文章编号:1000-582X(2008)06-0677-06

层状岩质边坡失稳的尖点突变模型

姜永东¹,鲜学福¹,杨 钢²,周军平¹

(1. 重庆大学 西南资源开发及环境灾害控制工程教育部重点实验室,重庆 400030;

2. 重庆教育学院, 重庆 400067)

摘 要:根据含软弱夹层层状岩质边坡失稳的特点,建立了边坡地质力学模型,考虑内外环境 因素对边坡稳定性的影响,建立了完善的边坡失稳尖点突变模型,分析得到了边坡系统发生突变的 必要条件。边坡在与外界进行物质和能量的交换过程中,其内外环境的变化导致突变模型中控制 变量改变,边坡可能不会滑坡,也可能发生快速和慢速蠕滑,从而形成复杂的演化特征。研究结果 加深了对滑坡成因的认识,揭示了应用突变理论研究边坡失稳现象是可行性。

A cusp catastrophe model study of destabilization of soft sandwich-rock slope

JIANG Yong-dong¹, XIAN Xue-fu¹, YANG Gang², ZHOU Jun-ping¹

(1. Key Laboratory of Exploitation of Southwest Resources and Environmental Disaster Control Engineering, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400030,P. R. China; 2. Chongqing Education College, Chongqing 400067, P. R. China)

Abstract: A slope geomechanical model was proposed based on the destabilization characteristics of soft sandwich-rock slopes. Based on an analysis of the effects of internal-external factors on slope stability, the cusp catastrophe model of slopes can be employed to analyze and predict the necessary conditions leading to slope catastrophes. During the processing of the mass and energy exchange with the external, this may lead to the change of controlling variables. Slides or quick or slow creeping thus may take place due to environmental complexity. This work helps deepen understanding of the formation of landslides and makes feasible the applcation of the catastrophe model to slope destabilization investigations. **Key words**: sandwich-rock slope; slope creeping; cusp catastrophe model

边坡按物质组成可分为岩质边坡和和土质边 坡,按人工改造程度可分为自然边坡和人工边坡,它 是岩石圈表面受天然地质和工程地质的作用,具有 侧向临空面的地质体^[1]。且边坡是一个开放的、复 杂的耗散结构非线性系统,始终存在着与外界环境 进行物质和能量交换,因此边坡岩体失稳的力学行 为实际上是非线性的、动态的、不可逆的一个演化过 程^[2-4]。影响边坡稳定性因素有很多,但总的可以归 纳为2方面^[5-6]。1)边坡岩土体的内因,即岩土体强 度、岩土体结构面、地应力、边坡外形特征等;2)外

收稿日期:2008-01-18

基金项 目:国家自然科学基金重点项目(50334060);重庆市院士基金项目(6592);重庆大学博士基金项目 (0903005104903)

作者简介:姜永东(1977-),男,重庆大学博士,主要从事岩石力学与工程、采矿工程方向的研究,(Tel)13594096490; (E-mail)jiangyd1015@163.com。

因,如地少水、爆破振动等。根据大量的滑坡实例证 明:因地下水的影响产生的滑坡占 90%以上,充分 说明水是影响边坡稳定性的重要因素之一。根据含 软弱夹层层状岩质边坡失稳的特点,建立边坡地质 力学模型,考虑内外环境因素对边坡稳定性的影响, 建立了完善的边坡突变理论模型,分析了边坡的稳 定性和演化过程。

1 层状岩质边坡的尖点突变模型

1.1 力学模型

文献[7-9]研究认为:对于实际的边坡,滑动面 是非均质的,滑动面上的剪应力不可能同时达到峰 值。应用文献「7-9]建立的力学模型,该模型考虑了 边坡的非均质性,即:假设滑动面为一非均质的软弱 夹层,如图1所示,岩体为刚体,边坡高度为H,边坡 角为 α ,滑动面的倾角为 β ,软弱夹层的厚度为h,上 部岩体的重量为 Mg(g 为重力加速度),在岩体自重 作用下沿软弱夹层产生的蠕滑位移为u。根据实 际,在软弱夹层某些区段,由于介质强度高或所受剪 应力小,此区段介质具有弹性或应变硬化性质,其变 形随剪应力的增大而增大;而在另一些区段或边坡 脚处,由于介质破碎,水的软化作用或受剪应力大, 此区段介质具有应变弱化性质,其变形随剪应力增 大而减小。所以将两个区段看成是具有弹性性质和 应变弱化性质的介质组成。两区段介质的剪应力与 变形的关系如图2所示。

