

文章编号:1000-582X(2008)11-1261-06

# 一维损伤变量的合理定义方法

于海祥<sup>1</sup>, 武建华<sup>1</sup>, 李强<sup>2</sup>

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400030; 2. 中国联合工程公司, 杭州 310014)

**摘要:**针对利用“弹性模量衰减法”定义损伤变量是否合理这一问题,借助有效应力的概念以及应变等效假设,从本质上阐述了一维情况下材料损伤变量应该以何种弹性模量来定义。指出从应变等效假设的角度准确度量材料的损伤程度必须首先确定材料的无损伤参考工作状态;将直线形式的应力-应变关系作为无损伤材料的参考工作状态是没有根据的。按照弹性损伤和弹塑性损伤两种状况推导出损伤变量的合理定义,证明卸载模量的退化可以作为弹塑性材料损伤变量的定义。同时,结合所提出的混凝土受压损伤本构方程,验证弹性应变等效假设,并给出一维损伤本构模型的合理建立方法。

**关键词:**损伤变量;弹性模量;弹塑性;应变等效假设

中图分类号:TU528.01

文献标志码:A

## A rational method for defining damage variables in one dimension

YU Hai-xiang<sup>1</sup>, WU Jian-hua<sup>1</sup>, LI Qiang<sup>2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China;

2. China United Engineering Company, Hangzhou 310022, P. R. China)

**Abstract:** To address the issue of whether it is rational to define damage variables through the degradation of elastic modules, we essentially clarified which material module should be used to describe the damage variables in unidimensional cases, and pointed out that the reference undamaged working state of material was needed firstly in order to measure the degree of damage if the strain equivalence hypothesis was used. We maintained it was baseless to consider the linear stress-strain working state as an undamaged reference state. We deduced a rational definition of elastic and elasto-plastic damage variables. We stated that the degradation of an unloading module can be used to define the damage variables. To illustrate the definition of damage variables, we presented an example of establishing a damage constitutive equation of concrete in compression, validate the elastic strain equivalence hypothesis, and provide an appropriate approach for establishing a damage constitutive model.

**Key words:** damage variables; elastic moduli; elastoplasticity; strain equivalence hypothesis

按照损伤力学方法对材料进行力学分析,首先需要解决的问题就是定义合适的损伤变量来描述材料的受损程度。损伤力学发展至今,各国学者从宏

观、微观方面提出了不同形式的损伤变量表达式,如裂纹密度、力学指标的退化、能量的累积、疲劳寿命等等,其中最广泛应用的还是基于有效应力和应变

收稿日期:2008-06-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50178071)

作者简介:于海祥(1980-),男,重庆大学博士研究生,主要从事工程力学及结构工程研究,(E-mail)yhxhlj@163.com。

武建华(联系人),男,重庆大学教授,博士生导师,主要从事工程力学研究,(Tel)023-65120337;

(E-mail)jhwu@cqu.edu.cn。

欢迎访问重庆大学期刊网 <http://qks.cqu.edu.cn>

等效假设的“弹性模量衰减法”。但在应该以何种模量(刚度)的退化作为损伤指标以及无损状态(参考状态)如何确定这两个问题上却存在争议。长期以来,大多数研究将弹塑性材料卸载模量的退化定义为损伤变量<sup>[1-4]</sup>,但在卸载模量的退化为何能描述弹塑性材料的损伤演变这一问题上大多数研究均未给出合理解释。文献[5-6]曾指出将“卸载模量衰减法”应用于弹塑性材料的损伤定义不完全正确,但他们是在假设“无损伤有效应力-应变关系为线弹性直线关系”的基础上得出此结论的,这显然值得商榷。

基于有效应力的概念和应变等效假设,通过理论推导得到了弹性与塑性损伤材料的合理的损伤定义;指出变形模量(割线模量)的退化等价于有效应力的衰减,是度量损伤的基本出发点;证明了卸载刚度的退化可以作为弹塑性材料损伤变量的定义。结合笔者提出的混凝土受压损伤本构模型说明了材料损伤程度的正确度量方法以及一维损伤本构模型的基本构造方法。

## 1 有效应力与应变等效假设

在材料各向同性损伤条件下,Kachanov 提出连续度的概念来描述损伤引起的有效承载面积的减小<sup>[7]</sup>,在此基础上 Rabotnov 提出损伤因子的概念,损伤因子  $D$  表达为<sup>[8]</sup>

$$D = 1 - \psi = \frac{(A - \tilde{A})}{A}, \quad (1)$$

式中,  $\psi$  为连续度,  $A$ 、 $\tilde{A}$  分别为损伤前后的截面面积,按此损伤变量的定义,有效应力  $\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}}$  与名义应力  $\sigma = \frac{F}{A}$  之间的关系可表达为

