文章编号:1000-582X(2010)02-0028-08

Takagi-Sugeno 模糊控制系统稳定性的充要条件的逼近

丁宝苍,胡友强,罗小锁,柴　毅
(重庆大学 自动化学院,重庆 400044)

摘　要:分析了 Takagi-Sugeno(T-S)模糊控制稳定性,其中 Lyapunov 函数包括公共二次型 Lyapunov 函数、分段二次型 Lyapunov 函数、模糊 Lyapunov 函数、非二次型 Lyapunov 函数、齐次多项式型 Lyapunov 函数,控制律包括并行分布补偿控制律、非并行分布补偿控制律和齐次多项式型参数化控制律。基此,通过采用 Polya 定理、齐次多项式技术等,给出 T-S 模糊控制的稳定性的充要条件的逼近方法。

关键词:模糊控制;稳定性;Lyapunov 方法;充要条件
中图法分类号:TP273　　　　文献标志码:A

Approximation of the necessary and sufficient conditions for stability of Takagi-Sugeno fuzzy control systems

DING Bao-Cang, HU You-Qiang, LUO Xiao-Suo, CHAI Yi
(College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: An extensive analysis on the existing results for the stability of Takagi-Sugeno fuzzy control is given. For the Lyapunov functions, the common quadratic Lyapunov functions, piecewise quadratic Lyapunov functions, fuzzy Lyapunov functions, nonquadratic Lyapunov functions and homogenously polynomially parameterized Lyapunov functions are considered. For the control laws, the parallel distributed compensation laws, non-parallel distributed compensation laws and homogenously polynomially parameterized control laws are considered. Based on the analysis, by applying the Polya's theorem and the techniques for homogenous polynomials, the approaches for approximating the necessary and sufficient conditions for stability of T-S fuzzy control are given.

Key words: fuzzy control; stability; Lyapunov method; necessary and sufficient condition

20 世纪 60 年代,L. A. Zadeh 提出模糊集合理论[1-3]。40 年来,模糊集合与系统理论已经在控制工程、模式识别、信号处理、信息处理、机器智能、决策支持等很多领域得到了广泛的应用。模糊逻辑控制是最早应用模糊集合与系统理论的领域之一。最早提出模糊控制的是 Mamdani 和 Assilian[4-5]。在文[6]中,作者将模糊控制的研究粗略地分为 6 类:传统的模糊控制(即 Mamdani 和 Assilian 提出的模糊控制)、模糊 PID 控制、神经网络模糊控制、模糊滑模控制、自适应模糊控制、基于 Takagi-Sugeno 模型的模糊控制,并对这 6 类简要地进行了回顾。文[6]主要针对基于 Takagi-Sugeno 模型的模糊控制的稳定性进行了分析,考虑了 3 类 Lyapunov 函数:公共二次型 Lyapunov 函数、分段二次型 Lyapunov 函

收稿日期:2009-08-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60874046,60504013);重庆市自然科学基金资助项目(CSTC2008BB2049)
作者简介:丁宝苍(1972-),重庆大学教授,博士,主要从事预测控制、模糊控制、网络控制与分布式控制方向研究,(Tel) 15826160489;(E-mail)baocang.ding@gmail.com。

数、模糊 Lyapunov 函数。

除了考虑文[6]的 3 种 Lyapunov 函数（不作为最重要的）外，还要分析基于不同于模糊 Lyapunov 函数的非二次型 Lyapunov 函数的方法、基于齐次多项式型 Lyapunov 函数和齐次多项式型控制律的方法。最重要的是，给出对稳定性充要条件的逼近方法，该方法广泛地采用齐次多项式技术、多项式理论中的 Polya 定理等，属于总结性成果。

尽管传统的模糊控制在很多领域得到了应用，但是关于这种控制方法的闭环稳定性分析很难进行，Lyapunov 方法也很难奏效。主要原因是传统的模糊控制是启发式、是无模型控制。要系统地应用 Lyapunov 方法、系统地得到各种控制器设计方法，需要采用状态空间模型。由日本学者 Takagi 和 Sugeno 提出的 Takagi-Sugeno 模型（简称 T-S 模型），适应了理论成果的要求。最近 15 年来，由于可用线性矩阵不等式（LMI）技术处理稳定性条件，关于 T-S 模糊控制系统的稳定性研究得到了蓬勃发展。针对 T-S 模糊控制系统的稳定性研究已经出现了系统化的成果，并且出现了一定意义上的充要条件[7]。

