

文章编号:1000-582X(2008)07-0735-05

拉压不同模量弹性结构分析中的对称性问题

何晓婷, 郑周练, 陈山林

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400030)

摘要:基于对称和反对称问题中应力和位移分量满足的必要条件,分析了主方向上应力状态的对称和反对称特点,并用算例加以验证。研究表明材料的非线性导致拉压不同模量弹性结构的主应力的反对称性改变而对称性仍旧保持;同时,将复杂问题分解为对称和反对称问题并通过叠加原理获得解答的方法也会失效。由于不同模量弹性理论将其本构关系建立在主方向上,因此基于主方向的应力状态分析是研究的关键。

关键词:弹性模量;结构分析;拉压;主应力;对称;反对称

中图分类号:O343.5

文献标志码:A

Symmetry in elastic structural analysis based on different elastic moduli in tension and compression

HE Xiao-ting, ZHENG Zhou-lian, CHEN Shan-lin

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)

Abstract: Symmetrical characteristics of elastic structures will change when different tension-compression moduli was employed. Based on the necessary conditions satisfied by stress and displacement, we analyzed symmetry and antisymmetry under the principal stress state using a computational example. The research indicates that antisymmetry of elastic structures in the magnitude and direction of principal stress will change due to the nonlinearity of materials while symmetry still holds, and the superposition theorem will fail when a complex problem is resolved into symmetric and antisymmetric components. It is concluded that the principal stress state due to the bimodular constitutive model based on principal direction is key.

Key words: elastic moduli; structural analysis; tension and compression; principal stress; symmetry; antisymmetry

工程材料都在不同程度上表现出拉压不同的弹性性质,比如陶瓷、塑料、石墨、钢筋混凝土以及复合材料等。具有拉压不同模量非线性特性的材料统称为双模量材料^[1-2]。对于双模量材料,研究中首先解决的是材料宏观力学模型的构建问题,主要有两种材料模型应用较为广泛。一种是 Bert 于 1977 年提出的以纤维纵向应变的正负为准则的模型^[3-4],这一模型后多用于复合材料叠层结构的研究。另一种是以主应力的正负为判据的模型——苏联学者阿姆巴

尔楚米扬在 20 世纪 80 年代创立的不同模量弹性理论^[5],笔者的研究工作正是基于这一模型。该模型突破了传统理论关于弹性模量单一性的定义,提出了弹性模量不再是一个常量,而是随着结构各点的应力状态不同而取不同的弹性模量值。由于该材料模型将其本构关系建立在主方向上,由主应力的正负判定柔度系数的选取,因此使得普通坐标系下的广义弹性定律出现了与主应力及其方向余弦相关的非线性项,求解困难^[6-7]。学者们对这一模型下不同

收稿日期:2008-04-25

基金项目:国家重大基础研究前期研究专项基金资助项目(2003CCA01500)

作者简介:何晓婷(1971-),女,重庆大学博士,主要从事不同模量弹性结构方向的研究,(Tel)023-65120898;

(E-mail)xiaotinghe@163.com。

模量弹性结构问题的研究,一般都是围绕简单问题(如梁柱构件)的解析解^[8-12]和较复杂问题的数值解展开^[13-15]。分析中利用弹性结构的形状、边界约束条件和荷载情况满足的对称性可减少计算工作量,在结构分析中具有重要意义。迄今为止,尚无文献对拉压不同模量弹性结构的对称性问题进行研究。笔者在分析对称和反对称问题中应力和位移分量满足一定规律的基础上,考察了基于主方向的应力状态,发现了对称性满足而反对称性被破坏的特点并分析其根本原因,最后以算例得以验证。