弹性区段介质的本构关系为

$$\tau_1 = G_1 \frac{u}{h} (u \leqslant u_1), \tau_1 = \tau_m(u > u_1), \quad (1)$$

其中:τ₁为弹性段介质的剪应力;G₁为弹性段介质 的剪切模量;u₁为剪应力峰值点对应的位移;τ_m为 弹性段介质的残余抗剪强度。

应变弱化区段介质的本构关系为

$$\tau_2 = G_2 \frac{u}{h} \mathrm{e}^{-\frac{u}{u_2}}, \qquad (2)$$

其中:τ₂ 为弱化段介质的剪应力;G₂ 为弱化段介质 的剪切模量;u₂ 为剪应力峰值点对应的位移。

对式(2)求 $\frac{d^2\tau_2}{du^2}=0$,可以确定应变软化介质区 段剪应力与变形曲线拐点。其位移量为 2*u*₂,斜度 为一 $\frac{G_2e^{-2}}{h}$ 。

岩体的含水量越高,岩体的强度就越低,为了反 映地下水对边坡稳定性的影响,文献[10]在研究地 震突变失稳过程中引入了一个水致弱化函数,应用 该函数来分析水对边坡稳定性的影响,其表达式为,



图1 含软弱夹层层状岩质边坡力学模型



图 2 两区段软弱夹层介质的剪应力与变形关系

$$f(w) = (1 - \eta)(1 - w)^2 + \eta,$$
 (3)

其中: w 为饱和度; η 为岩体的软化系数。

式(3)是一个单调下降的函数,在干燥情况下 $w=0,f(0)=1;在饱水情况下,w=1,f(1)=\eta<1$ 。 所以在式(1)、(2)中可引入水致弱化函数后,就可以 得到两个区段在水作用下的本构关系

$$\tau_1 = f_1(w_1)G_1 \frac{u}{h}, \qquad (4)$$

其中:w1 为弹性段介质的饱和度。

$$\tau_2 = f_2(w_2)G_2 \frac{u}{h} \mathrm{e}^{-\frac{u}{u_2}}, \qquad (5)$$

其中:w2 为弱化段介质的饱和度。

1.2 尖点突变模型

f

通过以上建立的力学模型,则边坡系统的总势 能函数为

$$V(u) = \int_{0}^{u} (f_{1}(w_{1})S_{1}\frac{G_{1}u}{h} + g_{2}(w_{2})S_{2}\frac{G_{2}u}{h}e^{-\frac{u}{u_{2}}})du - Mgu\sin\beta , \qquad (6)$$

其中:S1、S2 分别为弹性区段和弱化区段的滑面长度。

对式(6)求 $\frac{\partial V(u)}{\partial u} = 0$ 可得边坡稳定性分析的平 http://gks.cgu.edu.cn

衡曲面方程为

$$V'(u) = f_1(w_1)S_1 \frac{G_1 u}{h} + f_2(w_2)S_2 \frac{G_2 u}{h} e^{-\frac{u}{u_2}} - Mg \sin\beta = 0.$$
(7)

平衡曲面方程是光滑曲面,求V''(u)=0时,可得平衡曲面方程尖点处的剪切位移 $u=u_0=2u_2$,即尖点恰好为弱化区段介质剪应力与变形曲线的拐点。

将平衡曲面方程式(7)在 u=u₀=2u₂ 作 Taylor 公式展开,截取至 3 次项,可将平衡曲面方程转化为

$$\frac{2f_{2}(w_{2})S_{2}G_{2}u_{0}e^{-2}}{3h}\left[\left(\frac{u-u_{0}}{u_{0}}\right)^{s}+\frac{3}{2}\left(\frac{f_{1}(w_{1})S_{1}G_{1}e^{2}}{f_{2}(w_{2})S_{2}G_{2}}-1\right)\left(\frac{u-u_{0}}{u_{0}}\right)+\frac{3}{2}\left(1+\frac{f_{1}(w_{1})S_{1}G_{1}e^{2}}{f_{2}(w_{2})S_{2}G_{2}}-\frac{Mghe^{2}\sin\beta}{f_{2}(w_{2})S_{2}G_{2}u_{0}}\right)\right]=0,$$
(8)