1　系统描述

笔者考虑的系统具有如下形式[8]

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 为系统状态，一般假设为可测的；$\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_m]^{\mathrm{T}}$ 为系统输入；$\boldsymbol{\mu}=[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r]^{\mathrm{T}}$ 为时变的系数，满足

$$\mu_i(z(t))\geqslant 0, i\in\{1,2,\cdots,r\}, \sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))=1, \tag{2}$$

在模糊控制中称 $\mu_i(z(t)), i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 为标准化的隶属度函数；$\boldsymbol{z}=[z_1,z_2,\cdots,z_p]^{\mathrm{T}}$ 在模糊控制中称为前提变量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))&=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\\&=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\boldsymbol{B}_i,\end{aligned} \tag{3}$$

如果取 $z(t)=t$，则式(1)变成非模糊控制背景下的一般参数时变系统，即

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(t)\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{r}\mu_i(t)\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}(t), \tag{4}$$

其中的时变系数 $\mu_i(t), i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 满足

$$\mu_i(t)\geqslant 0, i\in\{1,2,\cdots,r\}, \sum_{i=1}^{r}\mu_i(t)=1, \tag{5}$$

当在每个时刻都不能确定 $\mu_i(t), i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 的值时，则称式(4)为多胞描述不确定系统，该系统在鲁棒控制[9]中得到了大量的研究。很多文献也称这种情况下的式(4)为线性参数时变（LPV）系统；有些文献还假设 $\mu_i(t)$ 在当前时刻有确定的值，而在未来时刻的值不知道，此时系统被称为准线性参数时变（quasi-LPV）系统，该系统在鲁棒预测控制中可见到[10]。当在每个时刻（包括未来时刻）都能确定 $\mu_i(t), i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 的值时，可以将(4)写为 $\boldsymbol{x}(t+1)=\overline{\boldsymbol{A}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\overline{\boldsymbol{B}}(t)\boldsymbol{u}(t)$，属于一般的线性时变系统[10]，不属于稳定性讨论的范围。

在式(4)中，如果 $\mu_i(t)=\mu_i, i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 的值是不确定的、但不随时间变化，即

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{r}\mu_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}(t), \tag{6}$$

$$\mu_i\geqslant 0, i\in\{1,2,\cdots,r\}, \sum_{i=1}^{r}\mu_i=1, \tag{7}$$

则称式(4)为时不变多胞描述不确定系统，该系统在不确定系统的稳定性研究中经常见到[11]。

在模糊 T-S 模型描述的式(1)中，一般假设 $z(t)$ 可测、$\mu(z(t))$ 为确切的函数。一般的 T-S 模糊系统的稳定性属于非线性系统的稳定性。利用式(2)，非线性系统的研究可以利用很多线性系统的知识。研究 T-S 模糊系统的同时也能解决非模糊控制系统中的稳定性问题，以减少研究成果的局限性。

一般地，关于时变多胞描述不确定系统的稳定性研究成果可以用于时不变多胞描述不确定系统，因为后者是前者的特例；在独立研究后者时可得到更好的结果。一般地，关于时变多胞描述不确定系统的稳定性研究成果可以用于 T-S 模糊系统，因为后者的标准化隶属度函数也是时变的；当不需要在 T-S 模糊系统的稳定性条件中利用隶属度函数时，则 T-S 模糊系统不过是时变多胞描述不确定系统的特例；当不需要在 T-S 模糊系统的稳定性条件中利用隶属度函数时，关于 T-S 模糊系统的稳定性研究并没有特色性的成果，即没有 T-S 模糊系统的独具的稳定性分析方法。

2　常用的 Lyapunov 函数及其基本结论

为了讨论问题的方便，取 $u(t)=0$。在 T-S 模糊系统的稳定性研究中，没有看到该系统特有的 Lyapunov 函数。下面结论多数直接可用于式(4)、(5)。

首先用到的、也是应用最多的为公共（common）二次型 Lyapunov 函数（或称全局（global）二次型 Lyapunov 函数），即取 Lyapunov 函数为[12]

$$V(x(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t), \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为对称正定矩阵。则系统 $\boldsymbol{x}(t+1)=$

