

文章编号:1000-582X(2008)05-0577-04

圆板中摩尔-库仑准则的内力屈服条件

刘 东, 蒋朝志

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400030; 2. 中建西南院, 四川 成都 610081)

摘 要:对具有拉压强度差效应材料构成的轴对称弯曲圆板在弹塑性阶段应力分布的研究, 导出了塑性极限状态下圆板中塑性应力分量间的关系式。以不同受力状态下圆板单元体进入塑性极限状态时的内力分析为基础, 建立了圆板在摩尔-库仑准则基础上用弯矩表示的内力屈服条件。该内力屈服条件是一条闭合的外凸曲线, 符合内力分量的对称性, 在材料拉压强度相同时蜕化为屈雷斯卡内力屈服条件。所得内力屈服条件可以用于由拉压强度不同材料构成的圆板和环板的塑性极限分析。

关键词:圆板; 摩尔-库仑准则; 内力屈服条件

中图分类号:TU311

文献标志码:A

Generalized yield condition of bended circular plate respect to Mohr-Coulomb criterion

LIU Dong¹, JIANG Chao-zhi²

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China;

2. China Southeast Architectural Design and Research Institute, Chengdu 610081, P. R. China)

Abstract: By analyzing stress in the elastic-plastic stage of axisymmetric bent circular plates with different tensile and compressive strengths, the relationships of the stress components are derived. On the basis of the Mohr-Coulomb yield criterion, an internal force yield condition expressed by the bent moment is deduced by analyses of the internal forces of plate unit in differing forced states. The internal force yield condition is a close and convex curve and can correspond to the symmetry of internal force. The internal force yield condition can be applied in the plastic limit analysis of circular and annular plates formed by materials with varying tensile and compression strengths.

Key words: plate; Mohr-Coulomb criterion; internal force yield condition

板壳结构是工程中广泛应用的一种结构形式。当材料拉压强度相同时, 此类结构的塑性极限分析已获得了较好的解决, 在工程设计理论中以塑性极限分析为基础来进行结构设计已为设计部门所采用^[1]。如考虑材料的 SD 效应(材料的拉压强度差效应), 板壳结构的塑性极限分析将更加复杂, 已受到学者们的关注^[2-12]。在已有考虑材料 SD 效应

板壳结构的的塑性极限分析文献中, 或者是直接用应力形式的屈服准则进行分析, 或者是采用与应力屈服条件具有相同几何特征的广义内力屈服条件进行分析。笔者通过对圆板在弹塑性状态下的应力分布的分析, 建立了塑性极限状态下各应力分量的关系, 在材料刚塑性假设基础上导出了摩尔-库仑准则的内力屈服条件。为具有 SD 效应材料构成的园板

收稿日期:2007-12-21

基金项目:重庆市自然科学基金资助项目(CSTC, 2007bb0122)

作者简介:刘东(1959-), 男, 重庆大学教授, 主要从事结构非线性力学行为的研究, (E-mail)liudong@cqu.edu.cn。

欢迎访问重庆大学期刊网 <http://qks.cqu.edu.cn>

及环板结构的塑性极限分析提供了一个新的理论方法和分析途径。

1 摩尔-库仑准则

在平面应力状态下,以主应力形式表示的摩尔-库仑准则^[2]为

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \sigma_3 = \sigma_t, \quad (1)$$

其中: σ_t 与 σ_c 分别为材料的抗拉和抗压屈服强度。摩尔-库仑准则在平面应力状态 $(\sigma_r, \sigma_\theta)$ 时的屈服线如图 1 所示。

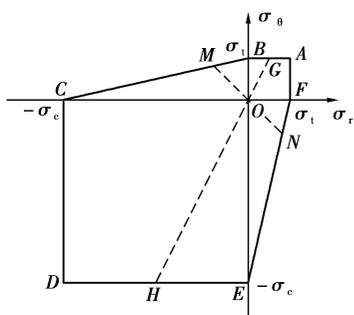


图 1 平面应力下的摩尔-库仑准则

对材料具有 SD 效应的轴对称弯曲圆板,根据薄板弯曲理论的基本假设^[13],薄板处于平面应力状态,可用式(1)给出的摩尔-库仑准则进行塑性极限分析。

2 塑性极限状态时的应力分布

受弯圆板在荷载不断增加的过程中,总是某截面的上表面或下表面先进入屈服。随着荷载的增大,上下表面处的塑性区域逐渐向中间靠拢,在这个过程中径向和环向的中和轴处在中间的弹性区域。随着塑性的发展,中间弹性区域逐渐减小,直到该截面上下塑性区域连通,弹性区域收缩为一应力间断线,这时径向和环向应力的中和轴必然处在同一高度上。当材料的拉压强度不同时,塑性极限状态下板中上下屈服区域的分界将不再是板厚度的中心。根据受压区和受拉区的内力平衡条件可以确定出板的横截面上的拉压区分界线。