将式(8)作变量代换,可将平衡曲面方程变为尖点突 变的标准形式

$$V'(x) = x^3 + bx + c = 0, (9)$$

式中:

$$x = \frac{(u - u_0)}{u_0} \; ; \tag{10}$$

$$b = \frac{3}{2}(fk - 1); \tag{11}$$

$$c = \frac{3}{2} \left(1 + fk - \frac{\psi}{f_2(w_2)} \right);$$
(12)

$$k = \frac{S_1 G_1 e^2}{S_2 G_2};$$
 (13)

$$\psi = \frac{Mgh\,\mathrm{e}^2\,\mathrm{sin}\beta}{S_2G_2\,u_0}\;;\tag{14}$$

$$f = \frac{f_1(w_1)}{f_2(w_2)}.$$
 (15)

参数 x 是系统的状态变量;参数 b、c 是系统的 控制变量;参数 k 是软弱夹层弹性性质区段介质的 刚度与应变弱化区段介质本构曲线拐点处刚度之 比,简称为刚度比;参数 f 是软弱夹层弹性区段介质 的水致弱化系数与应变弱化区段的水致弱化系数之 比,简称为水致弱化系数比;参数 ψ 与介质的重量、 系统几何尺寸、介质参数等有关,称为几何一力学 参数。

分叉集为

$$\Delta = 4b^3 + 27c^2 = 0.$$
 (16)
将式(11)、(12)代人式(16)得

$$2(fk-1)^{3} + 9\left(1 + fk - \frac{\psi}{f_{2}(w_{2})}\right)^{2} = 0. \quad (17)$$

则(17)式是斜坡沿软弱面滑动突发失稳的充要力学 条件判据。显然只在当 *b*≪0,系统才能跨越分叉集 发生突变,其发生突变的必要条件是

$$k \leqslant \frac{1}{f} \,. \tag{18}$$

式(18)表明,当刚度比k小于某一地下水影响 因子时,系统将突发失稳。因此可以说明滑动带的 饱和度控制了系统突发失稳。当f=1或w=0时, $k \leq 1$,对应于文献[8]的情况,表明文献[8]是式(18) 的一个特例,或者说岩体突发失稳的刚度比可能小 于1,也可能大于1或者等于1,这取决于弹性段与 弱化段的水致弱化系数之比。比较式(13)、(18) 可得

$$k = \frac{S_1 G_1 e^2}{S_2 G_2} \leqslant \frac{1}{f} \,. \tag{19}$$

由于弱化段饱和度一般比弹性段的要大,故 $f_2(w_2) < f_1(w_1), pn 1/f < 1, pn 产生失稳的条件为$ 小于1。从式(19)可以看出:刚度比是由系统的几 何尺寸和材料性质决定的,因此岩体突发失稳取决 于材料内部性质和滑带岩体受地下水的影响。当弹 性区段的刚度越小,应变弱化区段的刚度越大时,系 统易发生突发失稳。当软弱夹层的弹性区段越长, 或者一段具有弹性性质另一段具有理想塑性的, $pn k \rightarrow \infty$,系统不易产生滑坡。

当 *b*<0 时,边坡系统才能跨越分叉集发生突变 失稳,在式(16)成立的条件下式(9)有 3 个实根,其 中有一个二重根,其根为

$$x_1 = 2\left(-\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, x_2 = x_3 = -\left(-\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$
. (20)

从式(20)中可以看出:根 x_1 为正, x_2 、 x_3 为负, 因边坡系统产生蠕滑的位移u满足弱化段的本构关 系式(5),则系统产生突跳x的移动轨迹为图 3,则 对应于分叉集左支(c < 0)。



图 3 跨越分叉集时状态变量 x 的突跳

由式(20)可得系统发生突跳时状态变量的变化量

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \sqrt{-3b}.$$
 (21)
相对的蠕滑位移 *u* 的变化量为