1 对称问题和反对称问题的应力及位移分量

在平面问题中,当弹性结构具有对称轴或反对称轴时,对称轴(y轴)两侧的对点(x,y)和(-x,y)的位移和应力分量应如图1所示。

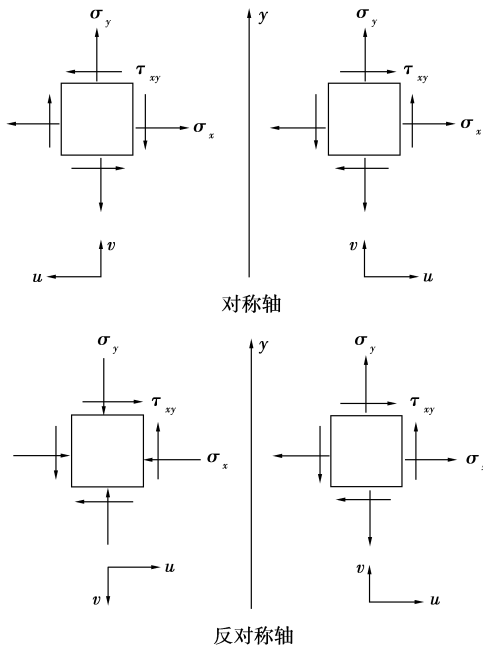


图1 对称问题和反对称问题的应力和位移

同时,应力和位移分量需满足如下关系^[14]:

1) 对称问题

对称轴上

$$u = 0, \tau_{xy} = 0. \quad (1)$$

对称轴两侧

$$\begin{cases} u(x,y) = -u(-x,y), v(x,y) = v(-x,y); \\ \sigma_x(x,y) = \sigma_x(-x,y), \sigma_y(x,y) = \sigma_y(-x,y); \\ \tau_{xy}(x,y) = -\tau_{xy}(-x,y). \end{cases} \quad (2)$$

2) 反对称问题

反对称轴上

$$v = 0, \sigma_x = 0 (\sigma_y = 0). \quad (3)$$

反对称轴两侧

$$\begin{cases} u(x,y) = u(-x,y), v(x,y) = -v(-x,y); \\ \sigma_x(x,y) = -\sigma_x(-x,y), \sigma_y(x,y) = -\sigma_y(-x,y); \\ \tau_{xy}(x,y) = \tau_{xy}(-x,y). \end{cases} \quad (4)$$

由于不同模量弹性理论与经典理论的根本差别在于其本构关系建立在主方向上,下面就从主应力的方向及其方向来考察其对称性和反对称性。

2 基于主方向的应力分析

在经典弹性理论中,对应应力分量的对称性或反对称性的满足最终要表示成

$$\begin{aligned} \sigma_x(x,y) &= \pm \sigma_x(-x,y), \sigma_y(x,y) = \pm \sigma_y(-x,y), \\ \tau_{xy}(x,y) &= \pm \tau_{xy}(-x,y), \end{aligned} \quad (5)$$

因此,主应力 σ_1, σ_2 及其 σ_1 与x轴的夹角 α 若要满足对称性或反对称性,就必须也要表示成以下形式

$$\begin{aligned} \sigma_1(x,y) &= \pm \sigma_1(-x,y), \sigma_2(x,y) = \pm \sigma_2(-x,y); \\ \tan \alpha(x,y) &= \pm \tan \alpha(-x,y). \end{aligned} \quad (6)$$

平面问题中主应力在第一象限(x,y)的计算公式为

$$\begin{cases} \sigma_1(x,y) = \frac{\sigma_x(x,y) + \sigma_y(x,y)}{2} + \\ \sqrt{\left[\frac{\sigma_x(x,y) - \sigma_y(x,y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2(x,y)}; \\ \sigma_2(x,y) = \frac{\sigma_x(x,y) + \sigma_y(x,y)}{2} - \\ \sqrt{\left[\frac{\sigma_x(x,y) - \sigma_y(x,y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2(x,y)}. \end{cases} \quad (7)$$

主应力 σ_1 与x轴的夹角 α 为

$$\tan \alpha(x,y) = \frac{\sigma_1(x,y) - \sigma_x(x,y)}{\tau_{xy}(x,y)}. \quad (8)$$