假设板厚为 $2h$,并设当板的某个截面进入塑性极限状态时应力间断点到板下表面和上表面的距离分别为 x_h 、 y_h ,采用刚塑性变形模型,取应力间断点以下沿高度不变的应力为 $(\sigma_r, \sigma_\theta)$,应力间断点以上沿高度不变的应力为 $(\sigma_r^u, \sigma_\theta^u)$,如图 2 所示(应力以受拉为正,受压为负)。

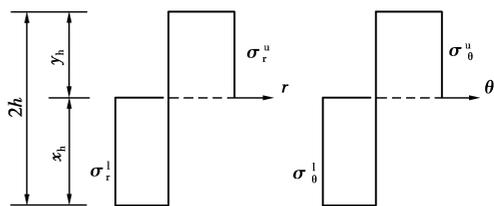


图 2 全截面屈服时的应力

由平衡条件可知

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^l x_h + \sigma_r^u y_h &= 0, \\ \sigma_\theta x_h + \sigma_\theta y_h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由式(2)得

$$\frac{\sigma_\theta^l}{\sigma_r^l} = \frac{\sigma_\theta^u}{\sigma_r^u}, \quad (3)$$

式(3)表明:在板的某一截面处于塑性极限状态时,应力间断点以下的应力点 $(\sigma_r^l, \sigma_\theta^l)$ 、应力间断点以上的应力点 $(\sigma_r^u, \sigma_\theta^u)$ 以及坐标原点在应力平面中处于同一条直线上,如图 1 中的 GOH 线。

3 轴对称弯曲圆板的内力屈服条件

设板内单位长度的径向弯矩和环向弯矩分别为 M_r 和 M_θ (规定下侧受拉为正,上侧受拉为负)。根据板单元所受弯矩的符号的不同将其分为 3 种情况讨论。

3.1 板单元受同号正弯矩作用

板单元受同号正弯矩作用时,板下侧为双拉应力状态,上侧为双压应力状态(如图 3 所示)。

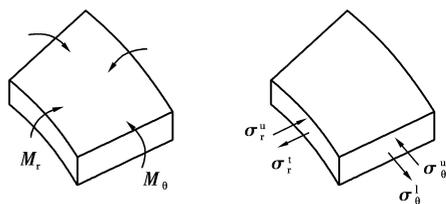


图 3 受同号正弯矩的单元体

当此类板单元屈服时,有

1) $\sigma_\theta^l > \sigma_r^l > 0$ 时,(图 1 中的 AB 段)

由式(3)知,该单元屈服时板上侧应力点 $(\sigma_r^u, \sigma_\theta^u)$ 应处于图 1 中屈服线 DE 段,其值由下面方程组确定

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\theta^u}{\sigma_r^u} &= \frac{\sigma_\theta^l}{\sigma_r^l}, \\ \sigma_\theta^u &= -\sigma_c. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

求解方程(4)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^u &= -\frac{\sigma_r^l}{\sigma_\theta^l} \sigma_c, \\ \sigma_\theta^u &= -\sigma_c. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

应力间断点位置由以下方程组确定

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^1 x_h + \sigma_r^u y_h &= 0, \\ x_h + y_h &= 2h. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(5)中第 1 式代入式(6),解得

$$\left. \begin{aligned} x_h &= \frac{2h\sigma_c}{\sigma_\theta^1 + \sigma_c}, \\ y_h &= \frac{2h\sigma_\theta^1}{\sigma_\theta^1 + \sigma_c}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

从而,径向弯矩 M_r 和环向弯矩 M_θ 为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{1}{2}\sigma_r^1 x_h^2 - \frac{1}{2}\sigma_r^u y_h^2 = \frac{2h^2\sigma_c\sigma_r^1}{\sigma_\theta^1 + \sigma_c} \\ M_\theta &= \frac{1}{2}\sigma_\theta^1 x_h^2 - \frac{1}{2}\sigma_\theta^u y_h^2 = \frac{2h^2\sigma_c\sigma_\theta^1}{\sigma_\theta^1 + \sigma_c} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

联立求解式(8)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^1 &= \frac{\sigma_c M_r}{2h^2\sigma_c - M_\theta}, \\ \sigma_\theta^1 &= \frac{\sigma_c M_\theta}{2h^2\sigma_c - M_r} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将式(9)代入屈服线 AB 段的方程 $\sigma_\theta = \sigma_t$, 可得

$$M_\theta = \frac{2h^2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \quad (10)$$

2) $\sigma_r^1 > \sigma_\theta^1 > 0$ 时,(图 1 中的 AF 段)

