

文章编号:1000-582X(2009)06-701-04

受切向约束的空间曲线造型算法

狄 岚¹, 沈美芳¹, 林 意¹, 刘 莉²

(1. 江南大学 信息工程学院, 江苏 无锡 214122;
2. 西南民族大学 计算机科学与技术学院, 四川 成都 610041)

摘要:研究了空间过型值点处受三维切向约束的三维空间曲线,提出了一种受切向约束的空间曲线造型算法,达到 G^1 光滑,并且在剪切变形最小意义下,曲线是光顺的。由于不涉及到反求运算,计算速度很快,可在 CNC 插补运算中得到运用。在算法的实现中选择了三维圆柱曲面,把曲线型值点选定在了圆柱曲面上,并将曲线投影到该圆柱曲面。研究成果对数控加工、检具设计等应用领域具有实用意义。

关键词:型值点; G^1 光滑; 光顺曲线; 曲线造型

中图分类号: TP391.72

文献标志码: A

A space curve segment construction algorithm that accepts tangential directions

DI Lan¹, SHEN Mei-fang¹, LIN Yi¹, Liu Li²

(1. School of Information Technology, Jiangnan University, Wuxi 214122, P. R. China;
2. School of Computer Science & Technology, South west national University, Chengdu 610041, P. R. China)

Abstract: The study of space curve segments passing through given data points and that accept the tangential directions is practical in fields such as numerical control processing and checking tool design. An algorithm for space curve segment construction that accepts the tangential directions is proposed. The algorithm can maintain G^1 continuity, while the curve is fairness under minimal shearing deformation. Because it does not need converse the control points, the computing speed is fast. This method thus can be used in CNC. The method is realized in a 3D cylinder surface. The given data points are selected on the cylinder surface, and the curve is projected on the surface. The experimental result shows that the algorithm is feasible and effective.

Key words: control points; G^1 smooth; smooth curve; curve modeling

摩托车中心管、手抓管弯制后,需要在弯管检具上进行检验。检验内容主要有 2 个方面:一是管子的某些点是否在相应的空间位置上;二是在这些点处管子是否与指定方向吻合。把这问题抽象成数学问题便是:找一空间曲线 $R(t)$,使得 $R(t)$ 过给定型

值点 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$,同时,在 P_i 处满足相应的切线约束条件。

众所周知,平面上二次 B 样条曲线,过控制点 P_i, P_{i+1} 连线的中点并与 2 点连线相切,因此解决平面上这类问题,只需反算出控制点便可^[1]。但在 3D

收稿日期:2009-02-10

基金项目:四川省科技支撑计划资助项目(2008GZ0145)

作者简介:狄岚(1965-),女,江南大学教师,主要从事计算机图形学,数字图像处理,虚拟现实方向研究,

(Tel)13961823230; (E-mail)dilan126@163.com。

欢迎访问重庆大学期刊社网 <http://qks.cqu.edu.cn>

空间中过型值点 P_i 并满足切向约束的直线,不一定与过型值点 P_{i+1} 并满足切向约束的直线相交,即如控制点难以确定,因而采用二次 B 样条曲线很难得到这问题的解。至于三次 B 样条曲线,满足 P_i 处的插值条件及曲线两端点的几何约束是可以求解的,但若要求每个型值点 P_i 满足插值和切向约束,则一般无解。因此,目前弯管的检具设计较为困难,大多数是依据经验不断调整得到的,设计周期长,精度也不一定很好。基于文献[2],笔者提出一种三维空间曲线造型算法,满足过型值点,并受切向约束,曲线可达到 G^1 光滑,在剪切变形最小意义下曲线是光顺的。由于计算过程中没有涉及反求运算,因而计算速度很快,也可以在 CNC 插补运算中得到运用。

1 最小剪切变形的光顺性

一般来讲,光顺性的讨论是在分段曲线上进行的。分段曲线在拼接点处可能达到一定的光滑度,但其三阶导数在拼接点上会出现跳跃,这些跳跃的累加表现为曲线由直线的剪切变形而得,也就是说,若把曲线看作是材料力学中细梁受若干点载荷时的弹性曲线,回弹量小就看作相应点载荷小或剪切力变化小。此时,一般不会出现多余拐点,即这段曲线较为光顺,因此,曲线的光顺条件可以按下列泛函最小值得到^[3]

$$\min \sum_{i=2}^{n-1} \| \mathbf{R}'''(t_{i+0}) - \mathbf{R}'''(t_{i-0}) \|^2,$$

其中: $\mathbf{R}'''(t_{i+0})$ 是第 i 段曲线在 t_i 处的三阶导数值, $\mathbf{R}'''(t_{i-0})$ 是第 $i-1$ 段曲线在 t_i 处的三阶导数值。