 $\Delta u = u_1 - u_2 = u_0 \Delta x = u_0 \sqrt{-3b}_{\alpha}$ (22)由式(22)可知,当系统失稳突跳的位移变化量与边 坡弱化段岩体变形特性,水致弱化系数比、刚度比 有关。

2 边坡蠕滑失稳分析

将平衡曲面方程式(9)投影到控制参数平面上, 分叉集将控制参数平面划分为6区域,如图4所示, 图 4 中给出了各分区对应的势函数曲线,小球的位 置代表系统所处的状态。

1) 在区域 [、[[、][、][、][中,式(16)中 △>0, 式(9)只有一个实根,对应的势函数曲线只有一个最 小值,系统处于稳定状态,剪切速率近于零,不会发 生滑坡。

 2) 在区域 V、VI中,式(16)中 Δ<0,式(9)有 3 个不等实根,对应的势函数曲线有两个最小值。在 V区域中 c > 0,坡体加速度为负值,坡体做减速滑 动,对应图 5 中坡体蠕变曲线的减速滑动阶段;在 \[区域中 c<0,坡体加速度为正值,坡体做加速滑动, 对应图 5 中坡体蠕变曲线的加速滑动阶段;在 $c \approx 0$ 的中央近轴区域,坡体做近匀速滑动,对应图5中坡 体蠕变曲线的匀速滑动阶段。

3) 在 B₁ 和 B₂ 分叉集线上,式(16)中 $\Delta = 0$,在 b、c均不为零时,式(9)有3个实根,其中有一个二重 根。在 B_1 线上,有 2 个较小的实根相等,在 B_2 线 上,有2个较大的实根相等,对应的势函数有一个最 小值和一个拐点。滑坡是坡体从一个不稳定平衡态 (势函数曲线拐点处)跳跃到另一个稳定平衡态(势 函数曲线最小值处)的过程,同时滑坡表征状态变量 x 的突然增大,系统沿路径 A 向左穿越 B₁。可见路 径A可以代表一个典型的滑坡孕育发生的完整过 程:稳定一减速滑动一匀速滑动一加速滑动一剧滑。 各阶段的历时长短与斜坡的规模和外部因素扰动的 大小有关。一般来说,滑坡规模愈大,阶段性愈明 显;外部因素扰动强度愈大,阶段性愈不明显,可能 出现某些蠕变阶段的缺失。由于外部因素扰动的不 确定性,甚至导致滑坡演化阶段的反复。

4) 在 P 点,式(16) 中 Δ=0,而且 b、c 都为零, 式(9)有3个相等实根,对应的势函数曲线只有一个 最小值。系统穿越 P 点,发生状态跳跃,但由于前 后两状态相同,不会发生滑坡。

为了分析边坡的突变失稳的性质,分析了状态 变量 x 随几何参数 ϕ 、水致弱化函数 $f_1(w_1)$ 、 $f_2(w_2)$ 、刚度比 k 的变化情况,如图 6、7 所示。图 6





边坡产生蠕滑的3个阶段 图 5

是刚度比 k 取不同的值时,状态变量 x 随几何参数 ϕ 的变化曲线,从中可以看出:在 $m 点 \phi$ 较小,系统 是处于稳定的(此时 $\Delta > 0$),当到达 n 点时,若再增 大,则 x 将突然从 n 点跃迁到 n',则系统将产生突 变失稳(此时 $\Delta < 0$),因此 n 对应的 ϕ 是分叉集上的 点,是状态变量 x 产生突变点, x 随 ϕ 变化的路径为 $m \rightarrow n \rightarrow n' \rightarrow m'$ 。当 k 取不同的值时,式(11)中的 b 的取值不同,从而对应的分叉集上的突变点不同。 图 7 是刚度比 k 取不同的值时,状态变量 x 随水致 弱化函数 $f_2(w_2)$ 的变化曲线,该曲线描述的是边坡 系统的失稳与水的作用关系,从中可以看出:在m 点 $f_2(w_2)$ 较大,系统是处于稳定的(此时 $\Delta > 0$),当 到达n点时,若 $f_2(w_2)$ 再减小,则x将突然从n点 跃迁到 n',则系统将产生突变失稳(此时 $\Delta < 0$),因 此 n 对应的 $f_2(w_2)$ 是分叉集上的点, 是状态变量 x产生突变点, x 随 $f_2(w_2)$ 变化的路径为 $m \rightarrow n \rightarrow n'$ m'。当 k 取不同的值时,式(11)中的 b 的取值不同, 从而对应的分叉集上的突变点不同。

