Therefore, we obtained approximate elasticity solution of bending-compression column with different moduli, which was based on its gravity and a horizontal subjected force on top. The configuration and position of neutral layer were determined from the principals of zero normal stress. The results suggest that different moduli, magnitude and direction of shear stress have influences on the configuration and position of the neutral layer of materials.

**Key words:** different tension-compression moduli; bending-compression column; elasticity

工程结构广泛存在着材料的不同模量弹性力学问题,材料具有拉压不同模量的弹性力学问题本质上是非线性问题<sup>[1]</sup>。由苏联学者阿姆巴尔楚米扬在 20 世纪 80 年代创立的不同模量弹性理论<sup>[2]</sup>,突破了传统理论关于弹性模量单一性的定义,提出了弹性模量不仅与材料的自身性质有关,而且取决于结构各点的应力状态,即弹性模量与结构的材料、形状、边界条件以及外荷载有关,是诸多因素所导致的非线性力学行为。

由于这一理论将其本构关系建立在主方向上,由主应力的正负判定柔度系数的选取,因此使得普

通坐标系下的广义弹性定律出现了与主应力及其方向余弦相关的非线性项,求解困难。研究者们对不同模量问题的解析法研究,一般都是引入某些假设以简化模型来获得解析解<sup>[3-4]</sup>。姚文娟等用流动坐标系及分段积分法导出了复合荷载作用下弯压柱的解析解<sup>[5-6]</sup>;姚文娟等对结构进行中性层判定的基础上,处理了平面复杂应力状态下的横力弯曲梁问题<sup>[7]</sup>。以上研究中的推导均利用微段隔离体平衡的传统模式,过程较为复杂。何晓婷等利用等效截面法简便获得了以上两类问题的解答<sup>[8]</sup>。然而上述研究均在平截面假设以及假定剪应力对中性层位置无

收稿日期:2007-10-31

基金项目:国家重大基础研究前期研究专项基金资助项目(2003CCA01500)

作者简介:何晓婷(1971-),女,重庆大学讲师,博士,主要从事不同模量弹性结构的研究,(Tel)023-65120898;

(E-mail) xiaotinghe@163.com。

影响的情况下得出的,基本求解方法仍局限在材料力学体系下。何晓婷等利用中性层处的应力连续条件求解了不同模量简支梁均布荷载下的近似弹性力学解,分析了平截面假设和不同模量带来的影响,将解析解的适用范围延伸到深梁的情形,但仍假设剪应力对中性层位置无贡献<sup>[9]</sup>。笔者以顶部有水平推力(即剪力存在)和自重作用下的弯压柱为研究对象,通过合理简化模型进行拉压分区,在中性层未定的情况下找到了近似弹性力学解答,分析了剪应力和材料不同模量对中性层的影响。

### 1 应力分量

设有矩形截面的不同模量弯压柱,顶部有压力  $N$  (作用在截面中心),弯矩  $M$  以及水平集中力  $P$  作用,体力  $f_x = \rho g, f_y = 0$ ,取单位宽度的柱为考查对象。由于考虑了材料的不同模量,使得仅在顶部弯矩  $M$  作用下的拉压分界点不再位于  $h/2$  处,顶部横截面受拉受压区的高度分别为  $h_1$  和  $h_2$ ,同时将坐标原点建立在这一分界点上,如图 1 所示。当压力  $N$  移至  $h_1$  和  $h_2$  分界处时,其大小不变,但由于静力等效柱顶所受弯矩应修正为  $M + N(h/2 - h_1)$ 。设想在压力以及自重的作用下,顶部的这一拉压分界点呈不断往左偏移的趋势,在到达柱底之前是否偏移出柱的截面之外,取决于弯矩、压力及自重之间的相对大小。现以未知的中性层为界,将截面分为两个区域,左面受拉右面受压,在这两个区域分别求解应力分量。

