

文章编号:1000-582X(2008)07-0770-05

有脉冲和时滞的双向记忆神经网络稳定性分析

张 忠^a, 吕建斌^{a,b}, 李传东^a

(重庆大学 a. 计算机学院; b. 期刊社, 重庆 400030)

摘 要: 利用 Lyapunov 函数和二维 Hanalay 类型不等式, 研究带有脉冲和时延的广义双向联想记忆神经网络平衡点的全局指数稳定性, 得到了几个判断网络全局指数稳定的充分条件, 这些条件刻画了脉冲强度和没有脉冲的连续子网络(双向联想记忆神经网络的连续部分)的指数收敛速度对整个网络的全局指数稳定性的混合影响。研究结果表明即使脉冲对网络状态有放大的影响, 脉冲时滞双向联想记忆神经网络也可能保持连续子网络的全局指数稳定性。数值例子验证了理论结果的正确性。

关键词: 时滞双向联想记忆神经网络; 脉冲; 指数稳定

中图分类号: TP18

文献标志码: A

Stability analysis of generalized bidirectional associative memory neural networks with impulse and time delays

ZHANG Zhong^a, LV Jian-bin^{a,b}, LI Chuan-dong^a

(a. College of Computer Science; b. Journals Deptment, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)

Abstract: The global exponential stability of the equilibrium point of generalized delayed bidirectional associative memory (DBAM) neural networks with impulse effects was studied using the Lyapunov function and a 2-D Hanalay-type inequality. Several results characterized the aggregated effects of impulses and the dynamic properties of the impulse-free DBAM on the exponential stability of the DBAM under consideration. It is shown that impulsive DBAM will preserve the global exponential stability of the impulse-free DBAM even if the impulses have enlarging effects on the states of neurons. The effectiveness of the theoretical results was validated by a numerical example.

Key words: delayed bidirectional associative memory neural networks; mpulse; exponential stability

Kosko 于 20 世纪 80 年代末和 90 年代初提出了双向联想记忆(BAM)神经网络模型^[1-3], 并分析了模型的基本特性。BAM 神经网络由两组神经元组成, 记为 X 层和 Y 层, 其中, X 层由 n 个神经元组成, 其状态用向量表示为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 它的外部输入为 I ; 同样, Y 层也由 n 个神经元组成, 其状态用向量表示为 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 它的外部输

入为 J 。在 BAM 模型中, Kosko 假设神经元处理输入和输出的过程都是即时的, 输入也被神经元即时接收。然而, 当神经元个数较多、传输路径较长或神经元轴突大小种类较多时, 神经元处理和传输的即时性并不总是正确的^[4-8]。在神经元的处理过程和轴突的传输过程都有时间延迟。Gopalsamy and He^[6]对 Kosko 的 BAM 模型进行了改进得到如下

收稿日期: 2008-03-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574024); 博士后科学基金资助项目(20060400196)

作者简介: 张忠(1970-), 男, 重庆大学博士, 主要从事神经网络稳定性、软件工程等方向研究, (Tel)023-65111430;
(E-mail)zhangzh@cqu.edu.cn。

模型

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -C_1 x(t) + A_1 f(y(t-\sigma)) + I, t \geq 0; \\ \dot{y}(t) &= -C_2 y(t) + A_2 g(x(t-\tau)) + J, t \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, 正定对角矩阵 $C_i = \text{diag}(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$, $i = 1, 2$ 表示神经元的衰减率。这两组神经元之间的连接强度用 $A_1 f(y(\cdot))$ 和 $A_2 g(x(\cdot))$ 表示, 其中 $A_1 = (a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$, $A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{n \times n}$, $f(y) = [f_1(y_1), f_2(y_2), \dots, f_n(y_n)]^T$, $g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)]^T$ 。 τ 和 σ 表示神经系统处理和传输过程中的时滞, τ 和 σ 均为非负常数。近年来, 人们对模型(1)进行了推广, 提出了如下的广义时滞 BAM 神经网络模型

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -C_1 x(t) + W_1 f(x(t)) + A_1 f(y(t-\sigma)) + I, t \geq 0; \\ \dot{y}(t) &= -C_2 y(t) + W_2 g(y(t)) + A_2 g(x(t-\tau)) + J, t \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在应用中, 相同的外部输入 I 和 J 下, 系统(1)的平衡点被作为一种与时间相关的模式或存储器。因此, 它对确保平衡点的(全局)稳定性是非常重要的。对于系统(2)的平衡点的稳定性分析参见文献[4-12]。