$\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)$ 稳定的显而易见的充分条件为

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{P}<0, i\in\{1,2,\cdots,r\}。\tag{9}$$

采用公共二次型 Lyapunov 函数时，难以找到对应的矩阵 $\boldsymbol{P}$。引入松弛矩阵来降低稳定性条件的保守性外，还寻找降低保守性的 Lyapunov 函数。分段(piecewise)二次型 Lyapunov 函数的使用频率仅低于公共二次型 Lyapunov 函数。分段二次型 Lyapunov 方法可以用切换系统的研究成果，研究成果也可以用于切换系统。为了方便应用分段二次型 Lyapunov 方法，需要把前提变量空间划分为若干个互不交迭的区(region)；在每个区内取不同的公共二次型函数，所有这些区中的公共二次型函数的组合为分段二次型 Lyapunov 函数；这里不称为分区(regionwise)二次型 Lyapunov 函数仅仅是因为沿用传统的称呼，传统的称呼是针对曲线分段线性化形成的切换系统。

假设前提变量空间可以划分为 r 个区，在第 i 个区内 $\mu_i(z(t))=1$；这样，式(1)变为分段线性系统

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t), z(t)\in S_i, i\in\{1,2,\cdots,r\},\tag{10}$$

其中 $S_i, i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 就是互不交迭的区。

假设前提变量空间可以划分为 L 个区，在第 l 个区内存在某些 $\mu_i(z(t))=0$，其中 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$；记 $\kappa(l)$ 为第 l 个区内所有 $\mu_i(z(t))\neq 0$ 的那些 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 组成的集合，则式(1)变为分段系统[13]

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\sum_{j\in\kappa(l)}\mu_j(z(t))\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}(t), z(t)\in S_l,\quad l\in\{1,2,\cdots,L\},\tag{11}$$

当在每个区内，都不存在使 $\mu_i(z(t))=0$ 的 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 时，则 $L=1$。

对式(11)中的系统，取 Lyapunov 函数为

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{x}(t), z(t)\in S_l,\quad l\in\{1,2,\cdots,L\}。\tag{12}$$

则系统 $\boldsymbol{x}(t+1)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(t)\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)$ 稳定的一个不难得到的充分条件为

$$\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}_j-\boldsymbol{P}_l<0, j\in\kappa(l), l\in\{1,2,\cdots,L\},\quad k\in\{1,2,\cdots,L\}。\tag{13}$$

上面得到分段式(11)的方法是容易想到的。所谓双交迭模糊分划得到的系统[14-15]，不过是式(11)的特例。另一种方法直接将前提变量空间划分为 r 个区[16-18]

$$S_i=\{z(t)\,|\,\mu_i(z(t))>\mu_j(z(t)), j\in\{1,2,\cdots,r\}, i\neq j\}, i\in\{1,2,\cdots,r\}。\tag{14}$$

对那些 $\mu_i(z(t))=\mu_j(z(t))$ 的点的讨论一般无法改变稳定性条件，因此可以不予考虑。这样，式(1)变为分段系统

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\Big(\boldsymbol{A}_i+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{r}\mu_j(z(t))(\boldsymbol{A}_j-\boldsymbol{A}_i)\Big)\boldsymbol{x}(t),\quad z(t)\in S_i, i\in\{1,2,\cdots,r\}。\tag{15}$$

在对式(15)的稳定性研究中，通常将 $\sum_{j=1,\,j\neq i}^{r}\mu_j(z(t))(\boldsymbol{A}_j-\boldsymbol{A}_i)$ 看作一种不确定性，即找到 $\boldsymbol{E}_{iA}, i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 使得

$$\Big(\sum_{j=1,\,j\neq i}^{r}\mu_j(z(t))(\boldsymbol{A}_j-\boldsymbol{A}_i)\Big)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1,\,j\neq i}^{r}\mu_j(z(t))(\boldsymbol{A}_j-\boldsymbol{A}_i)\Big)\leqslant\boldsymbol{E}_{iA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{iA}, i\in\{1,2,\cdots,r\}。\tag{16}$$