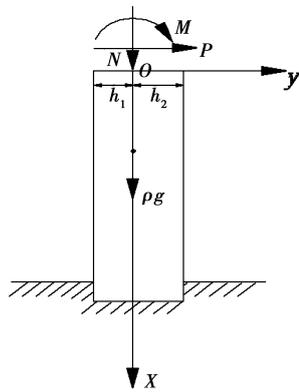


图 1 弯压柱计算简图

采用半逆解法<sup>[10]</sup>,由边界条件及外力情况假设  $\sigma_y = 0$ ,利用应力函数与应力分量之间的关系得到应力函数表达式  $\varphi = xf_1(y) + f_2(y)$ ,通过满足相容方程  $\nabla^4 \varphi = 0$  得到含待定常数的  $\varphi$  表达式为:  $\varphi = Axy^3 + Bxy^2 + Cxy + Dy^3 + Fy^2$ 。上述过程对拉压区完全一样,因此可求得拉压区的应力分量表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^+ &= 6A^+xy + 2B^+x + 6D^+y + 2F^+ - \rho gx, \\ \text{拉区: } \sigma_y^+ &= 0, \\ \tau_{xy}^+ &= -3A^+y^2 - 2B^+y - C^+; \\ \sigma_x^- &= 6A^-xy + 2B^-x + 6D^-y + 2F^- - \rho gx, \\ \text{压区: } \sigma_y^- &= 0, \\ \tau_{xy}^- &= -3A^-y^2 - 2B^-y - C^-。 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

式(1)(2)中,  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  表示应力分量,  $A, B, C, D, F$  为待定常数,带 + 号的表示与受拉区有关的量,带 - 号的则表示与受压区有关的量。确定拉压区的待定常数时,不仅要借用原来已有的边界条件,还要用到未知中性层处的应力连续条件,这与均布荷载作用下不同模量简支梁求解时基本思想一致<sup>[7]</sup>。

首先,在受拉区有两个主要的应力边界条件,即

$$y = -h_1, \sigma_y^+ = 0, \tau_{xy}^+ = 0, \quad (3)$$

第 1 个边界条件自动满足,将式(1)代入第 2 个条件可得

$$-3A^+h_1^2 + 2B^+h_1 - C^+ = 0. \quad (4)$$

同理,在受压区也有 2 个主要的应力边界条件,即

$$y = h_2, \sigma_y^- = 0, \tau_{xy}^- = 0, \quad (5)$$

将式(2)代入第 2 个边界条件可得

$$-3A^-h_2^2 - 2B^-h_2 - C^- = 0. \quad (6)$$

在柱顶部及  $x = 0$  处运用圣维南原理有(弯矩  $M$  有修正项)

$$\int_{-h_1}^0 \sigma_x^+ dy + \int_0^{h_2} \sigma_x^- dy = -N, \quad (7)$$

$$\int_{-h_1}^0 \sigma_x^+ y dy + \int_0^{h_2} \sigma_x^- y dy = -M - N(h/2 - h_1), \quad (8)$$

$$\int_{-h_1}^0 \tau_{xy}^+ dy + \int_0^{h_2} \tau_{xy}^- dy = -P. \quad (9)$$

现在,式(4)、(6) - (9)共 5 个条件不足以确定 10 个待定常数,需用到中性层处的应力连续条件。由于中性层的位置和形状未知,只能利用中性层上的某些特殊点满足一定的应力条件来找到待定常数之间的关系。