为了研究系统(2)在整个网络演变过程中某时刻的瞬时跳动的脉冲动力学行为, Guan 等提出了脉冲神经网络模型^[13-14]。与系统(2)相对应的带脉冲的时滞 BAM 模型如下:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -C_1 x(t) + W_1 f(x(t)) + A_1 f(y(t-\sigma)) + I, t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) &= \tilde{e}_k(x(t_k^-)), k=1, 2, \dots, \\ \dot{y}(t) &= -C_2 y(t) + W_2 g(y(t)) + A_2 g(x(t-\tau)) + J, t \neq t_k, \\ \Delta y(t_k) &= \tilde{e}_k(y(t_k^-)), k=1, 2, \dots. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, $x(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t)$ 和 $y(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} y(t)$ 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 t_k 时刻的左极限。 $\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k^-)$ 和 $\Delta y(t_k) = y(t_k) - y(t_k^-)$ 分别是网络的 X 层和 Y 层在 t_k 时刻的变化量。其它的参数参见系统(1)和(2)中的定义。在文中总是假设状态向量在 t_k 是左连续的, 并且 $\{t_k\}$ 满足条件 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ 。不失一般性, 假设系统(3)的初始值为

$$\left\{ \begin{aligned} x(s) &= \varphi_x(s), s \in [-\tau, 0]; \\ y(s) &= \varphi_y(s), s \in [-\sigma, 0]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 φ_x, φ_y 分别是定义 $[-\tau, 0]$ 和 $[-\sigma, 0]$ 上的实连续有界函数, 它们的范数分别定义为 $\|\varphi_x\|_\tau = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi_x(\theta)|$ 和 $\|\varphi_y\|_\sigma = \sup_{-\sigma \leq \theta \leq 0} |\varphi_y(\theta)|$ 。同

时, 假设激活函数全局有界并且满足全局 Lipschitz 连续, 即, (H) 存在正常数 L 和 $l_i^f, l_i^g (i=1, 2, \dots, n)$, 对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}^n$, $|f_i(\alpha) - f_i(\beta)| \leq l_i^f |\alpha - \beta|$, $|g_i(\alpha) - g_i(\beta)| \leq l_i^g |\alpha - \beta|$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $i=1, 2, \dots, n$, 都有 $|f(x)| \leq L$, $|g(y)| \leq L$ 。其中, $L_f = \text{diag}(l_i^f), L_g = \text{diag}(l_i^g)$ 。

最近, 一些研究人员对带脉冲和时延性质的双向联想记忆网络模型(3)的全局稳定性进行了研究, 并在全局渐近稳定性或指数稳定性的某些方面得到了一些判断规则(参见文献[15-21])。然而, 在文献[15-21]中得到的稳定性规则都是基于脉冲的强约束条件: $|x(t_k) - x^*| \leq |x(t_k^-) - x^*|$ 和 $|y(t_k) - y^*| \leq |y(t_k^-) - y^*|$, 其中, (x^*, y^*) 表示被研究的网络系统的平衡点。实际上, 在神经元的状态中, 脉冲经常出现急剧的“跳动”或被急剧地放大。一般而言, 脉冲对系统稳定性的影响是比较复杂的, 即, 脉冲可能使一个系统稳定, 也可能使一个系统发生震荡甚至混沌。因此, 进一步研究带脉冲和时延性质的双向联想记忆网络的动力学行为是非常有必要的。为此, 将进一步分析脉冲对时滞 BAM 网络指数稳定性的影响, 并估计脉冲 BAM 保持指数稳定性的情况下脉冲的上界。

为便于分析, 对系统(3)的平衡点 (x^*, y^*) 做如下变换: $\tilde{x} = x - x^*$ 和 $\tilde{y} = y - y^*$, 则系统(3)变为:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= -C_1 \tilde{x}(t) + W_1 \tilde{f}(\tilde{x}(t)) + A_1 \tilde{f}(\tilde{y}(t-\sigma)), \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= -C_2 \tilde{y}(t) + W_2 \tilde{g}(\tilde{x}(t)) + A_2 \tilde{g}(\tilde{x}(t-\tau)), \\ \Delta \tilde{x}(t_k) &= \tilde{E}_k(\tilde{x}(t_k^-)), k=1, 2, \dots, \\ \Delta \tilde{y}(t_k) &= \tilde{E}_k(\tilde{y}(t_k^-)), k=1, 2, \dots. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中, $\Delta \tilde{x}(t_k) = \tilde{x}(t_k) - \tilde{x}(t_k^-)$, $\Delta \tilde{y}(t_k) = \tilde{y}(t_k) - \tilde{y}(t_k^-)$, $\tilde{E}_k(\tilde{x}(t_k^-)) = \tilde{E}_k(\tilde{x}(t_k^-) + x^*)$, $\tilde{E}_k(\tilde{y}(t_k^-)) = \tilde{E}_k(\tilde{y}(t_k^-) + y^*)$, $\tilde{f}(\tilde{y}(t-\sigma)) = f(\tilde{y}(t-\sigma) + y^*) - f(y^*)$, $\tilde{g}(\tilde{x}(t-\tau)) = g(\tilde{x}(t-\tau) + x^*) - g(x^*)$ 。