式(16)的应用使得 T-S 模糊系统稳定性的研究中出现了自身难以克服的保守性，其对应的稳定性条件也比较复杂。

分段二次型 Lyapunov 函数在每个分区内采用公共二次型 Lyapunov 函数。还提出了将公共二次型 Lyapunov 函数替换为模糊 Lyapunov 函数[19-20]，即依赖于标准隶属度函数的参数依赖型 Lyapunov 函数。参数依赖型 Lyapunov 函数是沿用鲁棒控制的说法[21-22]，在鲁棒控制中使用的文献非常多，因此不可能不被引入到模糊控制中。至于在模糊控制中被称为模糊 Lyapunov 函数，是因为依赖的参数是模糊隶属度函数。模糊 Lyapunov 函数很多时候又被称为非二次型 Lyapunov 函数，因为如果取前提变量为状态的函数，则显然如下的模糊 Lyapunov 函数不是关于 $x(t)$ 的二次型

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\boldsymbol{P}_i\Big)\boldsymbol{x}(t),\tag{17}$$

采用式(17)时，系统 $\boldsymbol{x}(t+1)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(t)\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)$ 稳定的一个容易得到的充分条件为

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{P}_i<0, i\in\{1,2,\cdots,r\}, j\in\{1,2,\cdots,r\}。\tag{18}$$

到此为止，几乎所有熟悉该领域研究的人都容易想到将前提变量空间划分为若干个区，并在每个区内采用模糊 Lyapunov 函数，这样得到的结果比单独采用模糊 Lyapunov 函数和单独采用分段二次型 Lyapunov 函数都不更保守[14]。

值得指出的是，公共二次型 Lyapunov 函数容易用于连续时间系统，而模糊 Lyapunov 函数则不容易用于连续时间系统、应用时不能避免隶属度函数的导数项。同时，模糊 Lyapunov 函数造成的计算量也大于公共二次型 Lyapunov 函数造成的计算量。因此，在 Lyapunov 函数的选择中，一种选择一般不可能使另一种选择完全失去优势。

为了得到更宽松的稳定性条件，有的研究者还不满足于式(17)中的模糊 Lyapunov 函数，而是采用如下的非二次型 Lyapunov 函数[23]

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\boldsymbol{Q}_i\Big)^{-1}\boldsymbol{x}(t),\tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_i, i\in\{1,2,\cdots,r\}$ 为对称正定矩阵。最近，有文献提出扩展非二次型 Lyapunov 函数[24-25]

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\boldsymbol{Q}_{ij}\Big)^{-1}\boldsymbol{x}(t)\,,\tag{20}$$

其中已经不要求所有 $\boldsymbol{Q}_{ij}$ 都正定。

非常显然，但是需要特殊工具处理的、对 Lyapunov 函数的推广形式为

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{P}_{i_1i_2\cdots i_N}\Big)\boldsymbol{x}(t)\,,\tag{21}$$

$$\boldsymbol{V}(x(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{Q}_{i_1i_2\cdots i_N}\Big)^{-1}\boldsymbol{x}(t)\,,\tag{22}$$

称式(21)为齐次多项式型非二次型 Lyapunov 函数、或齐次多项式型模糊 Lyapunov 函数、或齐次多项式型参数依赖 Lyapunov 函数[26]；式(22)为齐次多项式型非二次型 Lyapunov 函数[27]。

3　T-S 模糊系统的镇定条件

在 T-S 模糊系统的镇定中，用的最多的是所谓并行分布补偿(PDC)控制律(即平滑模糊控制)

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{x}(t)\,。\tag{23}$$

此外，采用分段方法时，还经常采用所谓局部补偿控制律(即切换控制)

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{x}(t),z(t)\in S_i,i\in\{1,2,\cdots,r\}。\tag{24}$$

在应用非二次型 Lyapunov 方法时，还有使用所谓非并行分布补偿(non-PDC)控制律的[23]

$$\boldsymbol{u}(t)=\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\boldsymbol{Y}_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\boldsymbol{G}_i\Big)^{-1}\boldsymbol{x}(t)\,。\tag{25}$$

考虑最简单的情况：采用公共二次型 Lyapunov 函数和 PDC 控制律，则式(1)成为

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(z(t))(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_j)\boldsymbol{x}(t)\,。\tag{26}$$