中性层与柱顶交界处的中性点上,弯矩  $M$ 、水平推力  $P$  和自重都不会产生竖直方向的正应力,仅有压力  $N$  产生,即

$$x = 0, y = 0, \sigma_x = -N/h, \quad (10)$$

将其代入式(1)(2)的第 1 式,可得

$$F^+ = F^- = -\frac{N}{2h}. \quad (11)$$

再来考察剪应力,由式(1)(2)的第 3 式看,剪应力仅与  $y$  有关,在  $y$  方向呈抛物线形式变化,在柱的左

右边缘最小,在柱的中部达到最大。因此可认为抛物线的顶点位于  $x$  轴上,即有

$$B^+ = B^- = 0. \quad (12)$$

同时,在  $x$  轴上的最大值为

$$y = 0, \tau_{xy} = -\frac{3P}{2h}, \quad (13)$$

将其代入式(1)(2)的第3式,可得

$$C^+ = C^- = \frac{3P}{2h}. \quad (14)$$

将式(14)运用于式(4)(6),可解得

$$A^+ = -\frac{P}{2hh_1^2}, A^- = -\frac{P}{2hh_2^2}. \quad (15)$$

将式(11)(12)(15)代入式(7)(8),可得

$$\left. \begin{aligned} D^+ h_1^2 + D^- h_2^2 &= 0, \\ D^+ h_1^3 + D^- h_2^3 &= -M/2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

又因为  $h_1 + h_2 = h$ ,得

$$D^+ = -\frac{M}{2hh_1^2}, D^- = -\frac{M}{2hh_2^2}. \quad (17)$$

端部的边界条件式(9)没有用到,将已确定的待定常数代入其中,自动满足。应力分量的最终表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^+ &= -\frac{3P}{hh_1^2}xy - \frac{3M}{hh_1^2}y - \frac{N}{h} - \rho gx, \\ \sigma_y^+ &= 0, \\ \tau_{xy}^+ &= \frac{3P}{2hh_1^2}y^2 - \frac{3P}{2h}; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^- &= -\frac{3P}{hh_2^2}xy - \frac{3M}{hh_2^2}y - \frac{N}{h} - \rho gx, \\ \sigma_y^- &= 0, \\ \tau_{xy}^- &= \frac{3P}{2hh_2^2}y^2 - \frac{3P}{2h}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

若取  $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ ,以上解答回归到同模量弯压柱的

应力解,即是

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{12P}{h^3}xy - \frac{12M}{h^3}y - \frac{N}{h} - \rho gx, \\ \sigma_y &= 0, \\ \tau_{xy} &= \frac{6P}{h^3}y^2 - \frac{3P}{2h}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

因而也从侧面验证了求解过程的正确性。

## 2 位移分量

由平面应力状态下的拉压区的物理方程和几何方程有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^+ &= \frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{1}{E^+}(\sigma_x^+ - \mu^+ \sigma_y^+), \\ \varepsilon_y^+ &= \frac{\partial v^+}{\partial y} = \frac{1}{E^+}(\sigma_y^+ - \mu^+ \sigma_x^+), \\ \gamma_{xy}^+ &= \frac{\partial v^+}{\partial x} + \frac{\partial u^+}{\partial y} = \frac{2(1+\mu^+)}{E^+}\tau_{xy}^+, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^- &= \frac{\partial u^-}{\partial x} = \frac{1}{E^-}(\sigma_x^- - \mu^- \sigma_y^-), \\ \varepsilon_y^- &= \frac{\partial v^-}{\partial y} = \frac{1}{E^-}(\sigma_y^- - \mu^- \sigma_x^-), \\ \gamma_{xy}^- &= \frac{\partial v^-}{\partial x} + \frac{\partial u^-}{\partial y} = \frac{2(1+\mu^-)}{E^-}\tau_{xy}^-, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式(21)(22)中,  $E^+, \mu^+, E^-, \mu^-$  分别为拉压弹性模量和泊松比;  $u^+, v^+, u^-, v^-$  分别为拉压区的位移分量;  $\varepsilon_x^+, \varepsilon_y^+, \gamma_{xy}^+, \varepsilon_x^-, \varepsilon_y^-, \gamma_{xy}^-$  分别为拉压区的应变分量。

先求受拉区的位移分量  $u^+, v^+$ 。将式(18)代入式(21)的第1式,有

$$\frac{\partial u^+}{\partial x} = -\frac{1}{E^+} \left( \frac{3P}{hh_1^2}xy + \frac{3M}{hh_1^2}y + \frac{N}{h} + \rho gx \right),$$

对  $x$  积分一次,得到

$$u^+ = -\frac{1}{E^+} \left( \frac{3P}{2hh_1^2}x^2y + \frac{3M}{hh_1^2}xy + \frac{N}{h}x + \frac{\rho g}{2}x^2 \right) + f_1(y). \quad (23)$$