定义 1 函数 $V: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ 被称为 v_0 类, 如果:

i) V 是连续的, 在每一个集合 $[t_{k-1}, t_k) \times \mathbf{R}^n$ 中, 对任意 $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k=1, 2, \dots$, 都有 $\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^-, x)} V(t,y) = V(t_k^-, x)$ 存在;

ii) 对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, $V(t, x)$ 是局部的

Lipschitzian, 对任意 $t \geq t_0$, $V(t, 0) = 0$;

在文中, 用 P^T 表示矩阵 P 的转置, $P > 0$ (< 0) 表示矩阵 P 是对称正定(负定的), $\|\cdot\|$ 表示方阵或向量的欧几里德范数, λ_m, λ_M 表示实对称矩阵的最小特征根。

1 主要结果

引理 1 假设 $v: [t-\tau, +\infty] \rightarrow \mathbf{R}^+$, $w: [t-\sigma, +\infty] \rightarrow \mathbf{R}^+$ 满足 Halanay-like 不等式

$$\dot{v}(t) \leq -\alpha_1 v(t) + \beta_1 w(t-\sigma), \quad t \geq t_0;$$

$$\dot{w}(t) \leq -\alpha_2 w(t) + \beta_2 v(t-\tau), \quad t \geq t_0.$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 和 β_2 是正常数, 且满足 $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$ 。那么, 下面的不等式成立

$$\left. \begin{aligned} v(t) &\leq K_0 e^{-\eta(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 - \tau, \\ w(t) &\leq K_0 e^{-\eta(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 - \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中: $K_0 = \max\{\bar{v}(t_0), \bar{w}(t_0)\}$; $\bar{v}(t_0) = \sup_{t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0} v(\theta)$, $\bar{w}(t_0) = \sup_{t_0 - \sigma \leq \theta \leq t_0} w(\theta)$; $\eta \geq 0$ 是满足下面 2 个方程的最大正解

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \eta - \beta_1 e^{\eta\tau} &\geq 0; \\ \alpha_2 - \eta - \beta_2 e^{\eta\sigma} &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

近几年, 系统(3)的指数稳定性的得到了大量研究^[15-21]。然而, 大多数研究结果基于小脉冲条件, 对于大脉冲条件下的时滞双向联想记忆神经网络的研究还比较少。

定理 1 假设 (H) 成立。如果存在 2 个函数 $V_{\tilde{x}} \in v_0$ 和 $V_{\tilde{y}} \in v_0$, 存在正常数 $h_i, \bar{h}_i, \alpha_i, \beta_i, a_i, b_i$ 并且 $\alpha_i > \beta_i$ ($i=1, 2$), 使得

$$\text{i)} h_1 \|\tilde{x}\|^{r_1} \leq V_{\tilde{x}}(t, \tilde{x}) \leq \bar{h}_1 \|\tilde{x}\|^{r_1}, \quad h_2 \|\tilde{y}\|^{r_2} \leq V_{\tilde{y}}(t, \tilde{y}) \leq \bar{h}_2 \|\tilde{y}\|^{r_2};$$

ii) 在区间 $[t_{k-1}, t_k)$ 上, 沿着式(5)的解, $\dot{V}_{\tilde{x}}(t, \tilde{x}(t)) \leq -\alpha_1 V_{\tilde{x}}(t, \tilde{x}(t)) + \beta_1 V_{\tilde{y}}(t-\sigma, \tilde{y}(t-\sigma))$, 且

$$\dot{V}_{\tilde{y}}(t, \tilde{y}(t)) \leq -\alpha_2 V_{\tilde{y}}(t, \tilde{y}(t)) + \beta_2 V_{\tilde{x}}(t-\tau, \tilde{x}(t-\tau));$$

iii) $V_{\tilde{x}}(t_k, \tilde{x}(t_k)) \leq a_k V_{\tilde{x}}(t_k^-, \tilde{x}(t_k^-))$, $V_{\tilde{y}}(t_k, \tilde{y}(t_k)) \leq b_k V_{\tilde{y}}(t_k^-, \tilde{y}(t_k^-))$;

$$\text{iv)} \eta - \frac{\ln c}{\delta} > 0.$$

其中: $c = \sup_k \{\max(\bar{a}_k, \bar{b}_k)\}$, $\bar{a}_k = \max\{a_k, \exp(\eta\tau)\}$, $\bar{b}_k = \max\{b_k, \exp(\eta\sigma)\}$, δ 表示最小的驻留时间, η 表示下面不等式的最大正解

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \eta - \beta_1 \exp(\eta\tau) &\geq 0; \\ \alpha_2 - \eta - \beta_2 \exp(\eta\sigma) &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