通过以上分析得出:地下水、边坡几何参数、刚 度比对边坡稳定性有很大的影响。分叉集上的点的 是系统产生失稳的点,系统受外界环境和内部性质

改变时,则系统将跨越分叉集,产生突变失稳。







图 7 控制变量 x 随弱化函数 $f_2(w_2)$ 的变化曲线 ($f=2, \psi=0.5$)

3 边坡系统失稳前后所释放的能量

边坡系统的能量表达为式(6),对式(6)求定积 分可得

$$V = \frac{f_1(w_1)S_1G_1}{2h}u^2 + \frac{f_2(w_2)S_2G_2u_2}{h}$$

 $[u_2 - (u + u_2)e^{-\frac{u}{u_2}}] - Mgu \sin\beta.$ (23) 将式(23)在 $u = u_0 = 2u_2$ 处作 Taylor 公式展开,截 取至 4 次项,整理可得边坡系统能量函数的表达 式为

$$V = \frac{2f_2(w_2)S_2G_2u_2^2e^{-2}}{3h}(x^4 + 2bx^2 + 4cx + d),$$
(24)

$$d = 3fk + \frac{3}{2}e^2 - \frac{9}{2} - 6\frac{\psi}{f_2(w_2)}.$$
 (25)

式(24)、(25)中的参数与式(11)~(15)中表示的含 义相同。

系统突跳前后所释放出的能量为

$$\Delta V = V(x_1) - V(x_2) = \frac{2f_2(w_2)S_2G_2u_2^2e^{-2}}{3h} \times [(x_1^4 - x_2^4) + 2b(x_1^2 - x_2^2) + 4c(x_1 - x_2)]_{\circ}$$
(26)

将式(20)中的 x₁、x₂ 代入式(26)可得系统失稳突跳 前后所释放出的能量

$$\Delta V = V(x_1) - V(x_2) = \frac{2f_2(w_2)S_2G_2u_2^2e^{-2}}{3h}$$
$$(-3b^2) = -\frac{9f_2(w_2)S_2G_2u_2^2e^{-2}}{2h}(fk-1)^2 \circ (27)$$

由式(27)可知,边坡系统失稳所释放出的能量 与系统几何特征、岩体力学参数、刚度比、水致弱化 系数比有关。说明影响边坡稳定性的因素较多,因 参数的变化其能量也发生变化,说明边坡是一个复 杂的开放系统,与外界存在能量的交换。

取式(27)中层状岩质边坡软弱夹层的参数为: $f_2(w_2)=0.5, S_2=40 \text{ m}, G_2=3.6 \times 10^6 \text{ kPa}, u_2=$ 0.2 m, h=0.2 m。系统产生突变的必要条件为 $fk \leq 1, 表 1$ 为fk取不同值时系统产生的突跳变化 量和所释放出的能量。从表 1 中可以看出:只要系 统 $fk \leq 1$,则边坡就产生蠕滑失稳(fk 越小产生慢速 失稳,fk 越大但小于 1 产生快速失稳),系统释放的 能量相差几倍到几百倍之间。

表1 系统失稳突跳变化量和释放的能量

_				
	fk	Δx	$\Delta u/\mathrm{mm}$	$\Delta V/10^5~{ m kJ}$
	0.20	1.90	759	56.10
	0.40	1.10	438	31.60
	0.60	0.90	358	14.00
	0.80	0.63	253	3.50
	0.90	0.45	179	0.87
	0.95	0.32	126	0.21
	1.00	0	0	0

4 结 论

1)在前人建立的边坡地质力学模型的基础上, 运用非线性科学中的突变理论方法,在考虑内外因 素对边坡稳定性的影响下,建立了完善的尖点突变 模型。

2)内外因素对边坡的稳定性影响是同等的,在 突变模型中考虑了水的影响,能够很好地解释因水 而改变边坡演变路径,使得稳定和慢速蠕滑的边坡 产生快速滑动,从而可能产生突发性滑坡。