文[28]称式(26)具有“二次模糊累加”形式；与此对应，式(21)具有 N 次模糊累加形式。若取 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1}$、$\boldsymbol{F}_j=\boldsymbol{Y}_j\boldsymbol{X}^{-1}$，则不难得到式(26)稳定的一个充分条件为

$$\boldsymbol{\gamma}_{ij}>0,i\in\{1,2,\cdots,r\},j\in\{1,2,\cdots,r\},\tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_{ij}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & (\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_j)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_j & \boldsymbol{X}\end{bmatrix}$。注意 T-S 模糊系统的稳定性条件一般被表达为线性矩阵不等式(LMI)条件，因此能否转化为 LMI 往往是检验方法是否有效的标准。原因很简单，寻找 LMI 的可行解已经具有了成熟的数学工具[29]，求解方法为多项式时间算法[30]。

式(27)具有很大的保守性，可引入松弛矩阵变量降低这种保守性[31]。引入对称矩阵 $\boldsymbol{M}_{ij}, i\leqslant j, i\in\{1,2,\cdots,r\}, j\in\{1,2,\cdots,r\}$，得到式(26)稳定的充分条件

$$\boldsymbol{\gamma}_{ii}\geqslant\boldsymbol{M}_{ii},\boldsymbol{\gamma}_{ij}+\boldsymbol{\gamma}_{ji}\geqslant2\boldsymbol{M}_{ij},i<j,i\in\{1,2,\cdots,r\},\ j\in\{1,2,\cdots,r\},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} & \cdots & \boldsymbol{M}_{1r}\\ \boldsymbol{M}_{12} & \boldsymbol{M}_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{M}_{r-1,r}\\ \boldsymbol{M}_{1r} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r-1,r} & \boldsymbol{M}_{r,r}\end{bmatrix}>0。\tag{28}$$

引入任意矩阵 $\boldsymbol{M}_{ij}, i\leqslant j, i\in\{1,2,\cdots,r\}, j\in\{1,2,\cdots,r\}$，满足 $\boldsymbol{M}_{ij}=\boldsymbol{M}_{ji}^{\mathrm{T}}$，得到式(26)稳定的充分条件为[32]

$$\boldsymbol{\gamma}_{ii}\geqslant\boldsymbol{M}_{ii},\boldsymbol{\gamma}_{ij}+\boldsymbol{\gamma}_{ji}\geqslant\boldsymbol{M}_{ij}+\boldsymbol{M}_{ji},i<j,i\in\{1,2,\cdots,r\},j\in\{1,2,\cdots,r\},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} & \cdots & \boldsymbol{M}_{1r}\\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{M}_{r-1,r}\\ \boldsymbol{M}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r,r-1} & \boldsymbol{M}_{r,r}\end{bmatrix}>0。\tag{29}$$

文[31-32]所提出的松弛方法在文献中被大量采用。

控制律和 Lyapunov 函数需要适当组合以得到更宽松的结果。在文[33]中，采用了模糊 Lyapunov 函数和 PDC 型控制律，控制增益定义为 $\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{G}_i^{-1}$。文[21]的技术起初不是用于模糊控制的，但在文[33]中被用到了模糊控制中。但是，在[33]中没有能够采用松弛矩阵。如果在采用模糊 Lyapunov 函数和 PDC 型控制律的同时，还要采用松弛矩阵，则可以采用一个 $\boldsymbol{G}$ 而不是几个 $\boldsymbol{G}_i$，见文[34]。记 $\overline{\boldsymbol{P}}(t)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{P}_{i_1i_2\cdots i_N}$。采用式(17)、(21)时，可以采用常见的一个变换(见文[35])，即

$$\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}(t) & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{GC} & \boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}-\overline{\boldsymbol{P}}(t+1)\end{bmatrix}>0\Rightarrow\overline{\boldsymbol{P}}(t)>0,\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}(t+1)\boldsymbol{C}-\overline{\boldsymbol{P}}(t)<0,\tag{30}$$

其中，引入了 LMI 变量 $\boldsymbol{G}$。在文[34]中，引入 $\boldsymbol{G}$ 是为了在寻找控制增益时应用松弛矩阵变量，但使得稳定性条件更加保守(与引入松弛矩阵、但不引入 $\boldsymbol{G}$ 的非 LMI 条件对比)。该不足在采用式(21)时也得到继承，因为要用一个 $\boldsymbol{G}$ 对付所有的 $\boldsymbol{P}_{i_1i_2\cdots i_{N-1}}$。