那么, 带时延的双向联想记忆神经网络(3)是全局指数稳定的, 而且满足

$$\|x(t) - x^*\| \leq \sqrt{\frac{r_1}{h_1}} \cdot \max\{\|\varphi_x - x^*\|_{\tau}, \|\varphi_y - y^*\|_{\sigma}\} \cdot \exp\left\{-\frac{\eta\delta - \ln c}{\delta r_1}(t - t_0)\right\};$$

$$\|y(t) - y^*\| \leq \sqrt{\frac{r_2}{h_2}} \cdot \max\{\|\varphi_x - x^*\|_{\tau}, \|\varphi_y - y^*\|_{\sigma}\} \cdot \exp\left\{-\frac{\eta\delta - \ln c}{\delta r_2}(t - t_0)\right\}.$$

证明: 设 $\omega_{\tilde{x}}(t) = V_{\tilde{x}}(t, \tilde{x}(t))$, $\omega_{\tilde{y}}(t) = V_{\tilde{y}}(t, \tilde{y}(t))$ 。根据引理 1(ii), 对 $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k=1, 2, \dots$,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\tilde{x}}(t) &\leq \bar{\omega}(t_{k-1}) \exp\{-\eta(t - t_{k-1})\}, \\ \omega_{\tilde{y}}(t) &\leq \bar{\omega}(t_{k-1}) \exp\{-\eta(t - t_{k-1})\}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中: $\bar{\omega}(t_{k-1}) = \max\{\omega_{\tilde{x}}(t_{k-1}), \omega_{\tilde{y}}(t_{k-1})\}$; $\bar{\omega}_{\tilde{x}}(t_{k-1}) = \sup_{t_{k-1} - \tau \leq \theta \leq t_{k-1}} \omega_{\tilde{x}}(\theta)$, $\bar{\omega}_{\tilde{y}}(t_{k-1}) = \sup_{t_{k-1} - \sigma \leq \theta \leq t_{k-1}} \omega_{\tilde{y}}(\theta)$, $\eta > 0$ 。

下面, 将证明下述式子成立。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\tilde{x}}(t) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^{k-1} \exp\{-\eta(t - t_0)\}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k); \\ \omega_{\tilde{y}}(t) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^{k-1} \exp\{-\eta(t - t_0)\}, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

根据引理 1, 对 $k=1, t \in [t_0, t_1)$, 式(10)是显然成立的。假设式(10)对于任意的 $2 \leq s \leq k$ 成立, 即

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\tilde{x}}(t) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^{s-1} \exp\{-\eta(t - t_0)\}, \quad t \in [t_{s-1}, t_s); \\ \omega_{\tilde{y}}(t) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^{s-1} \exp\{-\eta(t - t_0)\}, \quad s=2, 3, \dots, k. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

那么, 对 $s=k+1$ (因而, $t \in [t_k, t_{k+1})$), 由式(9)可得

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\tilde{x}}(t) &\leq \bar{\omega}(t_k) \exp\{-\eta(t - t_k)\}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}); \\ \omega_{\tilde{y}}(t) &\leq \bar{\omega}(t_k) \exp\{-\eta(t - t_k)\}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

因此,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{\tilde{x}}(t_k) &= \sup_{t_k - \tau \leq \theta \leq t_k} \omega_{\tilde{x}}(\theta) \\ &= \max\left\{\sup_{t_k - \tau \leq \theta \leq t_k} \omega_{\tilde{x}}(\theta), \omega_{\tilde{x}}(t_k)\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{t_k - \tau \leq \theta \leq t_k} \omega_{\tilde{x}}(\theta), a_k \bar{\omega}(t_0) c^{k-1} \exp\{-\eta(t_k - t_0)\}\right\}. \end{aligned}$$

显然, 存在一个非负的正整数 q 使得 $t_k - t_q < \tau$, $t_k - t_{q-1} \geq \tau$ (对于 $q=0$, $t_{-1} \equiv t_0 - \tau$)。所以有

$$\begin{aligned} \sup_{t_k - \tau \leq \theta \leq t_k} \omega_{\tilde{x}}(\theta) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^{k-1} \exp(-\eta(t_k - t_0)) \cdot \\ &\max\{\exp(\eta\tau), \exp(\eta(t_k - t_q)), \dots, \exp(\eta(t_k - t_{k-1}))\} \\ &\leq \bar{\omega}(t_0) c^{k-1} \exp(-\eta(t_k - t_0) + \eta\tau). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{\tilde{x}}(t_k) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^{k-1} \exp\{-\eta(t_k - t_0)\} \cdot \max\{\exp(\eta\tau), \\ a_k &= \bar{a}_k \bar{\omega}(t_0) c^{k-1} \exp\{-\eta(t_k - t_0)\}. \end{aligned}$$