3)分析了边坡失稳状态下系统所释放出的能量,说明边坡是一个复杂的开放系统,与外界环境存 在物质和能量的交换。 4)为了建立更好的突变模型,需对滑面介质的 本构方程作进一步的研究。

参考文献:

- [1]姜德义,王国栋. 高速公路工程边坡的工程地质分类[J].重庆大学学报,2003,26(11):113-116.
 JIANG DE-YI, WANG GUO-DONG. Engineering geologic classification of slopes for highway projects[J]. Journal of Chongqing University, 2003, 26(11):113-116.
- [2] 许江,鲜学福,唐建新,等. 论三峡库区地质灾害的非线 性科学理论与控制[J]. 重庆大学学报,2002,25(5): 119-123.

XU JIANG, XIAN XUE-FU, TANG JIAN-XIN, et al. Nonlinear science and control about the geological hazards in the three gorges reservoir area[J]. Journal of Chongqing University, 2002,25(5):119-123.

- [3] LI X. Finite element analysis of slope stability using a nonlinear failure criterion [J]. Computers and Geotechnics, 2007,34(3):127-136.
- [4]黄润秋,许强.非线性理论在工程地质中的应用[J]. 中国科学基金,1996 (2): 79-84.
 HUANG RUN-QIU, XU QIANG. The application of nonlinear theory in engineering geology [J]. Bulletin of National Science Foundation of China,1996 (2): 79-84.
- [5] 雷谦荣. 边坡中地下水压力问题的探讨[J]. 工程勘察,1997(1):29-32. LEI QIAN-RONG. The probe into underground water

pressure in slope [J]. Geotichnical Investigation and Surveying, 1997 (1): 29-32.

- [6]何满潮,姚爱军,鹿粗,等. 边坡岩体水力学作用的研 究,岩石力学与工程学报,1998,17(6):662-666. HE MAN-CHAO, YAO AI-JUN, LU CU, et al. Study of mechanical functions of underground water in slope rockmass[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1998,17(6):662-666.
- [7] QIN S Q, JIAO J J, WANG S J. A nonliear dynamical moder of landslide evolution[J]. Geomorphology, 2002, 43(1):77-85.
- QIN S Q, JIAO J J, WANG S J. A nonlinear catastrophe model of planar-slope slope and chaotic dynamics mechanism of its evolutionary process [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001,38 (44):8093-8109.
- [9]秦四清.斜坡失稳过程的非线性演化机制与物理预报[J].岩土工程学报,2005,27(11):1241-1248.
 QIN SI-QING. Nonlinear evolutionary mechanisms and physical prediction of instability of planar-slip slope[J].
 Chinese Jounal of Geotechnical Engineering, 2005, 27 (11): 1241-1248.
- [10] 殷有泉, 杜静. 地震过程中的燕尾突变模型[J]. 地震 学报,1994, 16(4): 416-421.

YIN YOU-QUAN, DU JING. The model of govetail mutation during the occurring of earthquake[J]. Acta Seismologica Sinica, 1994.16(4): 416-421.

(编辑 赵 静)

(上接第 666 页)

[10] ASHIKHMIN M, GHOSH A. Simple blurry reflections with environment maps [J]. Fournal of Graphics Tools, 2003,7(4):3-8.

むむむむむむむむむむむむむむ

- [11] 王斌会.数据挖掘技术及其应用现状[J].统计与决策,2006,5(10):122-124.
 WANG BIN-HUI. Data mining techniques and application [J]. Statistics and Decision, 2006, 5(10): 122-124.
- [12] GUPTA M M, RAO D H. On the principles of fuzzy neural networks[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 68 (1): 1-8.
- [13] 银涛. 基于人工神经网络送电线路工程造价的快速估

算[J]. 重庆大学学报:自然科学报,2007,30(1): 36-41.

YIN TAO. Cost estimation of transmission line based on artificial neural network[J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 2007, 30(1): 36-41.

- [14] MORAGA C. Data driving fuzzy modeling with neural networks[J]. StudFuzz, 2005, 179: 153-164.
- [15] NANNI M, PEDRESCHI D. Time-focused clustering of trajectories of moving objects[J]. Journal of Intelligent Information Systems, 2006, 27(3):267-289.

(编辑 李胜春)