第二象限(-x,y)主应力的计算公式为

$$\begin{cases} \sigma_1(-x,y) = \frac{\sigma_x(-x,y) + \sigma_y(-x,y)}{2} + \\ \sqrt{\left[\frac{\sigma_x(-x,y) - \sigma_y(-x,y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2(-x,y)}; \\ \sigma_2(-x,y) = \frac{\sigma_x(-x,y) + \sigma_y(-x,y)}{2} - \\ \sqrt{\left[\frac{\sigma_x(-x,y) - \sigma_y(-x,y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2(-x,y)}. \end{cases} \quad (9)$$

主应力 σ_1 与x轴的夹角 α 为

$$\tan \alpha(-x,y) = \frac{\sigma_1(-x,y) - \sigma_x(-x,y)}{\tau_{xy}(-x,y)}. \quad (10)$$

结合对称问题的特点即式(2),可知

$$\begin{aligned} \sigma_1(x,y) &= \sigma_1(-x,y), \sigma_2(x,y) = \sigma_2(-x,y); \\ \tan \alpha(x,y) &= -\tan \alpha(-x,y). \end{aligned} \quad (11)$$

说明对称问题的 2 个主应力及其方向刚好也是关于 y 轴对称的,对称问题中主应力的对称性仍旧保持这一特点,使得基于主方向本构关系的不同模量引入以后,其对称性也是必然满足的。但是对于反对称问题,情况发生了变化。试结合反对称问题的特点即式(4)来考察式(9),得到

$$\begin{cases} \sigma_1(-x,y) = -\frac{\sigma_x(x,y) + \sigma_y(x,y)}{2} + \\ \sqrt{\left[\frac{\sigma_x(x,y) - \sigma_y(x,y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2(x,y)} \neq \pm \sigma_1(x,y); \\ \sigma_2(-x,y) = -\frac{\sigma_x(x,y) + \sigma_y(x,y)}{2} - \\ \sqrt{\left[\frac{\sigma_x(x,y) - \sigma_y(x,y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2(x,y)} \neq \pm \sigma_2(x,y). \end{cases} \quad (12)$$

同时,再结合式(4)考察式(10),得到

$$\tan \alpha(-x,y) = \frac{\sigma_1(-x,y) + \sigma_x(x,y)}{\tau_{xy}(x,y)} \neq \pm \tan \alpha(x,y). \quad (13)$$

可见反对称问题的 2 个主应力及其方向已经不再反对称,因此,一旦引入基于主方向的本构关系,本来满足的反对称性便不再成立。

3 算例

如图 2 所示弹性平面应力问题,顶点受水平集中力 $P = 10$ 且 $E^+/E^- = 2.2/3.22 = 0.6832$, $\mu^+/E^+ = \mu^-/E^- = 0.1$,取无量纲量以便于数值比较。这是不同模量弹性问题,简称为 D 问题;为了便于比较分析,可用一个相同模量问题与之对照,简称为 S 问题,其 $E = (E^+ + E^-)/2 = 2.71, \mu = 0.22$ 。

运用编制的不同模量计算程序进行数值运算。现将这 2 个问题各结点沿 x, y 方向的位移 u, v ,各单元形心处的正应力和剪应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,主应力 σ_1, σ_2 和 σ_1 与 x 轴的夹角 α 进行比较,分别见表 1、表 2。

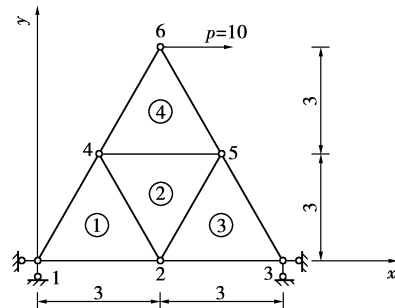


图 2 不同模量弹性平面应力问题(反对称)