其中,  $f_1(y)$  为待定函数。同理,将式(18)代入式(21)的第2式,有

$$\frac{\partial v^+}{\partial y} = \frac{\mu^+}{E^+} \left( \frac{3P}{hh_1^2}xy + \frac{3M}{hh_1^2}y + \frac{N}{h} + \rho gx \right),$$

对  $y$  积分一次,得到

$$v^+ = \frac{\mu^+}{E^+} \left( \frac{3P}{2hh_1^2}xy^2 + \frac{3M}{2hh_1^2}y^2 + \frac{N}{h}y + \rho gxy \right) + f_2(x). \quad (24)$$

其中,  $f_2(x)$  为待定函数。将式(23)(24)代入式(21)的第3式,分离变量整理得

$$\begin{aligned} &\frac{df_2(x)}{dx} - \frac{3P}{2E^+ h_1^2 h}x^2 - \frac{3M}{E^+ h_1^2 h}x = \\ &-\frac{df_1(y)}{dy} + \frac{3(2+\mu^+)P}{2E^+ h_1^2 h}y^2 - \frac{\mu^+ \rho g}{E^+}y - \frac{3(1+\mu^+)P}{E^+ h}, \end{aligned}$$

令上式左右两端等于待定常数  $\omega^+$ ,则左端对  $x$  积分可得

$$f_2(x) = \frac{P}{2E^+ h_1^2 h}x^3 + \frac{3M}{2E^+ h_1^2 h}x^2 + \omega^+ x + v_0^+. \quad (25)$$

同理,右端对  $y$  积分可得

$$f_1(y) = \frac{(2+\mu^+)P}{2E^+ h_1^2 h}y^3 - \frac{\mu^+ \rho g}{2E^+}y^2 -$$

$$\frac{3(1+\mu^+)P}{E^+h}y - \omega^+y + u_0^+ \quad (26)$$

式(25)(26)中的  $\omega^+, u_0^+, v_0^+$  为刚体位移项。设柱高为  $H$ , 利用弯压柱底部的约束条件有

$$x = H, y = 0, u^+ = v^+ = 0; \quad (27)$$

$$x = H, y = 0, \frac{\partial v^+}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

将式(27)(28)代入式(23)(24)并结合式(25)(26)后,求得刚体位移项为

$$u_0^+ = \frac{NH}{E^+h} + \frac{\rho g H^2}{2E^+}, \quad (29)$$

$$v_0^+ = \frac{PH^3}{E^+h_1^2h} + \frac{3MH^2}{2E^+h_1^2h}, \quad (30)$$

$$\omega^+ = -\frac{3PH^2}{2E^+h_1^2h} - \frac{3MH}{E^+h_1^2h} \quad (31)$$

最后得到受拉区位移分量的最后表达式

$$\left. \begin{aligned} u^+ &= \frac{P}{2E^+h_1^2h} [3(H^2 - x^2)y + (2 + \mu^+)y^3] + \\ &\frac{\rho g}{2E^+} (H^2 - x^2 - \mu^+y^2) - \frac{3M}{E^+h_1^2h} (x - H)y - \\ &\frac{N}{E^+h} (x - H) - \frac{3(1 + \mu^+)P}{E^+h} y, \\ v^+ &= \frac{P}{2E^+h_1^2h} [x^3 + 3(\mu^+y^2 - H^2)x + 2H^3] + \\ &\frac{3M}{2E^+h_1^2h} [(x - H)^2 + \mu^+y^2] + \frac{\mu^+}{E^+} \left( \frac{N}{h} + \rho g x \right) y. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