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)}, \quad (2)$$

损伤变量可通过式(2)由名义应力与有效应力来表达,但有效应力不好测定,为间接地测量损伤, Lemaitre<sup>[9]</sup> 提出了应变等效假设,因此,有效应力作用在无损材料上引起的应变等效于名义应力作用在实际有损伤材料上引起的应变,即材料的变形行为可以采用无损的形式,只需将名义应力  $\sigma$  替换为有效应力  $\tilde{\sigma}$ , 一维情况下,可表示为

$$\epsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E'}, \quad (3)$$

式中,  $E$ 、 $E'$  分别为损伤前后材料的变形模量(割线模量)。将式(2)代入式(3)得到

$$\frac{\sigma}{E(1-D)} = \frac{\sigma}{E'}, \quad (4)$$

由此得到

$$D = 1 - \frac{E'}{E}. \quad (5)$$

式(5)就是利用损伤前后的弹性模量来表达损伤变量的基本公式。

大多数研究将  $E$ 、 $E'$  分别定义为原点初始切线弹性模量和卸载弹性模量。然而这是不完全正确的,首先,对弹性损伤材料而言,卸载按原路径返回,考虑卸载模量毫无意义;其次,对弹塑性材料,仅按照以上推导不能确定  $E'$  即为卸载弹性模量。以下将从有效应力及应变等效假设的基本公式阐述损伤变量的表达方法。

## 2 基于弹性模量退化的损伤描述方法

式(5)的推导是建立在式(3)所表达的应变等效假设的基础之上的。然而,式(3)所表达的过程仅仅为材料在某一外载作用下变形到某一应变  $\epsilon$  所对应的应力-应变关系,既不涉及到卸载过程也不涉及到材料的固有性质,如弹性或弹塑性。式(3)中的  $E$ 、 $E'$  所表达的是材料在虚拟无损状态和实际有损伤状态下同时加载到某一应变状态  $\epsilon$  时,由现时状态  $(\tilde{\sigma}, \epsilon)$ 、 $(\sigma, \epsilon)$  所对应的变形模量。因此,在某一应变状态,损伤变量  $D$  定义为实际受损状态的割线模量相对于无损割线模量的退化,这是基于“弹性模量法”的损伤定义的基本出发点。

### 2.1 弹性损伤描述

由式(2)可以得到

$$D = 1 - \frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}, \quad (6)$$

对弹性变形情况而言,式(6)就是由有效应力定义的损伤变量,因此,损伤变量可以理解为实际应力(损伤状态下的名义应力)相对于有效应力(无损状态的应力)的衰减。倘若能事先确定有效应力  $\tilde{\sigma}$  随应变  $\epsilon$  的变化规律,结合由试验得到的实际损伤状态下的  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线,便可由式(6)方便地确定损伤变量  $D$  的变化规律。

然而,较多的弹性损伤研究中,往往将无损状态的  $\tilde{\sigma}$ - $\epsilon$  曲线取为从原点出发的直线<sup>[10-12]</sup>,直线斜率为原点初始切线弹性模量,认为只要实际  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线脱离了该直线便有损伤发展。对于实际存在的非线性弹性材料而言这显然是不正确的,虽然实际  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线偏离了从原点出发的初始切线,但材料内部却不一定有损伤发展,对于实际存在的如图1所示的橡胶类材料拉伸时的非线性  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线还会得到损伤始终为负值的结论,这显然是不正确的。这说明,

对弹性损伤进行描述,应首先确定无损伤状态的有效应力-应变关系,然后按式(6)或(5)来描述损伤规律,但其中用到的弹性模量  $E$ 、 $E'$  分别为无损伤状态及实际状态的变形模量(割线模量),其损伤描述如图 2 所示;若直接将无损有效应力-应变关系假设为直线关系显然是没有根据的。