表 1 结点位移(荷载向右)

结点	水平方向位移 u	竖直方向位移 v
1	0.319 949E-19	0.109 732E-18
2	0.194 151E+00	-0.367 601E-06
S 问题		
3	0.319 949E-19	-0.109 732E-18
4	0.102 090E+02	0.611 571E+01
5	0.102 090E+02	-0.611 571E+01
6	0.404 478E+02	-0.200 846E-06
D 问题		
1	0.281 691E-19	0.133 413E-18
2	-0.247 341E-01	0.201 055E+01
3	0.342 126E-19	-0.946 459E-19
4	0.101 218E+02	0.872 081E+01
5	0.109 312E+02	-0.408 509E+01
6	0.425 152E+02	0.392 227E+01

表 2 单元正应力、剪应力和主应力(荷载向右)

单元	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_1	σ_2	α
S 问题						
①	0.146 2E+01	0.584 6E+01	0.374 4E+01	0.799 2E+01	-0.684 5E+00	60.176 6
②	0.269 8E-07	0.122 6E-06	-0.820 6E+00	0.820 6E+00	-0.820 6E+00	-45.000 0
③	-0.146 2E+01	-0.584 6E+01	0.374 4E+01	0.684 5E+00	-0.799 2E+01	29.823 4
④	0.784 7E-08	0.356 7E-07	0.666 7E+01	0.666 7E+01	-0.666 7E+01	45.000 0
D 问题						
①	0.997 4E+00	0.579 9E+01	0.376 7E+01	0.786 5E+01	-0.106 9E+01	61.255 4
②	0.631 4E+00	0.315 3E+00	-0.709 8E+00	0.120 1E+01	-0.253 8E+00	-38.723 4
③	-0.198 1E+01	-0.611 5E+01	0.360 9E+01	0.111 5E+00	-0.820 7E+01	30.102 1
④	-0.552 6E+00	-0.171 1E-06	0.666 7E+01	0.639 6E+01	-0.694 9E+01	46.186 7

将以上算例即图 2 中的荷载 P 作如下变动:大小不变,作用点不变,仅仅方向由水平向右变为竖直向上,如图 3 所示。这样一个反对称问题就转变成

了对称问题。运用不同模量计算程序计算其结果见表 3、表 4。

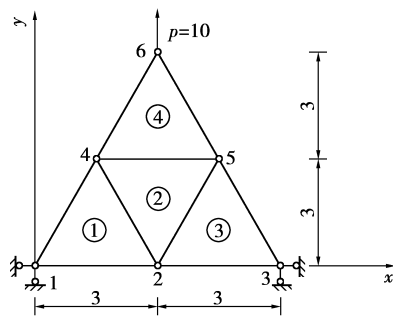


图 3 不同模量弹性平面应力问题(对称)

表 3 结点位移(荷载向上)

结点	水平方向位移 u	竖直方向位移 v	
S 问题	1	0.151 320E-19	0.548 662E-19
	2	-0.413 010E-07	0.500 520E+01
	3	-0.151 320E-19	0.548 662E-19
	4	-0.607 919E-01	0.566 884E+01
	5	0.607 917E-01	0.566 884E+01
	6	-0.200 846E-06	0.126 650E+02
D 问题	1	0.143 167E-19	0.667 137E-19
	2	0.823 375E-07	0.605 853E+01
	3	-0.143 167E-19	0.667 137E-19
	4	-0.755 744E-01	0.696 329E+01
	5	0.755 754E-01	0.696 329E+01
	6	0.111 548E-05	0.155 809E+02

表 4 单元正应力、剪应力和主应力(荷载向上)