类似地, 也可证明

$$\bar{\omega}_{\tilde{y}}(t_k) \leq \bar{b}_k \bar{\omega}(t_0) c^{k-1} \exp\{-\eta(t_k - t_0)\}.$$

将它代入式(12), $\bar{\omega}(t_k) = \max\{\bar{\omega}_x(t_k), \bar{\omega}_y(t_k)\}$, 进而得到

$$\begin{aligned}\omega_x(t) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^k \exp\{-\eta(t-t_0)\}, t \in [t_k, t_{k+1}); \\ \omega_y(t) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^k \exp\{-\eta(t-t_0)\}, t \in [t_k, t_{k+1}).\end{aligned}$$

从而,式(10)在 $s=k+1$ 时也成立,因此,通过数学归纳法,对任意的 $k=1,2,\dots$,式(10)是成立的。

由式(10)可得,对于任意的 $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k=1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}\omega_x(t) &\leq \bar{\omega}(t_0) c^k \exp\{-\eta(t-t_0)\} \\ &= \bar{\omega}(t_0) c^{-1} \exp\left\{-\left(\eta - \frac{k}{t-t_0} \ln c\right)(t-t_0)\right\} \\ &\leq \bar{\omega}(t_0) \exp\left\{-\left(\eta - \frac{\ln c}{\delta}\right)(t-t_0)\right\};\end{aligned}\quad (13)$$

并且

$$\omega_y(t) \leq \bar{\omega}(t_0) \exp\left\{-\left(\eta - \frac{\ln c}{\delta}\right)(t-t_0)\right\}.\quad (14)$$

条件(ii)是为了确保无脉冲的 DBAM 是全局指数稳定的。第三个条件描述在 2 个 v_0 类函数 V_x 和 V_y 的脉冲强度。显然,在时间 t_k 的脉冲强度值为 a_k 和 b_k ,它们分别依赖于函数 $\bar{E}_k$ 和 $\tilde{E}_k$ 。条件(iv)表现的是以下几个值间的关系:无脉冲 BAM 的指数收敛度 η ,最小驻留时间 δ ,数量 c 和脉冲强度 δ ,根据条件(iv)可提出 $c < e^{\delta\eta}$,基于 c 的定义,脉冲的一个预计的上界就可以得到: $a_k, b_k < e^{\delta\eta}$ 。

对于确保带脉冲和时滞的 BAM 模型的平衡点的指数稳定性,定理 1 提供了一个普遍的标准。因为它将稳定性问题转化成满足条件(i)-(iv)的 Lyapunov 型函数 $V_x \in v_0$ 和 $V_y \in v_0$ 的存在性问题,这个定理没有直接确定被给定的系统(3)的指数稳定性。为了得到一个很容易接受的标准,后来,选择了 Lyapunov 函数 $V_x = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x}$ 和 $V_y = \tilde{y}^T P_2 \tilde{y}$,其中, P_1, P_2 是对称正定矩阵。从而,可得出下面的定理。

定理 2 假设存在对称正定矩阵 P_1, P_2 , 正定对角矩阵 Q_1, Q_2 , 正常数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, a_k$ 和 b_k ($k=1, 2, \dots$), 并且 $\alpha_1 > \beta_1, \alpha_2 > \beta_2$, 使得下面的条件成立

$$\begin{aligned}\text{i)} &\begin{cases} \Omega_{11} = -P_1 C_1 - C_1 P_1 + P_1 W_1 S_1^{-1} W_1^T P_1 + S_1 + \\ \quad P_1 A_1 Q_1^{-1} A_1^T P_1 + \alpha_1 P_1 \leq 0, \\ \Omega_{12} = L_f Q_1 L_f - \beta_1 P_2 \leq 0; \end{cases} \\ \text{ii)} &\begin{cases} \Omega_{21} = -P_2 C_2 - C_2 P_2 + P_2 W_2 S_2^{-1} W_2^T P_2 + S_2 + \\ \quad P_2 A_2 Q_2^{-1} A_2^T P_2 + \alpha_2 P_2 \leq 0 \\ \Omega_{22} = L_g Q_2 L_g - \beta_2 P_1 \leq 0; \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} [\tilde{x}(t_k^-) + \bar{E}_k(\tilde{x}(t_k^-))]^T P_1 [\tilde{x}(t_k^-) + \bar{E}_k(\tilde{x}(t_k^-))] \\ \leq a_k \tilde{x}^T(t_k^-) P_1 \tilde{x}(t_k^-); \\ [\tilde{y}(t_k^-) + \tilde{E}_k(\tilde{y}(t_k^-))]^T P_2 [\tilde{y}(t_k^-) + \tilde{E}_k(\tilde{y}(t_k^-))] \\ \leq b_k \tilde{y}^T(t_k^-) P_2 \tilde{y}(t_k^-); \end{cases}$$

$$\text{iv)} \delta\eta - \ln c > 0.$$

其中, c, δ, η 同定理 1 中的定义。那么, DBAM 神经网络系统(3)的平衡点是全局指数稳定的。

证明: 考虑如下函数

$$\begin{cases} V_x = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x}; \\ V_y = \tilde{y}^T P_2 \tilde{y}. \end{cases}\quad (15)$$