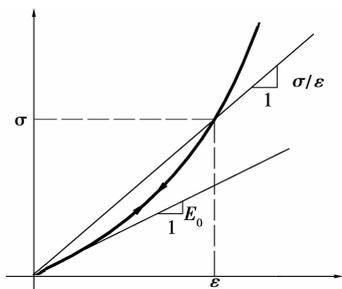


图 1 橡胶类材料实际应力-应变关系

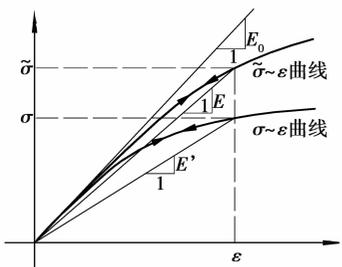


图 2 弹性损伤描述示意图

### 2.2 弹塑性损伤描述

以上对弹性损伤的描述完全适用于加载过程的弹塑性损伤情况。弹塑性损伤与弹性损伤的主要区别在于弹塑性材料加载至某一应力状态卸载时产生不可逆变形,于是存在卸载刚度的概念,下文将推导损伤变量与卸载模量之间的关系。

Lemaitre 的应变等效假设认为受损材料的变形行为完全可以通过有效应力来体现,变形的物理关系完全采用无损伤的形式。进一步假设应变等效不仅是全应变  $\epsilon$  的等效也是弹性应变  $\epsilon_e$  与塑性应变  $\epsilon_p$  的等效,如图 3 所示,即两种状态下对应于同一应变水平进行卸载时所得到的残余应变相等。对弹塑性损伤材料而言,有效应力所对应的  $\tilde{\sigma}-\epsilon$  曲线(无损应力-应变曲线)其卸载模量等于初始弹性模量。两种状态在同一应变  $\epsilon$  处对应的变形模量分别为  $\frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon}$

与  $\frac{\sigma}{\epsilon}$ ,由式(5)得到损伤变量为

$$D = 1 - \frac{E'}{E} = 1 - \frac{\frac{\sigma}{\epsilon}}{\frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon}} = 1 - \frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}, \quad (7)$$

按“弹性应变等效”假设,由图 3 的几何关系得

$$\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{E}}{E_0}, \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)得到

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E_0}, \quad (9)$$

式中,  $E_0$ 、 $\tilde{E}$  分别代表无损伤与实际损伤状态的卸载弹性模量,按照式(9),只要能够测得卸载模量衰减规律便可描述弹塑性材料的损伤演化过程。从上述推导可见,弹塑性材料能用卸载模量的退化表征损伤变量的前提条件是理想无损状态下与实际损伤状态下弹性应变等效或塑性应变等效,在此条件下,卸载模量的退化等同于割线变形模量的退化。

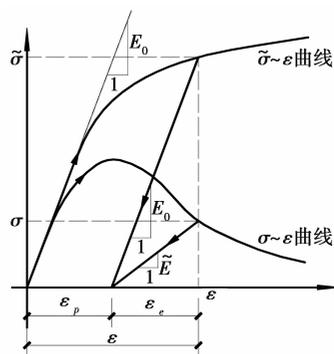


图 3 弹塑性损伤描述示意图

## 3 混凝土受压损伤模型及弹性应变等效假设的验证

### 3.1 损伤模型

笔者通过对圆柱体混凝土试件施加围压,使受压混凝土的裂缝发展受到限制,从而研究混凝土在接近无裂理想临界状态(无损伤受压状态)下的受压性能。通过在 MTS 815.02 岩石电液伺服系统上完成了不同围压约束情况下的混凝土单调、循环加载卸载受压试验,试验中始终保持围压与轴向应力的比例不变,以模拟恰无裂纹开展的受力状态。通过分析试验结果,研究不同围压应力比对混凝土受压应力应变关系的影响规律,通过层析成像技术考察了围压对混凝土裂缝发展的限制作用,确定了混凝土理想无损伤状态的“单轴”单调受压应力-应变关系曲线<sup>[13]</sup>,通过循环加载卸载试验发现该理想无损状态下混凝土具有良好的塑性性质,试验方法及结果详见文献[14]。

通过拟合试验数据得到了 Ramberg-Osgood 形式的“理想无损伤状态”的有效应力-应变  $\tilde{\sigma}-\epsilon$  关

系为

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} E_0 \epsilon, & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \\ f(\epsilon) = E_0 [\epsilon - \alpha(\epsilon - \epsilon_0)^n], & \epsilon \geq \epsilon_0 \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $E_0$  为直线段初始模量,  $\epsilon_0$  为初始损伤点的应变, 试验发现有效应力-应变曲线与实际应力-应变曲线在  $\epsilon_0$  之前是重合的, 即在该段没有损伤发展,  $\epsilon_f$  为实际应力应变曲线中的峰值应力  $f_c$  所对应的应变。常数  $\alpha = 1.79, n = 1.18$ 。