同理,利用式(19)得到受压区的位移分量表达式

$$\left. \begin{aligned} u^- &= \frac{P}{2E^-h_2^2h} [3(H^2 - x^2)y + (2 + \mu^-)y^3] + \\ &\frac{\rho g}{2E^-} (H^2 - x^2 - \mu^-y^2) - \frac{3M}{E^-h_2^2h} (x - H)y - \\ &\frac{N}{E^-h} (x - H) - \frac{3(1 + \mu^-)P}{E^-h} y, \\ v^- &= \frac{P}{2E^-h_2^2h} [x^3 + 3(\mu^-y^2 - H^2)x + 2H^3] + \\ &\frac{3M}{2E^-h_2^2h} [(x - H)^2 + \mu^-y^2] + \frac{\mu^-}{E^-} \left( \frac{N}{h} + \rho g x \right) y. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

上式(31)(32)在  $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$  时能回退到同模量情形下的表达式。

### 3 中性层的判定

在式(18)(19)中令  $\sigma_x = 0$  得到中性层的方程

$$\text{拉区: } \frac{3P}{hh_1^2}xy + \frac{3M}{hh_1^2}y + \frac{N}{h} + \rho g x = 0; \quad (33)$$

$$\text{压区: } \frac{3P}{hh_2^2}xy + \frac{3M}{hh_2^2}y + \frac{N}{h} + \rho g x = 0. \quad (34)$$

式(33)(34)在同模量情况下(即令  $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ )简化为

$$-\frac{12P}{h^3}xy - \frac{12M}{h^3}y - \frac{N}{h} - \rho g x = 0 \quad (35)$$

可以看出,不管对于单一模量问题还是拉压不同模量问题,顶部集中力  $P$  的存在即剪应力参与了中性层的确定。由式(33)(34)知,拉压区确定的中性层仅仅是  $h_1, h_2$  的不同造成的。 $h_1, h_2$  是纯弯情况下拉压区的截面高度,其大小为

$$h_1 = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}h, h_2 = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}h \quad (36)$$

其中,  $n = E^-/E^+$  为模量比值,  $h$  为截面高度。中性层除了与外部荷载有关,就仅仅与截面高度和模量比有关。当  $n \rightarrow 1/n$  时,  $h_1 \rightarrow h_2$ , 也就是说模量比为  $n$  情形下受拉确定的中性层恰好为模量比为  $1/n$  情形下受压确定的中性层。

### 4 算例与结论

假设现有混凝土构成的矩形弯压柱,截面高 0.6 m,柱高 4.5 m。顶部所受的荷载分别是:压力  $N = 210$  kN,弯矩  $M = 264$  kN·m 以及向右的水平集中力  $P = 50$  kN,柱的自重  $\rho g = 25$  kN/m<sup>3</sup>,如图 1 所示。考虑不同模量时取  $n = 1, 2, 3, 4$  计算,同时考虑水平集中力  $P$  向左的情形(即取为  $-P$ ),画出中性层曲线如图 2 和 3 所示。有如下结论:

1)从解析表达式看,弯压柱中性层是一条中心不在原点的双曲线;从图形看这一特征是比较明显的,尤其是水平集中力向左的情形(如图 3)。

2)拉压模量相等时即  $n = 1$  情形下的中性层,位于拉区和压区应力分量所确定的中性层之间。

3)尽管由  $\sigma_x^+ = 0, \sigma_x^- = 0$  确定的拉压中性层没有完全重合,但是二者的差别有时较小。对于  $P$  向右( $P > 0$ )的情形,拉压区中性层的差别几乎是等间距变化,曲线较为平缓,最大差别在柱顶部,  $n = 2, 3, 4$  时,拉压区中性层的差值与截面高度之比分别为 2.72%, 4.26%, 5.30%, 这一误差在工程计算时可以不予考虑;对于  $P$  向左( $P < 0$ )的情形,拉压区中性层的曲线较为陡峭,尤其是在柱的底部,中性层实际已偏离出柱截面之外,在距柱顶 4 m 处,  $n = 2, 3, 4$  时,中性层的相对误差分别为 14.49%, 22.61%, 28.13%, 与  $P > 0$  的情形相比,误差较大。可见柱顶部水平集中力的方向会影响中性层的偏差,同时模量相差越大,误差越大。