单元	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_1	σ_2	α	
S 问题	①	0.661 2E+00	0.300 6E+01	0.183 1E+01	0.400 7E+01	-0.340 2E+00	61.317 1
	②	0.254 0E+00	0.655 4E+00	-0.195 0E-06	0.655 4E+00	0.254 0E+00	90.000 0
	③	0.661 2E+00	0.300 6E+01	-0.183 1E+01	0.400 7E+01	-0.340 2E+00	-61.317 1
	④	0.157 6E+01	0.666 7E+01	-0.217 1E-06	0.666 7E+01	0.157 6E+01	90.000 0
D 问题	①	0.542 5E+00	0.297 2E+01	0.184 7E+01	0.396 8E+01	-0.453 8E+00	61.663 2
	②	0.269 9E+00	0.722 9E+00	0.124 2E-06	0.722 9E+00	0.269 9E+00	90.000 0
	③	0.542 5E+00	0.297 2E+01	-0.184 7E+01	0.396 8E+01	-0.453 8E+00	-61.663 2
	④	0.157 8E+01	0.666 7E+01	0.186 3E-06	0.666 7E+01	0.157 8E+01	90.000 0

4 结 论

图 2 中荷载向右的情形是反对称情况;而图 3 中荷载向上的情形是对称情况。用表 1-4 的数据验证表 2 中得到的分析结果即式(1)-(4),有以下结论:

- 1)对 S 问题,无论对称性还是反对称性,以上结果满足现有规律;
- 2)对于 D 问题,对称性仍旧满足;
- 3)对于 D 问题,反对称性受到破坏,因此对于一个复杂问题,试图将其分为对称问题和反对称问题并且利用叠加原理获得解答的方法会失效;
- 4)叠加原理不再成立,符合不同模量弹性问题的材料非线性特征。

参考文献:

[1] JONES R M. Apparent flexural modulus and strength of multimodulus materials[J]. Journal of Composite Materials, 1976,10(4): 342-354.
 [2] JONES R M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression[J]. AIAA Journal, 1977, 15(1): 16-23.
 [3] BERT C W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1977,99(4): 344-349.

[4] BERT C W. Transverse shear effects in bimodular composite laminates [J]. Journal of Composite Materials, 1983, 17(4): 282-298.
 [5] 阿姆巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论[M]. 邬瑞锋, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
 [6] 张允真, 王志锋. 不同拉压模量弹性力学问题的有限元法[J]. 计算结构力学及其应用, 1989,6(1): 236-245. ZHANG YUN-ZHEN, WANG ZHI-FENG. Finite element method of elasticity problem with different tension and compression moduli[J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1989, 6(1): 236-245.
 [7] 叶志明, 陈彤, 姚文娟. 不同模量弹性问题理论及有限元法研究进展[J]. 力学与实践, 2004, 26(2): 9-14. YE ZHI-MING, CHEN TONG, YAO WEN-JUAN. Progresses in elasticity theory with different modulus in tension and compression and related FEM [J]. Mechanics in Engineering, 2004,26(2): 9-14.
 [8] YAO W J, YE Z M. Analytical solution of bending-compression column using different tension-compression modulus [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004,25(9): 983-993.
 [9] YAO W J, YE Z M. Analytical solution for bending beam subject to lateral force with different modulus[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004,25(10): 1107-1117.
 [10] 姚文娟, 叶志明. 不同模量理论挡土墙结构解析解及数值解[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6): 1022-1027. YAO WEN-JUAN, YE ZHI-MING. The analytical and numerical solution of retaining wall based on elastic theory