计算混凝土单轴受压应力-应变关系, 首先定义如下的损伤-应变关系

$$D(\epsilon) = \begin{cases} D_0, & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \\ D_0 + A_1(\epsilon - \epsilon_0)^{B_1}, & \epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_f \\ 1 - \frac{(1 - D_f) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_f}\right)^{B_2}}{A_2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_f} - 1\right)^2 + \frac{\epsilon}{\epsilon_f}}, & \epsilon \geq \epsilon_f \end{cases} \quad (11)$$

式中,  $D_0$  为混凝土初始损伤(初始孔洞、裂纹);  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $B_2$  可由应力连续性条件(边界条件)来确定;  $A_2$  为曲线下降段形状参数, 根据不同的混凝土强度等级  $A_2$  的取值范围为 0.4~4.0, 对于常用的中低标号混凝土  $A_2$  可以取为 0.4;  $D_f$  为应变  $\epsilon_f$  对应的损伤。

由式(6)结合图 3 的弹塑性损伤示意图, 得到混凝土一维受压应力-应变关系为

$$\sigma(\epsilon) = \tilde{\sigma}(\epsilon) \cdot (1 - D) = \begin{cases} E_0(1 - D_0)\epsilon, & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \\ [1 - D_0 - A_1(\epsilon - \epsilon_0)^{B_1}]f(\epsilon), & \epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_f \\ \frac{(1 - D_f) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_f}\right)^{B_2}}{A_2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_f} - 1\right)^2 + \frac{\epsilon}{\epsilon_f}} f(\epsilon), & \epsilon_f \leq \epsilon \leq \epsilon_u \end{cases} \quad (12)$$

由条件  $\sigma|_{\epsilon=\epsilon_f} = f_c$ ; 上升段  $\left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_f} = 0$ ;

下降段  $\left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_f} = 0$ , 可以得到

$$B_1 = \frac{\lambda f'(\epsilon_f)(\epsilon_f - \epsilon_0)}{f(\epsilon_f)(1 - D_0 - \lambda)},$$

$$A_1 = (1 - D_0 - \lambda)(\epsilon_f - \epsilon_0)^{-B_1},$$

$$B_2 = \frac{f(\epsilon_f) - \epsilon_f f'(\epsilon_f)}{f(\epsilon_f)},$$

其中  $\lambda = \frac{f_c}{f(\epsilon_f)}$  为峰值应变对应的实际应力与有效应力的比值。

由式(10)、(11)、(12)得到有效应力  $\tilde{\sigma}$ 、损伤  $D$ 、实际应力  $\sigma$  与应变  $\epsilon$  的关系分别如图 4(a)、(b)、(c) 所示。

将式(11)代入式(9)便可得到混凝土单轴受压循环加卸载的卸载刚度  $\tilde{E} = (1 - D)E_0$ 。同样, 如果能得到卸载模量的衰减方程  $\tilde{E} = \tilde{E}(\epsilon)$ , 也可由式(9)直接定义损伤演化方程。

文中模型与以往模型的主要区别在于: 通过试验确定了“无损状态的”应力-应变曲线, 在此基础上由损伤变量定义方法推出了混凝土实际损伤状态的一维受压损伤本构模型。在不计初始损伤的情况下, 模型得到的损伤演化过程与声发射试验<sup>[15]</sup>得到的损伤能率-应变的演化关系的变化过程较为一致(如图 5 所示), 图中 4 条试验曲线代表不同的应变率。图 6 为一维受压情况下, 由文中模型得到的应力-应变曲线与试验结果<sup>[16]</sup>的对比。从图 5 及图 6 可见, 损伤本构模型能较为理想地反映混凝土损伤发育规律, 并且在模拟实际应力-应变响应方面能取得较为精确的结果。因此可以认为: 通过试验方法获得的理想无损应力-应变曲线是合理的。图 6 中按式(9)即  $\tilde{E} = (1 - D)E_0$  获得的卸载-再加载理论线能与试验加卸载滞回曲线较好地吻合, 这进一步证明了损伤变量的退化可表征损伤变量。