当然,也有以曲线拥有最小物理变形能量为目标,进而采用变分原理得到光顺曲线的。经过理论分析和实验比较^[4],得出两者的曲线态势是相当一致的。因此采用

$$\min \sum_{i=2}^{n-1} \| \mathbf{R}'''(t_{i+0}) - \mathbf{R}'''(t_{i-0}) \|^2$$

作为光顺性依据。

2 受切向约束的空间曲线

首先考虑 2 个型值点 P_1, P_2 处受到切向约束的情况。具体问题就是求曲线 $P_1 P_2$, 使得

- 1) 过 P_1, P_2 点;
- 2) 在 P_1, P_2 点处切线方向为 v_1, v_2 。

由于这时只有一段曲线,涉及不到光顺性要求,故暂不考虑这个情况。下面构造曲线

$$R_1(t) = \frac{t-t_2}{t_1-t_2} P_1 + \frac{t-t_1}{t_2-t_1} P_2$$

$$+ \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} a_1 + b_1 \right) \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_2-t_1)(t_1-t_2)},$$

其中: P_1, P_2 是相应点的坐标, a_1, b_1 是待定的空间向量。于是,有

$$R_1(t_1) = P_1, \quad R_1(t_2) = P_2,$$

即 $R_1(t)$ 是经过型值点 P_1, P_2 的。又因为

$$R_1'(t_1) = \frac{P_1 - P_2 - b_1}{t_1 - t_2}, \quad R_1'(t_2) = \frac{P_1 - P_2 + a_1 + b_1}{t_1 - t_2},$$

由 $R_1'(t_1) = v_1, R_1'(t_2) = v_2$, 得:

$$a_1 = -2(P_1 - P_2) + (t_1 - t_2)(v_1 - v_2)$$

$$b_1 = P_1 - P_2 - (t_1 - t_2)v_1,$$

即如此得到的曲线满足上述条件 1), 2)。

假使第 $i-1$ 段曲线已经构造出来,下面求第 i 段曲线,使得

- 3) 过 P_i, P_{i+1} 点; ($i = 2, 3, \dots, n$)。
- 4) P_{i+1} 点处切线方向为 v_{i+1} 。
- 5) P_i 处与曲线 $R_{i-1}(t)$ 达到 G^1 光滑。

令

$$R_i(t) = \frac{t-t_{i+1}}{t_i-t_{i+1}} P_i + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} P_{i+1} + \left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} a_i + b_i \right) \frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})}{(t_{i+1}-t_i)(t_i-t_{i+1})},$$

于是,得 $R_i(t_i) = P_i, R_i(t_{i+1}) = P_{i+1}$,

$$\text{又 } R_i'(t_i) = \frac{P_i - P_{i+1} - b_i}{t_i - t_{i+1}},$$

$$R_i'(t_{i+1}) = \frac{P_i - P_{i+1} + a_i + b_i}{t_i - t_{i+1}}.$$

由 5) 知: $R_i'(t_i) = k_{i-1} R_{i-1}'(t_i) = k_{i-1} v_i$

所以 $b_i = P_i - P_{i+1} - k_{i-1}(t_i - t_{i+1})v_i$ 。

又由 4) 知: $R_i'(t_{i+1}) = v_{i+1}$ 。

得 $a_i = -2(P_i - P_{i+1}) + (t_i - t_{i+1})(k_{i-1}v_i + v_{i+1})$

故

$$R_i(t) = \frac{t-t_{i+1}}{t_i-t_{i+1}} P_i + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} P_{i+1} + \left\{ \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} [-2(P_i - P_{i+1}) + (t_i - t_{i+1})(k_{i-1}v_i + v_{i+1})] + [P_i - P_{i+1} - k_{i-1}(t_i - t_{i+1})v_i] \right\} \frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})}{(t_{i+1}-t_i)(t_i-t_{i+1})}.$$

其中 k_{i-1} 是待定系数,下面根据光顺性要求求出 k_{i-1} ,即要求出 k_{i-1} ($i = 2, 3, \dots, n$),使得

$$L = \sum_{i=2}^n \| \mathbf{R}'''(t_{i+0}) - \mathbf{R}'''(t_{i-0}) \|^2 =$$

$$\sum_{i=2}^n \left\| \frac{6a_i}{(t_{i+1}-t_i)^2(t_i-t_{i+1})} - \frac{6a_{i-1}}{(t_i-t_{i-1})^2(t_{i-1}-t_i)} \right\|^2.$$