通过组合非二次型 Lyapunov 函数和 non-PDC 控制律可以得到更宽松的结果。文[23]首先组合式(19)、(25)取得了进步，其中每一个 $\boldsymbol{Q}_i$ 对应不同的 $\boldsymbol{G}_i$。采用式(22)时，可以用齐次多项式型参数化 non-PDC 控制律[26]

$$\boldsymbol{u}(t)=\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{Y}_{i_1i_2\cdots i_N}\Big)。$$

$$\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{G}_{i_1i_2\cdots i_N}\Big)^{-1}\boldsymbol{x}(t)\ 。\tag{31}$$

这样，每个 $\boldsymbol{Q}_{i_1i_2\cdots i_N}$ 对应着不同的 $\boldsymbol{G}_{i_1i_2\cdots i_N}$。一个更加简单的齐次多项式型参数化 non-PDC 控制律为[27]

$$\boldsymbol{u}(t)=\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{Y}_{i_1i_2\cdots i_N}\Big)。$$

$$\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{Q}_{i_1i_2\cdots i_N}\Big)^{-1}\boldsymbol{x}(t)\ 。\tag{32}$$

在式(32)中不用 $\boldsymbol{G}_{i_1i_2\cdots i_N}$，从而减少了 LMI 变量的个数。当 $N=1$ 时，式(32)是由文献[23]提出的，而式(31)是作为式(32)的改进提出的[23]；但是当不断增加 N 后，使用式(32)可以达到和使用式(31)同样的效果。

应用式(25)、(31)或(32)形式的控制律时，必须对矩阵做求逆运算。但是到目前为止，似乎还没有找到应用式(21)和齐次多项式型参数化 PDC 控制律、使得到的结果与应用式(22)、(32)得到的同样好的途径。齐次多项式型参数化 PDC 控制律表达为

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{F}_{i_1i_2\cdots i_N}\boldsymbol{x}(t)\ 。\tag{33}$$

采用文[24-34]中给出的技术，可以得到镇定条件的变化形式。当采用控制律式(31)时，也可以用 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{N+1}=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N+1}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{Q}_{i_1i_2\cdots i_{N+1}}\Big)^{-1}\boldsymbol{x}(t)。$$

当采用控制律式(33)时，也可以用 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{N+1}=1}^{r}\Big(\prod_{s=1}^{N+1}\mu_{i_s}(z(t))\Big)\boldsymbol{P}_{i_1i_2\cdots i_{N+1}}\Big)\boldsymbol{x}(t)。$$

但是当不断增加 N 后，这些变化形式并不影响镇定条件的可行性。

4 T-S 模糊控制系统稳定性的充要条件的第一逼近

采用 Polya 定理得到了单重 N 次模糊累加式正定性的渐近逼近式的充要条件[28-36]。所谓"单重"是与"双重"对应而言的。对式(26)，采用公共二次型 Lyapunov 函数时，稳定的充要条件为

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(z(t))\boldsymbol{\gamma}_{ij}>0\ 。\tag{34}$$

由于式(34)使用了标准隶属度函数，故不能作为 LMI 条件，而式(27)、(28)和(29)都是式(34)的充分条件。由于式(34)中只用到了 $z(t)$，所以是单重的。对双重的模糊累加式，即采用式(20)、(25)时，稳定的充分条件(非充要的)为[24]

$$\sum_{k=1}^{r}\mu_k(z(t+1))\sum_{l=1}^{r}\mu_l(z(t+1)).$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(z(t))\boldsymbol{\gamma}_{ij}^{kl}\Big)>0\ ,\tag{35}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_{ij}^{kl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_i+\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Q}_{ij} & (\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{G}_j+\boldsymbol{B}_iY_j)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{G}_j+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_j & \boldsymbol{Q}_{kl}\end{bmatrix}$。双重可以从 $\boldsymbol{\gamma}_{ij}^{kl}$ 既有上角标也有下角标来粗略地理解，下角标对应 $z(t)$、上角标对应 $z(t+1)$。尽管文[23]提出了形如下面的模糊累加式

$$\sum_{k=1}^{r}\mu_k(z(t+1))\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(z(t))\boldsymbol{\gamma}_{ij}^{k}\Big)>0\ ,\tag{36}$$