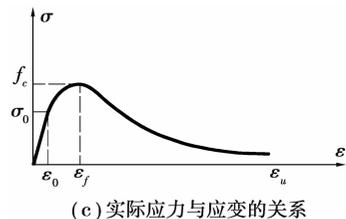
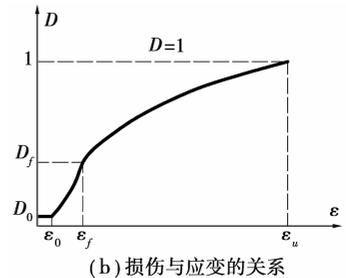
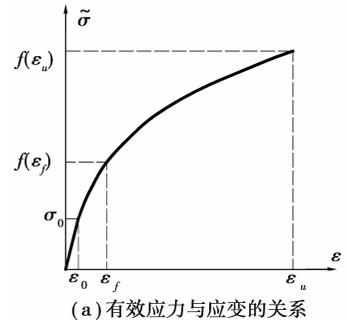


图 4 有效应力  $\tilde{\sigma}$ 、损伤  $D$ 、实际应力  $\sigma$  与应变  $\epsilon$  关系

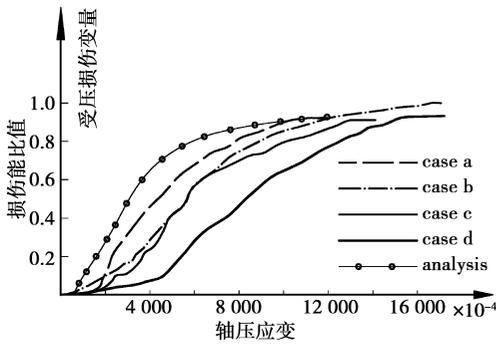


图 5 损伤及声发射能率演化过程图

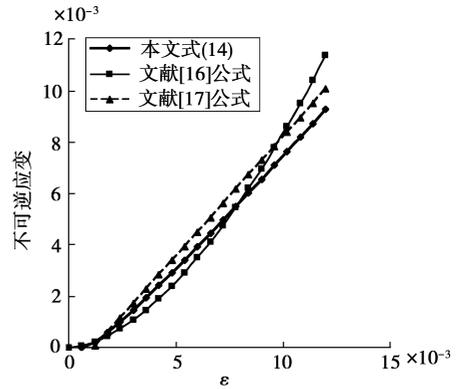


图 7 不可逆应变演化过程

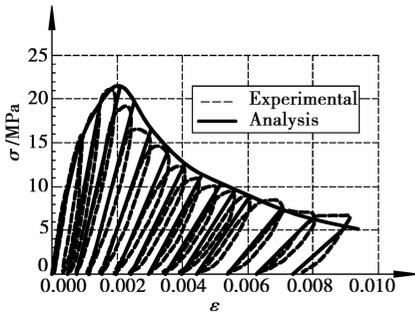


图 6 受压应力-应变曲线

### 3.2 “弹性应变等效”假设的验证

无损弹塑性材料在应变为  $\epsilon$  时卸载所得到的不可逆应变  $\epsilon^p$  为

$$\epsilon^p = \epsilon - \epsilon^e = \epsilon - \frac{\sigma}{E_0}, \quad (13)$$

将式(10)代入式(16)得到理想状态对应的卸载塑性应变为

$$\epsilon^p = \alpha(\epsilon - \epsilon_0)^n, \quad (14)$$

文献[16-17]通过反复加卸载试验回归得到的混凝土单轴受压不可逆变形的表达式分别为

$$\frac{\epsilon^p}{\epsilon_f} = 0.27 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_f} \right)^{1.7}, \quad (15)$$

$$\frac{\epsilon^p}{\epsilon_f} = -0.526715 + 0.925071 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_f} \right). \quad (16)$$

图 7 为式(14)(理想无损状态)与文献[16-17](实际受力状态)所得的不可逆应变回归曲线的比较,可见,三者吻合较好,说明理想状态与实际状态的塑性应变演化规律相同,可认为理想无损状态与实际损伤状态在同一应变水平下卸载得到的不可逆应变相等,即弹性应变等效假设成立;由此验证图 3 的示意是正确的,说明损伤变量可以表达为卸载模量的退化。

## 4 结 论

对于所有损伤材料,其损伤程度均可用加载过程中的变形模量的退化来描述,但必须以材料无损伤时的有效应力所对应的变形模量为参考变形模量;对于弹塑性损伤材料,变形模量的退化等价于卸载模量的退化。在试验基础上提出的混凝土理想弹塑性应力-应变曲线是描述无损伤材料的一个合理尝试。最后,通过混凝土的受压损伤演化方程,说明了构建一维损伤模型的基本方法,证明了卸载模量的退化可以作为弹塑性材料的损伤定义。

### 参考文献

[1] JASON L, HUERTA A, PIJAUDIER-CABOT G. An elastic plastic damage formulation for concrete: application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195: 7077-7092.