容易看出, $V_x \in v_0$ 和 $V_y \in v_0$ 满足在定理 1 中的(i), 且 $r_1 = r_2 = 2$, $h_1 = \lambda_m(P_1)$, $\bar{h}_1 = \lambda_M(P_1)$, $h_2 = \lambda_m(P_2)$, $\bar{h}_2 = \lambda_M(P_2)$ 。下面计算 $V_x = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x}$ 沿着系统(5)的解的导数。

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= 2\tilde{x}^T(t) P_1 [-C_1 \tilde{x}(t) + W_1 \tilde{f}(x(t)) + A_1 \tilde{f}(\tilde{y}(t-\sigma))] \\ &\leq \tilde{x}^T(t) [-P_1 C_1 - C_1 P_1 + P_1 W_1 S_1^{-1} W_1^T P_1 + S_1 + \\ &\quad P_1 A_1 Q_1^{-1} A_1^T P_1] \tilde{x}(t) + \tilde{y}^T(t-\sigma) L_f Q_1 L_f \tilde{y}(t-\sigma) \\ &= -\alpha_1 V_x(t) + \beta_1 V_y(t-\sigma).\end{aligned}\quad (16)$$

同样地,

$$\dot{V}_y = -\alpha_2 V_y(t) + \beta_2 V_x(t-\tau).\quad (17)$$

根据式(16)、(17),可得出定理 1 中条件(ii)成立。本定理的条件(iii)和(iv)可分别推导出定理 1 中的条件(iii)和(iv)。因此,根据定理 1,定理 2 成立。

注 3 文献[15-21]都是基于以下假定条件下:对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, 存在正常数 d_{1k} 和 d_{2k} ($k=1, 2, \dots$), 使得

$$\begin{cases} \bar{E}_k(x) = -d_{1k} x; \\ \tilde{E}_k(x) = -d_{2k} x. \end{cases}\quad (18)$$

在这种情况下,

$$\begin{aligned}&[\tilde{x}(t_k^-) + \bar{E}_k(\tilde{x}(t_k^-))]^T P_1 [\tilde{x}(t_k^-) + \bar{E}_k(\tilde{x}(t_k^-))] = \\ &\quad (1-d_{1k})^2 \tilde{x}^T(t_k^-) P_1 \tilde{x}(t_k^-); \\ &[\tilde{y}(t_k^-) + \tilde{E}_k(\tilde{y}(t_k^-))]^T P_2 [\tilde{y}(t_k^-) + \tilde{E}_k(\tilde{y}(t_k^-))] = \\ &\quad (1-d_{2k})^2 \tilde{y}^T(t_k^-) P_2 \tilde{y}(t_k^-).\end{aligned}\quad (19)$$

然而,这些文献都要求 $0 \leq d_{1k}, d_{2k} \leq 2$ 。但在文中,减弱了约束条件,只需 $a_k = (1-d_{1k})^2, b_k = (1-d_{2k})^2$ 满足定理 2 的条件(iv)。下面的这个推论对于满足条件(18)的系统(5)的指数稳定性是一个容易处理的条件,一个例子(参见第 2 中的例 1)也进一步表明研究的结果比文献[15-21]中的结果更有

优势。

推论 1 当式(18)成立时,如果 $\delta\bar{\eta}-\ln c>0$,则系统(5)的原点是全局指数稳定的,其中 δ 表示最小驻留时间, $c=\sup_k \max\{(1-d_{1k})^2, (1-d_{2k})^2, e^{\bar{\eta}}\}$, $\bar{\eta}=\max \eta$ 是下面的最优化问题的目标值。

$$(P1) \begin{cases} \bar{\eta}=\max \eta; \\ -2\bar{c}_1+\alpha_1+\bar{l}_f^2\beta_1^{-1}\lambda_M\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T\leq 0; \\ -2\bar{c}_2+\alpha_2+\bar{l}_f^2\beta_2^{-1}\lambda_M(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_2^T)\leq 0; \\ \alpha_1-\eta-\beta_1e^{\eta}\geq 0; \\ \alpha_2-\eta-\beta_2e^{\eta}\geq 0; \\ \alpha_1>0, \alpha_2>0, \beta_1>0, \beta_2>0, \eta>0. \end{cases}$$