同理可得该种情况由弯矩表达的屈服条件为

$$M_r = \frac{2h^2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}. \quad (11)$$

3.2 板单元受同号负弯矩作用

板单元受负弯矩作用时,板下侧为双压应力状态,上侧为双拉应力状态,该种情况与 3.1 只是相差一个负号,此类板单元屈服时,由弯矩表达的屈服条件为

1) $\sigma_r^1 < \sigma_\theta^1 < 0$ 时,(图 1 中的 CD 段)

$$M_r = -\frac{2h^2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}. \quad (12)$$

2) $\sigma_\theta^1 < \sigma_r^1 < 0$ 时,(图 1 中的 DE 段)

$$M_\theta = -\frac{2h^2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}. \quad (13)$$

3.3 板单元受异号弯矩作用

板单元受异号弯矩作用时,板上侧和下侧均为拉压应力状态,当此类板单元屈服时,有

1) $\sigma_r^1 < 0, \sigma_\theta^1 > 0$ 时,板单元受力情况如图 4 所示。

此时,应力点 $(\sigma_r^1, \sigma_\theta^1)$ 处于图 1 的 BC 段上,板上侧应力点 $(\sigma_r^u, \sigma_\theta^u)$ 应处于图 1 中屈服线 EF 段上,其值由以下方程组确定

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\theta^u}{\sigma_r^u} &= \frac{\sigma_\theta^1}{\sigma_r^1}, \\ \sigma_r^u - \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\sigma_\theta^u &= \sigma_t. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

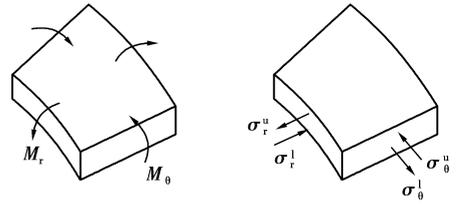


图 4 受异号弯矩的单元体

求解方程(14)得

$$\sigma_r^u = \frac{\sigma_c\sigma_t\sigma_r^1}{\sigma_c\sigma_r^1 - \sigma_t\sigma_\theta^1}, \quad \sigma_\theta^u = \frac{\sigma_c\sigma_t\sigma_\theta^1}{\sigma_c\sigma_r^1 - \sigma_t\sigma_\theta^1}. \quad (15)$$

应力间断点位置由以下方程组确定

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^1 x_h + \sigma_r^u y_h &= 0, \\ x_h + y_h &= 2h. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式(15)的第 1 式代入式(16),解得

$$\left. \begin{aligned} x_h &= \frac{2h\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c\sigma_r^1 - \sigma_t\sigma_\theta^1 - \sigma_c\sigma_t}, \\ y_h &= \frac{2h(\sigma_c\sigma_r^1 - \sigma_t\sigma_\theta^1)}{\sigma_c\sigma_r^1 - \sigma_t\sigma_\theta^1 - \sigma_c\sigma_t}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

从而,单位长度的径向弯矩 M_r 和环向弯矩 M_θ 分别为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{1}{2}\sigma_r^1 x_h^2 - \frac{1}{2}\sigma_r^u y_h^2 = \frac{-2h^2\sigma_c\sigma_t\sigma_r^1}{\sigma_c\sigma_r^1 - \sigma_t\sigma_\theta^1 - \sigma_c\sigma_t}, \\ M_\theta &= \frac{1}{2}\sigma_\theta^1 x_h^2 - \frac{1}{2}\sigma_\theta^u y_h^2 = \frac{-2h^2\sigma_c\sigma_t\sigma_\theta^1}{\sigma_c\sigma_r^1 - \sigma_t\sigma_\theta^1 - \sigma_c\sigma_t}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由式(18)解出 σ_r^1 和 σ_θ^1 , 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^1 &= \frac{\sigma_c\sigma_t M_r}{\sigma_c M_r - \sigma_t M_\theta + 2h^2\sigma_c\sigma_t}, \\ \sigma_\theta^1 &= \frac{\sigma_c\sigma_t M_\theta}{\sigma_c M_r - \sigma_t M_\theta + 2h^2\sigma_c\sigma_t}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将式(19)代入屈服线 BC 段的方程, $\sigma_\theta - \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\sigma_r = \sigma_t$, 可得

$$M_\theta - M_r = \frac{2h^2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}. \quad (20)$$

2) $\sigma_r^1 > 0, \sigma_\theta^1 < 0$ 时。

当 $\sigma_r^1 < 0, \sigma_\theta^1 > 0$ 时,板单元的受力情况只是在 1) $\sigma_r^1 < 0, \sigma_\theta^1 > 0$ 的基础上将 r 与 θ 互换,其对应的弯矩表达的屈服条件为

$$M_\theta - M_r = -\frac{2h^2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}. \quad (21)$$