[2] GRASSL P, JIRASEK M. Damage-plastic model for concrete failure[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(22-23): 7166-7196.

[3] BREBBIA C A, NISHIDA S I. Damage and fracture mechanics VII [M]. Boston: Wit Press, 2003.

[4] 李兆霞. 损伤力学及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[5] 谢和平, 鞠杨, 董毓利. 经典损伤定义中的“弹性模量法”探讨[J]. 力学与实践, 1997, 19(2): 1-5.

XIE HE-PING, JU YANG, DONG YU-LI. Discussion on the method of elastic module in the classic damage defination[J]. Mechanics and Practice, 1997, 19(2), 1-5.

- [6] 邓宗才, 钱在兹. 钢纤维混凝土的弹塑性损伤模型[J]. 力学与实践, 2000, 22(4): 34-37.  
DENG ZONG-CAI, QIAN ZAI-ZI. Elastic plastic damage model for steel fiber concrete[J]. Mechanics and Practice, 2000, 22(4): 34-37.
- [7] 于海祥, 武建华, 李强. 混凝土损伤本构模型研究评述[J]. 重庆建筑大学学报, 2007, 29(2): 68-72.  
YU HAI-XIANG, WU JIAN-HUA, LI QIANG. A review of concrete damage constitutive models[J]. Journal of Chongqing Jianshu University, 2007, 29(2): 68-72.
- [8] 吴建营. 基于损伤能释放率的混凝土弹塑性损伤模型及其在结构非线性分析中的应用[D]. 上海: 同济大学土木工程学院, 2004.
- [9] LEMAITRE J. Evolution of dissipation and damage in metals subject to dynamic loading [C]. Japan: Proc ICM-1, Kyoto, 1971.
- [10] MAZARS J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure [C]. Univ: Thèse de Doctorat d'Etat paris VI, 1984.
- [11] 余天庆. 混凝土的分段线性损伤模型[J]. 岩石、混凝土断裂与强度, 1985(2): 14-16.  
YU TIAN-QING. Sectional linear damage model for concrete [J]. Fracture and Strength for Rock and Concrete, 1985(2): 14-16.
- [12] 钱济成, 周建方. 混凝土的两种损伤模型及其应用[J]. 河海大学学报, 1989(3): 40-47.  
QIAN JI-CHENG, ZHOU JIAN-FANG. Two concrete damage models and their application [J]. Journal of Hohai University, 1989(3): 40-47.
- [13] JIAN-HUA WU, HAI-XIANG YU, QIANG LI. Damage constitutive model for concrete based on ideal undamaged state [C] // The Fifth International Conference on Nonlinear Mechanics (ICNM-V). Shanghai: Press of Shanghai University, 2007.
- [14] 武建华, 于海祥, 李强, 等. 定围压比作用下混凝土轴向受压性能试验研究[J]. 实验力学, 2007, 22(2): 142-148.  
WU JIAN-HUA, YU HAI-XIANG, LI QIANG, et al. Experimental study on axial property for concrete with constant surrounding pressure ratio [J]. Journal of Experimental Mechanics, 2007, 22(2): 142-148.
- [15] 董毓利, 谢和平, 赵鹏. 砼全过程损伤的实验研究[J]. 实验力学, 1995, 10(2): 95-102.  
DONG YU-LI, XIE HE-PING, ZHAO PENG. Experimental study of the whole damage process [J]. Journal of Experimental Mechanics, 1995, 10(2): 95-102.
- [16] 过镇海, 张秀琴. 反复荷载下混凝土的应力-应变全曲线的试验研究[R]. 清华大学科学研究报告集第三集. 北京: 清华大学出版社, 1981: 1-18.
- [17] 董毓利, 谢和平, 赵鹏. 受压混凝土的不可逆变形与刚度衰减的研究[J]. 上海力学, 1996, 17(3): 211-215.  
DONG YU-LI, XIE HE-PING, ZHAO PENG. Study on the irreversible deformation and stiffness degradation of compressed concrete [J]. Journal of Shanghai Mechanics, 1996, 17(3): 211-215.

(编辑 陈移峰)