达到最小。

为了讨论方便,这里仅对均匀分割结点进行分析,于是讨论下面泛函的极值

$$L = \sum_{i=2}^n \| \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i-1} \|^2 = \| -2(P_2 - P_3) - (k_1 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 2(P_1 - P_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \|^2 + \sum_{i=3}^n \| -2(P_i - P_{i+1}) - (k_{i-1} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}) + 2(P_{i-1} - P_i) + (k_{i-2} \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}_i) \|^2,$$

$$\text{令 } \frac{\partial L}{\partial k_i} = 0, (i=1, 2, \dots, n),$$

可得到下列方程组:

$$\begin{aligned} &[-2(P_2 - P_3) - (k_1 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 2(P_1 - P_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)] \cdot (-\mathbf{v}_2) + [-2(P_3 - P_4) - (k_2 \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) + 2(P_2 - P_3) + (k_1 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)] \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \\ &[-2(P_i - P_{i+1}) - (k_{i-1} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}) + 2(P_{i-1} - P_i) + (k_{i-2} \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}_i)] \cdot (-\mathbf{v}_i) + \\ &[-2(P_{i+1} - P_{i+2}) - (k_i \mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{v}_{i+2}) + 2(P_i - P_{i+1}) + (k_{i-1} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})] \cdot \mathbf{v}_i = 0, \end{aligned}$$

其中 $i = 3, 4, \dots, n-1$.

$$[-2(P_n - P_{n+1}) - (k_{n-1} \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n+1}) + 2(P_{n-1} - P_n) + (k_{n-2} \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n)] \cdot (-\mathbf{v}_n) = 0,$$

这是一个三对角方程组,可以利用追赶法求出 k_i .

3 算法的实现与讨论

根据上述理论分析,用 MATLAB 编程实现了一些例子,为了得到相应的立体效果,把曲线型值点选定在了圆柱曲面上,并将曲线投影到该圆柱曲面,圆柱曲面方程为: $x^2 + y^2 = 1$,箭头代表型值点处的切线方向如图 1 所示。由于整个计算中只涉及到追赶法求解三对角方程组,因此计算量很小,在普通微机上运行速度也很快,从图 1 中可见,上述算法效果很好。

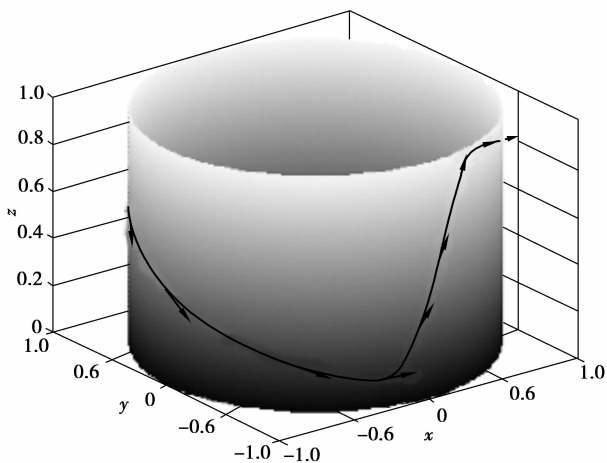
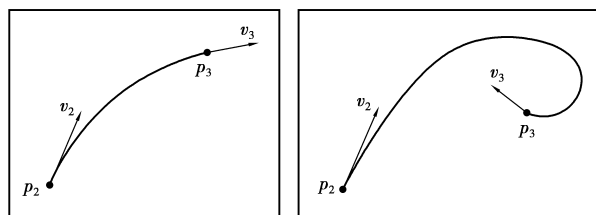


图 1 圆柱面上的切向约束曲线

这里需要指出的是,型值点处的切向约束不能太随意,应当满足以下不等式方程组

$$\begin{cases} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \geq 0; \\ 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_i \geq 0; \\ \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n-1} \cdot \mathbf{v}_n \geq 0. \end{cases}$$

否则,出现的曲线会有异常。例如 $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \geq 0$ 即 $\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \geq 0$,这意味着 \mathbf{v}_2 与 $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ 的夹角不能大于 90° ,也就是说 \mathbf{v}_2 的方向不能与 \mathbf{v}_3 的方向偏离太多。这说明如图 2(b)所示的光顺曲线难以构造,而如图 2(a)所示的光顺曲线就可以构造。



(a) 2个切向偏离不多的曲线 (b) 2个切向偏离太多的曲线

图 2 2个切向的不同约束情况

4 结 语

笔者提出的一种空间曲线造型算法,满足过型值点,并受切向约束,曲线可达到 G^1 光滑,在剪切变形最小意义下曲线是光顺的。由于计算过程中没有涉及反求运算,因而计算速度很快,也可以在 CNC 插补运算中得到运用。实验结果表明,该算法是可行和有效的。

参考文献:

[1] 苏翊,林意,邱利琼. 一种过控制顶点的二次均匀 B 样条曲线[J]. 重庆大学学报,2005,28(5): 99-101.
SU HONG, LIN YI, QIU LI-QIONG. Two degree B-spline curve through control points[J]. Journal of Chongqing University, 2005,28(5): 99-101.