其中: $\bar{l}_g=\max_{1\leq j\leq n}\{l_j^g\}$; $\bar{c}_1=\min_{1\leq j\leq n}\{c_{1j}\}$; $\bar{c}_2=\min_{1\leq j\leq n}\{c_{2j}\}$; $\bar{l}_f=\max_{1\leq j\leq n}\{l_j^f\}$ 。

证明:选择 $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2=\mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ 表示适当维数的单位阵), $\mathbf{Q}_1=\bar{l}_f^{-2}\beta_1\mathbf{E}$, $\mathbf{Q}_2=\bar{l}_g^{-2}\beta_2\mathbf{E}$, $a_k=(1-d_{1k})^2$, $b_k=(1-d_{2k})^2$ 。根据定理 2,这个推论很容易被证明。

问题(P1)是一个带有非线性约束的最优化问题,它可通过 MatLab 程序 FMINCON 得出数值解。

2 数值例证

例 1 考虑带时延脉冲的 BAM,如图 1 所示

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=-\mathbf{x}(t)+0.5\mathbf{f}(\mathbf{y}(t-0.1))+1.5, t>0, t\neq t_k; \\ \dot{\mathbf{y}}(t)=-\mathbf{y}(t)+0.3\mathbf{g}(\mathbf{x}(t-0.2))+2.7, t>0, t\neq t_k; \\ \Delta\mathbf{x}(t_k)=-d_1[\mathbf{x}(t_k^-)-2], k=1,2,\dots; \\ \Delta\mathbf{y}(t_k)=-d_2[\mathbf{y}(t_k^-)-3], k=1,2,\dots; \\ \mathbf{x}(\theta)=-3, \theta\in[-0.1,0]; \\ \mathbf{y}(\theta)=2, \theta\in[-0.2,0]. \end{cases} \quad (20)$$

其中 $x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, \mathbf{f}(\alpha)=\mathbf{g}(\alpha)=0.5(|\alpha+1|-|\alpha-1|)$, $\bar{c}_1=\bar{c}_2=1, \mathbf{A}_1=0.5, \mathbf{A}_2=0.3, \tau=0.2, \sigma=0.1$, $\bar{l}_f=\bar{l}_g=1$ 。

解最优化问题(P1),得到 $\bar{\eta}=0.951\ 286, \alpha_1=$

$1.475\ 640, \alpha_2=1.467\ 960, \beta_1=0.476\ 772, \beta_2=0.427\ 156$ 。如果 $\delta>e^{0.2\bar{\eta}}\approx 1.209\ 56, -e^{0.475\ 64\delta}+1<d_1, d_2<e^{0.475\ 64\delta}+1$, 那么,平衡点 $(x^*, y^*)=(2, 3)$ 是全局指数稳定的。

假设 $t_k-t_{k-1}=\begin{cases} 1.3, k \text{ 是奇数}; \\ 2.0, k \text{ 是偶数}, k=1,2,\dots, \end{cases}$

则 $\delta=1.3, -e^{0.475\ 64\delta}+1=-0.855\ 8, e^{0.475\ 64\delta}+1=2.855\ 8$ 。进一步选择 $d_1=-0.8, d_2=2.8$ (注意,不必选择 $0\leq d_1, d_2\leq 2$), 那么根据推论 1,平衡点 $(x^*, y^*)=(2, 3)$ 是全局指数稳定的。

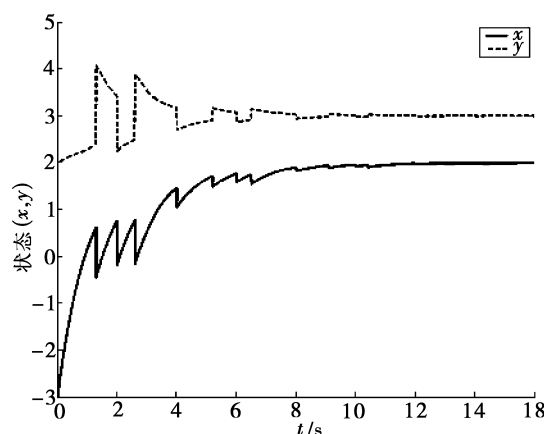


图 1 系统的时间响应曲线

3 结 论

对带脉冲和时延的 BAM 神经网络的全局稳定性问题的处理不同于大部分已发表的文献,它进一步刻画了脉冲的失稳效应。研究结果显示,当无脉冲的 DBAM 指数全局稳定时,大脉冲的 DBAM 也可能保持指数稳定,这是因为脉冲对系统状态的放大作用(促使系统偏离平衡点)被连续时间区间内的无脉冲的 DBAM 指数收敛作用所补偿。结论同样使用于般的时滞 Hopfield 神经网络。

(下转第 780 页)