但是 γ_{ij}^{k} 的上角标的次数为 1，难以通过对第二重的模糊累加的处理得到更好的结果，在实行上是单重模糊累加式。

对单重 N 次模糊累加式的正定性，无法得到一劳永逸的充要条件；而是通过提高累加式的次数(阶次)，得到充分条件，但当阶次不断提高时，逼近充要条件。提高式(34)的阶次十分简单，因为式(34)等价于

$$\Big(\sum_{k=1}^{r}\mu_k(z(t))\Big)^{d-2}\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(z(t))\boldsymbol{\gamma}_{ij}>0\ ,\tag{37}$$

第一逼近是采用 Polya 定理对特定(固定阶次的)Lyapunov 函数和特定(固定阶次的)控制律时稳定性的充要条件的逼近。考虑关于标准隶属度 μ 的 r 元 N 次标量齐次多项式 $f(\mu)$，为关于 μ 的函数；根据 Polya 定理[37]，如果 $f(\mu)>0$，则必存在足够大的 $d\geqslant N$，使得关于标准隶属度 μ 的 r 元 d 次标量齐次多项式 $\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i\Big)^{d-N}f(\mu)$ 的所有系数都大于0。关于 d 的上界在文[38]中给出了。Polya 定理及文[38]的结果被推广到多项式系数为矩阵的情形[38-40]。

根据 Polya 定理、文[38]、[39]，单重 N 次模糊累加式的正定性的渐近逼近式的充要条件就可以得到了，文献[28-36]给出了对应的具体技术。根据 Polya 定理和文献[39]，判断式(34)的正定性可以转化为判断式(37)中矩阵系数的正定性；进一步，根据文献[38]、[39]，当 d 达到上界时，没有必要再增加 d，就可以判断式(37)到底是否成立了。

在每次增加 d 时，要给出使式(37)成立的、用 LMI 表达的充分条件，文献[28]总结并给出了新的、得到这样的 LMI 的方法(包括利用松弛矩阵)。文献[38]、[39]中给出的 d 的上界都是针对 $f(\mu)$ 的系数不变的情况，而将式(37)中的系数作为 LMI 变量、并判断 LMI 的可行性的过程中，显然多项式的系数还没有确定。现有文献似乎还没有给出确定 d

的上确界的方法。

文[36]采用的是齐次多项式(homogeneous polynomials)技术，而文献[28]采用的是多索引(multi-index notations)技术；在文献[26]、[27]中，都说明了这两种技术是等价的，因为都是采用同样的 Polya 定理。在文献[36]中，没有再利用松弛矩阵变量，而在文献[28]中，给出了应用松弛矩阵变量的一般方法。需要指出，引入松弛矩阵变量会显著增加标量 LMI 变量的个数，但是不引入松弛矩阵变量时，可能需要很大的 d 来达到同样的效果。在实际应用中，是增加 d 来降低保守性、还是引入松弛矩阵变量来放松稳定性条件，需要使用者的知识，也是一个需要进一步研究的问题。

对于双重 N 次模糊累加式的正定性的渐近充要条件，可参考文献[26-27](实际上可针对更一般的 $N_1\times N_2$ 次模糊累加式)；这时的结果是单重 N 次模糊累加式的正定性的充要条件的推广，其中要注意在推广中适当转化为两步，每一步考虑单重 N 次模糊累加式。

现分析三类 Lyapunov 矩阵和所研究的系统的组合。第一类是参数依赖的 Lyapunov 矩阵和时不变不确定系统，不属于 T-S 模糊控制问题[11]。第二类是时不变的 Lyapunov 矩阵和时变系统，如采用公共二次型 Lyapunov 函数的模糊 T-S 系统的研究属于这一类[28-36]。第三类是时变的 Lyapunov 矩阵和时变系统，如采用非二次型 Lyapunov 函数的模糊 T-S 系统的研究属于这一类[26-27]。

5　T-S 模糊控制系统稳定性的充要条件的第二逼近

如果在齐次多项式型 Lyapunov 函数和齐次多项式型参数化控制律中，增加原齐次多项式的阶次 N，则 LMI 变量的个数将增加，并使得到的可镇定条件渐近逼近镇定式(1)的、针对特定类型控制律和特定类型 Lypunov 函数的充要条件。与第一逼近相比，第二逼近不要固定 N。假设对式(1)采用控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\boldsymbol{x}(t)=\hat{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))^{-1}\boldsymbol{x}(t),\tag{38}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$、$\hat{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$和 $\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$是 $\mu(z(t))$的连续函数，不要求具有多项式的形式。则基于式(38)的式(1)成为

$$\boldsymbol{x}(t+1)=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\hat{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))^{-1}]\boldsymbol{x}(t),\tag{39}$$