4)考虑水平集中力  $P$  的存在实质是考虑了剪

应力对中性层的影响,分  $P > 0$  和  $P < 0$  两种情形是考虑了剪应力的方向对中性层的影响,可见中性层的形状和位置不仅取决于外部荷载以及截面尺寸,

同时还取决于剪应力的大小方向和拉压不同模量之间的相对比值。

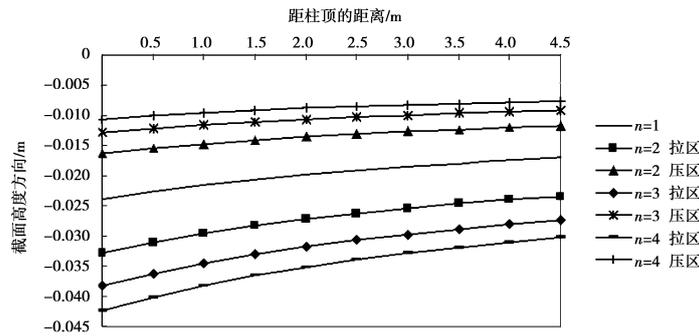


图2 弯压柱的中性层 ( $P$  向右)

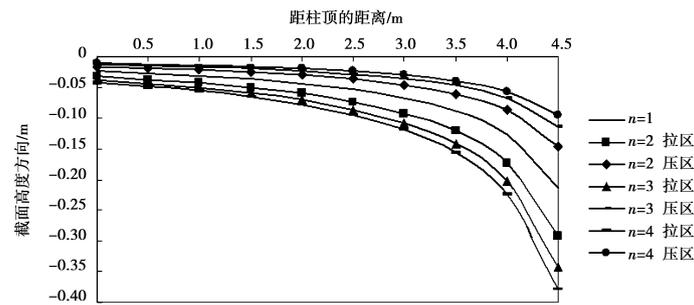


图3 弯压柱的中性层 ( $P$  向左)

参考文献:

[1] MEDRI G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression [J]. Transactions of the ASME, 1982,26 (104):26-28.

[2] 阿姆巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论[M]. 邬瑞锋,张允真,译. 北京:中国铁道出版社,1986.

[3] 叶志明,陈彤,姚文娟. 不同模量弹性问题理论及有限元法研究进展[J]. 力学与实践,2004,26(2): 9-14. YE ZHI-MING, CHEN TONG, YAO WEN-JUAN. Progresses in elasticity theory with different modulus in tension and compression and related FEM [J]. Mechanics in Engineering, 2004,26(2): 9-14.

[4] 何晓婷,陈山林. 不同模量弹性力学问题研究进展[J]. 重庆建筑大学学报,2005,27(6):136-141. HE XIAO-TING, CHEN SHAN-LIN. Study progresses in elasticity problem with different modulus [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2005,27(6):136-141.

[5] YAO WEN-JUAN, YE ZHI-MING. Analytical solution of bending-compression column using different tension-compression modulus [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004,25(9): 983-993.

[6] 姚文娟,叶志明. 不同模量理论挡土墙结构解析解及数值解[J]. 上海交通大学学报,2004,38(6): 1022-1027.

YAO WEN-JUAN, YE ZHI-MING. The analytical and numerical solution of retaining wall based on elastic theory of different modulus [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004,38(6): 1022-1027.

[7] YAO WEN-JUAN, YE ZHI-MING. Analytical solution for bending beam subject to lateral force with different modulus [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004,25(10): 1107-1117.

[8] HE XIAO-TING, CHEN SHAN-LIN, SUN JUN-YI. Applying the equivalent section method to solve beam subjected lateral force and bending-compression column with different moduli [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2007,49(7): 919-924.

[9] 何晓婷,陈山林,孙俊贻. 不同模量简支梁均布荷载下的弹性力学解[J]. 工程力学, 2007,24(10): 51-56. HE XIAO-TING, CHEN SHAN-LIN, SUN JUN-YI. Elasticity solution of simple beams with different modulus under uniformly distributed load [J]. Engineering Mechanics, 2007,24(10): 51-56.

[10] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,1990.

(编辑 赵静)