- feed [C]// Antennas and Propagation Society International Symposium, June 20-25, 2004, Monterey, California. Piscataway: IEEE Press, 2004:4024-4027.
- [11] ANDRENKO A S. Comparative study of wideband properties of planar solid and stri Pfractal bow-tie dipoles [C] // 2005 IEEE/ACES International Conference on Wireless Communications and Applied Computational Electromagnetics, April 3-7, 2005, Honolulu, Hawaii, United States. Piscataway: IEEE Press, 2005:178-181.
- [12] 魏福显,王春和. 电阻加载蝶形天线的性能研究[J]. 物探与化探. 2006,30(5):427-429.
WEI FU-XIAN, WANG CHUN-HE. The capability of the bowtie antenna loaded with a resistor [J]. Geophysical & Geochemical Exploration. 2006, 30(5): 427-429.
- [13] 马卡洛夫. 通信天线建模与 MatLab 仿真分析[M]. 许献国,译. 北京:北京邮电大学出版社, 2006.
- [14] 王均宏,任朗,简水生. V 形振子脉冲天线的形状优化[J]. 通信学报, 1998,19(8):45-49.
- WANG JUN-HONG, REN LANG, JIAN SHUI-SHENG. Optimization of the dipole shapes for maximum peak values of the radiating pulse [J]. Journal of China Institute of Communications, 1998, 19(8):45-49.
- [15] MAKAROV S N. MoM antenna simulations with matlab:RWG basis functions[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2001, 43(5):100-107.
- [16] 赵延文,聂在平,徐建华,等. 基于 RWG 基函数的伽略金法中奇异性积分的精确快速计算[J]. 电子学报, 2005,33(6):1019-1023.
ZHAO YAN-WEN, NIE ZAI-PING, XU JIAN-HUA, et al. Accurate and efficient calculation of singular integrals in galerkin method with RWG basis functions[J]. Acta Electronica Sinica, 2005,33(6):1019-1023.
- [17] BALANIS C A. Antenna theory: analysis and design[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1997: 133-136.

(编辑 张 革)

(上接第 774 页)

参考文献:

- [1] KOSKO B. Adaptive bidirectional associative memories [J]. Applied Optics, 1987,26 (23): 4947-49.
- [2] KOSKO B. Bidirectional associative memories [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1988,18(1):49-60.
- [3] KOSKO B. Unsupervised learning in noise[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1990,1(1):44-57.
- [4] DOMANY E, VAN HEMMEN J L, SCHULTEN K. Models of neural networks[M]. Berlin: spring, 1991.
- [5] VAN DEN DRIESSCHE P, ZOU X. Global attracting in delayed hopfield neural network model[J]. SIAMJ, 1998,58: 1879-1890.
- [6] GOPALSAMY K, HE X Z. Delay-independent stability in bidirectional association memory networks [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1994,5 :998-1002.
- [7] LIAO X, YU J. Qualitative analysis of bi-directional associative memory networks with time delays[J]. Int J Circ Theor, 1998; 26:29-219.
- [8] LI C D, LIAO X F. Delay-dependent exponential stability analysis of bidirectional associative memory neural networks: an LMI approach[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005,24(4): 1119-1134.
- [9] CHEN A, CAO J D, HUANG L. Exponential stability of BAM neural networks with transmission delays[J]. Neuro Computing, 2004, 57:54-435.
- [10] ZHAO H Y. Global stability of bidirectional associative memory neural networks with distributed delays[J]. Phys Lett A, 2002,297:90-182.
- [11] CAO J. Global asymptotic stability of delayed bi-directional associative memory neural networks [J]. Applied Math Computer, 2003, 142:333.
- [12] CAO J D, WANG L. Exponential stability and periodic oscillatory solution in BAM neural networks with delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2002,13(2): 457-463.
- [13] GUAN Z H, JAMES L, CHEN G. On impulsive auto-associative neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2000,13:63.
- [14] GUAN Z H, CHEN G R. On delayed impulsive hopfield neural networks [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999,12 : 273-280.
- [15] LI Y K. Global exponential stability of BAM neural networks with delays and impulses[J]. Chaos, Solitons and Fractals 2005, 24: 279-285.
- [16] XIA Y H, HUANG Z K, HAN M. Existence and globally exponential stability of equilibrium for BAM neural networks with impulses[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 08:45.
- [17] HUAN G Z, XIA Y H. Global exponential stability of BAM neural networks with transmission delays and nonlinear impulses[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 11:32.
- [18] CHEN J, CUI B T. Impulsive effects on global asymptotic stability of delay BAM neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007,01:42.
- [19] LOUX Y, CUI B T. Global asymptotic stability of delay BAM neural networks with impulses[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 29(4): 1023-1031.
- [20] LOU X Y, CUI B T. Global asymptotic stability of delay BAM neural networks with impulses based on matrix theory [J]. Applied Mathematical Modelling. 2008, 32(2): 232-239.

(编辑 侯 湘)