[2] 林意,袁琦陆,何援军. 一种过型值点的快速曲线造型算法[J]. 工程图学学报,2005, 26(4):72-76.
LIN YI, YUAN QI-MU. A rapid algorithm for constructing curve segments passing through the given data points[J]. Journal of Engineering Graphics, 2005, 26(4):72-76.

[3] 苏步青,华宣积,忻元龙. 实用微分几何引论[M]. 北京:科学出版社,1998.

[4] 林意,谢成康. 基于能量法光顺的自由曲线快速算法[J]. 计算机应用研究,2006(11): 236-238.
LIN YI, XIE CHENG-KANG. Rapid algorithm based on energy of curve segments passing through given data

- points [J]. Application Research of Computers, 2006(11):236-238.
- [5] 潘永娟, 王国瑾. 一类平面参数曲线的保单调插值[J]. 软件学报, 2003, 14(8): 1439-1447.
PAN YONG-JUAN, WANG GUO-JIN. Monotonicity-reserving interpolation with a kind of plane parameter curve [J]. Journal of Software, 2003, 14 (8): 1439-1447.
- [6] KUIJT F, DAMME R. Shape preserving interpolatory subdivision schemes for nonuniform data[J]. Journal of Approximation Theory, 2002(114):1-32.
- [7] 林意, 吴锡生. 一种图象区域边缘表达方法[J]. 重庆大学学报, 2006, 29(7):77-79.
LIN YI, WU XI-SHENG. Expressing method of the edge of image region [J]. Journal of Chongqing University, 2006, 29(7):77-79.
- [8] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [9] 丁友东, 华宣积. 基于光顺优化的 NURBS 曲线权因子估计方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 12(5):325-329.
DING YOU-DONG, HUA XUAN-JI. Weights estimation for NURBS curves based on fairing optimization[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 12(5):325-329.
- [10] 纪小刚, 龚光容. 基于半正交 B 样条小波的任意控制顶点数曲线光顺[J]. 工程图学学报, 2006(2):20-23.
JI XIAO-GANG, GONG GUANG-RONG. Curve fairing with arbitrary number of control vertices by semi-orthogonal B-spline wavelets [J]. Journal of Engineering Graphics, 2006(2):20-23.
- [11] COHEN E, SCHUMAKER L L. Rates of convergence of control polygons [J]. Computer Aided Geometric Design, 1985, 2(1/3):229-235.
- [12] SAPIDIS N, FARIN G. Automatic fairing algorithm for B-spline curves[J]. Computer Aided Design, 1990, 22(2):121-129.
- [13] MAMAR E. Shape preserving alternatives to the rational bezier mode [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(1):37-60.
- [14] ORUC H, PHILLIPS G H. Q-bernstein polynomials and bezier curves [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics 2003, 151(1): 1-12.
- [15] ZHANG J W. C-cues: an extension of curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13 (2): 199-217.

(编辑 侯 湘)

~~~~~

(上接第 700 页)

- [12] HSIEH J W. Image registration using a new edge-based approach [J]. Computer Vision and Image Understanding, 1997, 67(2):112-130.
- [13] 杨丹, 张小洪. 基于小波多尺度积的边缘检测算法[J]. 计算机科学, 2004, 31(1): 133-135.  
YANG DAN, ZHANG XIAO-HONG. Edge detection algorithm based on wavelet multiscale product [J]. Computer Science, 2004, 31(1): 133-135.
- [14] 葛永新, 杨丹, 张小洪. 基于特征点对齐度的图像配准方法[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(2):425-428.  
GE YONG-XIN, YANG DAN, ZHANG XIAO-HONG. A new method for image registration based on alignment metric of edge feature points [J]. Journal of Electronic and Information Technology, 2007, 29(2): 425-428.
- [15] 葛永新, 杨丹, 张小洪. 基于边缘特征点对齐度的图像配准方法[J]. 中国图象图形学报, 2007, 12(7): 1291-1295.  
GE YONG-XIN, YANG DAN, ZHANG XIAO-HONG. A new method for image registration based on alignment metric of edge feature points [J]. Journal of Image and Graphics, 2007, 12(7): 1291-1295.
- [16] 张见威, 韩国强, 沃焱. 基于边界距离场互信息的图像配准方法[J]. 通信学报, 2006, 27(7):87-93.  
ZHANG JIAN-WEI, HAN GUO-QIANG, WO YAN. Image registration method based on mutual information about distance field of image edges [J]. Journal on Communications, 2006, 27(7):87-93.
- [17] 周竹荣, 邱玉辉, 夏磊. 基于互信息和本体的协同检索模型的研究[J]. 计算机科学, 2008, 35(4):165-167.  
ZHOU ZHU-RONG, QIU YU-HUI, XIA-LEI. Research on the mutual information and ontology based collaboration retrieve model [J]. Computer Science, 2008, 35(4):165-167.

(编辑 侯 湘)