综上所述,对称弯曲圆板在摩尔-库仑准则下的内力屈服条件由式(10)、(11)、(12)、(13)、(20)和(21)组成。如令 $M_0 = \frac{2h^2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}$, 导出的内力屈服条件可写为

$$m_i M_\theta + n_i M_r = M_0. \quad (22)$$

其中 $m_i, n_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 为系数,其值见表 1。在

$M_r - M_\theta$ 平面上的屈服线形状如图 5 所示。

表 1 系数 m_i, n_i 的值

i	m_i	n_i
1	1	0
2	0	1
3	0	-1
4	-1	0
5	1	-1
6	-1	1

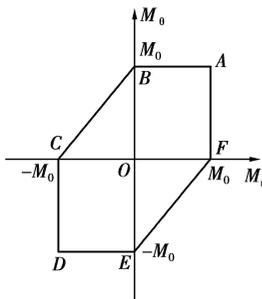


图 5 轴对称弯曲圆板在摩尔-库仑准则下的内力屈服条件

从图 5 可以看出,该内力屈服线是一条闭合的外凸曲线。整个屈服线关于轴 $M_\theta = M_r$ 和轴 $M_\theta = -M_r$ 对称,这与 M_r 和 M_θ 的对称性是相符合的。另外,该曲线与屈雷斯卡屈服条件很相似,只是各折点处的坐标值不同,当 $\sigma_c = \sigma_t$ 即材料拉压强度相同时,导出的内力屈服条件与由弯矩表示的屈雷斯卡屈服条件^[2]完全相同。

4 结 语

导出了对称受弯圆板在摩尔-库仑准则下的内力屈服条件,如式(22)。所得的内力屈服条件形式简洁、且继承了摩尔-库仑条件的优点,可以用于由拉压强度不同材料形成的圆板和环板的塑性极限分析。

参考文献:

- [1] 李建国. 压力容器设计的力学基础及其标准应用[M]. 北京:机械工业出版社,2004.
- [2] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,1998.
- [3] MA G W, IWASAKI H. Unified plastic limit analysis of circular plates under arbitrary load [J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, 66(2):2-9.
- [4] GHORASHI M. Limit analysis of circular plates subjected

to arbitrary rotational symmetric loadings [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1994, 36(2):87-94.

- [5] 冯剑军,张俊彦,张平,等. 在复杂应力状态下厚壁圆筒的极限分析[J]. 工程力学,2004,21(5):188-192.
FENG JIAN-JUN, ZHANG JUN-YAN, ZHANG PING. Limit analysis of thick-walled tubes in complex stress state[J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(5): 188-192.
- [6] 李自林,周书敬,屈均利. 用莫尔-库仑准则对厚壁球的极限分析[J]. 应用力学学报,2000,17(2):90-93.
LI ZI-LIN, ZHOU SHU-JING, QU JUN-LI. The limit analysis of thick hollow sphere applying Coulomb-Mohr yield criterion[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000, 17(2):90-93.
- [7] GHORASHI M, DANESHPAZHOOH M. Limit analysis of variable thickness circular plates [J]. Computers and Structures, 2001,79:461-468.
- [8] ARYANPOUR M, GHORASHI M. Load carrying capacity of circular and annular plates using an arbitrary yield criterion[J]. Computers and Structures, 2002,80: 1757-1762.
- [9] 王延斌,俞茂宏,魏学英,等. 环形均布荷载作用下简支圆板的塑性极限分析[J]. 工程力学,2002,19(1): 84-87.
WANG YAN-BIN, YU MAO-HONG, WEI XUE-YING, XIAO YUN. Unified plastic limit analysis of circular plates under uniform annular load [J]. Engineering Mechanics, 2002,19(1):84-88.
- [10] 魏学英,俞茂宏,王延斌,等. 考虑材料拉压异性的固支圆板塑性极限统一解[J]. 力学季刊,2001,22(1): 78-83.
WEI XUE-YING, YU MAO-HONG, WANG YAN-BIN, et al. Unified plastic limit of clamped circular plate with strength differential effect in tension and compression[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2001, 22(1):78-83.
- [11] 刘信声,张乘柱. 圆板中摩尔-库仑准则的弯矩表达[J]. 上海力学,1995,16(2):158-162.
LIU XIN-SHENG, ZHANG CHENG-ZHU. An expression of moment in Mohr-Coulomb criterion for circular plates [J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1995, 16(2):158-162.
- [12] 徐乘业,刘信声. 结构塑性极限分析[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1985.
- [13] 黄克智. 板壳理论[M]. 北京:清华大学出版社,1987.

(编辑 赵 静)