- of different modulus [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004,38(6): 1022-1027.
- [11] HE X T, CHEN S L, SUN J Y. Applying the equivalent section method to solve beam subjected lateral force and bending-compression column with different moduli [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2007,49(7): 919-924.
- [12] 何晓婷,陈山林,孙俊怡. 不同模量筒支梁均布荷载下的弹性力学解[J]. 工程力学, 2007,24(10): 51-56.
HE XIAO-TING, CHEN SHAN-LIN, SUN JUN-YI. Elasticity solution of simple beams with different modulus under uniformly distributed load [J]. Engineering Mechanics, 2007,24(10): 51-56.
- [13] KAMIYA N. Large deflection of a different modulus circular plate[J]. Journal of Engineering Materials and Technology Transactions of the ASME, 1975, 97(1): 52-56.
- [14] AMBARTSUMYAN S A. The theory of very shallow shells based on the asymmetric theory of elasticity[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 62(4): 635-640.
- [15] 刘相斌,张允真. 拉压不同模量有限元法剪切弹性模量及加速收敛[J]. 大连理工大学学报, 2000, 40(5): 526-530.
LIU XIANG-BIN, ZHANG YUN-ZHEN. Modulus of elasticity in shear and accelerate convergence of different extension-compression elastic modulus finite element method [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2000, 40(5): 526-530.

(编辑 侯 湘)

~~~~~

(上接第 734 页)

## 参考文献:

- [1] BEUTEL J, THAMBIRATNAM D, PERERA N. Cyclic behaviour of concrete filled steel tubular column to steel beam connections [J]. Journal of Engineering Structures, 2002,24:29-38.
- [2] WARDENIER J. Hollow section in structural application [M]. Netherlands: Bouwen Met Staal, 2002.
- [3] CHOO Y S, QIAN X D, R LIEW J Y, et al. Static strength of thick-walled CHS X-joints-part I. new approach in strength definition [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2003,59:1201-1228.
- [4] CHOO Y S, QIAN X D, LIEW J Y R, et al. Static strength of thick-walled CHS X-joints-part II. effect of chord stresses [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2003,59:1229-1250.
- [5] HALDIMANN-STURM S C, NUSSBAUMER A. Fatigue design of cast steel nodes in tubular bridge structures[J]. International Journal of Fatigue, 2008, 30:528-537.
- [6] ELCHALAKANI M. Plastic mechanism analyses of circular tubular members under cyclic loading [J]. Thin-Walled Structures, 2007,45:1044-1057.
- [7] ZHOU FENG, YOUNG BEN. Experimental and numerical investigations of cold-formed stainless steel tubular sections subjected to concentrated bearing load [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2007, 63:1452-1466.
- [8] CHRISTITSAS A D, PACHOUMIS D T, KALFAS C N, et al. FEM analysis of conventional and square bird-beak SHS joint subject to in-plane bending moment - experimental study [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2007,63:1361-1372.
- [9] YANG Z M, LIE S T, GHU W M. Fatigue crack growth analysis of a square hollow section T-joint[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2007, 63: 1184-1193.
- [10] QIAN X, DODDS ROBERT H, CHOO Y S. Elastic-plastic crack driving force for tubular K-joints with mismatched welds[J]. Engineering Structures, 2007, 29:865-879.
- [11] NESTOR GUERRERO, MARIA EUGENIA MARANTE, RICARDO PICON, et al. Model of local buckling in steel hollow structural elements subjected to biaxial bending [J] Journal of Constructional Steel Research, 2007,63:779-790.
- [12] 陈以一,陈扬骥. 钢管结构相贯节点的研究现状[J]. 建筑结构, 2002,32(7):52-55.  
CHEN YI-YI, CHEN YANG-JI. The development of researching tubular joints [J]. Building Structure, 2002,32(7):52-55.
- [13] 陈以一,沈祖炎,翟红,等. 圆钢管相贯节点滞回特性的实验研究[J]. 建筑结构学报, 2003,24(6):57-62.  
CHEN YI-YI, SHEN ZU-YAN, ZHAI HONG, et al. Experimental research on hysteretic property of unstiffened space tubular joints[J]. Journal of Building Structures 2003,24(6):57-62.
- [14] 詹琛. 空间直接焊接圆钢管节点足尺试验研究[D]. 上海:同济大学, 2000.
- [15] QIN F, FUNG T C, SOH C K. Hysteretic behavior of completely overlap tubular joints [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2001,57:811-829.

(编辑 陈移峰)