进一步，对式(39)采用 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))^{-1}\boldsymbol{x}(t),\tag{40}$$

则基于 Lyapunov 函数(40)的、式(39)稳定的充要条件是

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t))) & \sharp^{\mathrm{T}}\\ \sharp & \hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t+1)))\end{bmatrix}>0,\tag{41}$$

其中 $\sharp=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\hat{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$。式(41)是关于标准隶属度函数的矩阵不等式，其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$的变化规律已知，而 $\hat{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$和 $\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$是待定的、关于 $\boldsymbol{\mu}(z(t))$的连续函数。

注意，一般来说式(38)、(40)已经具有相当一般的形式。采用 $\boldsymbol{u}(t)=\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\boldsymbol{x}(t)$和 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\boldsymbol{x}(t)$，则式(41)应该被替换为

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{\mu}(z(t))) & \triangle^{\mathrm{T}}\\ \triangle & \hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{\mu}(z(t+1)))\end{bmatrix}>0,\tag{42}$$

其中 $\triangle=\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{\mu}(z(t+1)))[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))]$。式(41)是关于 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 的 LMI；而如果 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 是要决策的变量，则式(42)不是 LMI。

由于式(41)是关于变量 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 的 LMI，可将 $\hat{\boldsymbol{Y}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 中的元列写为一个向量 $\boldsymbol{\eta}=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_M]^{\mathrm{T}}$，其中 $M=\frac{1}{2}n(n+1)+nm$。这样，式(41)可以表示为

$$H(\boldsymbol{\eta},\mu)=H_0(\mu)+\eta_1H_1(\mu)+\eta_2H_2(\mu)+\cdots+\eta_MH_M(\mu)>0,\tag{43}$$

式(43)被称为参数依赖 LMI；普通的 LMI 可以写为[29]

$$H(\boldsymbol{\eta})=H_0+\eta_1H_1+\eta_2H_2+\cdots+\eta_MH_M>0,\tag{44}$$

相比于式(44)，(43)中的系数矩阵依赖于标准隶属度 μ(指 $\mu(z(t))$和 $\mu(z(t+1))$)。

根据文[40]，如果对所有可能的 μ，式(43)存在解 $\eta(\mu)$，则式(43)必存在齐次多项式形式的解 $\eta^*(\mu)$(即 $\eta^*(\mu)$是关于 μ 的齐次多项式)。式(41)满足的充要条件是 $\hat{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$和 $\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$可表达为某种阶次的齐次多项式。可按照以下的步骤进行

第一步：先设定一个齐次多项式的阶次。

第二步：将 $\hat{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$和 $\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\mu}(z(t)))$表达为这个阶次的齐次多项式，其中多项式的系数矩阵都是待定的 LMI 变量。

第三步：采用第一逼近中给出的方法，写出满足式(41)的 LMI(其中可以应用 Polya 定理、引入松弛矩阵变量、等)。

第四步：求解第三步中给出的 LMI。如果这样的 LMI 有解，则转第六步。

第五步：增加齐次多项式的阶次值，返回第二步

继续进行。

第六步:得到控制律的表达式。

第一逼近和第二逼近,是作者的提法(包括单重和双重)。文[11]考虑的是多胞描述时不变不确定系统,并且不考虑镇定问题。文[26]、[27](尤其是文献[27])系统地将文[11]的方法用于 T-S 模糊控制的稳定性分析。

在第二逼近中,有一个明显的、没有解决的公开问题,就是齐次多项式解的阶次值的上限没有给出。要给出这个上限,直观上看要比给出文献[38]中那样的上限难得多。文[38]给出的上限仅针对多项式;而要给出齐次多项式阶次的上限,却要考虑所有可能的关于 μ 的连续函数。

求解 LMI 的运算量的限制已经从可实践性上、实质地给出了齐次多项式解的阶次值的上限。尽管求解 LMI 是多项式时间算法,但是当 LMI 变量个数增加时,计算时间将幂次增加(约 3 次幂);当 LMI 个数增加时,计算时间将线性增加。通过应用 Polya 定理,当 d 增加时,LMI 的个数迅速增加;增加齐次多项式的阶次时,LMI 变量的个数迅速增加。总之,计算量上的限制使得即使理论上给出了上限,这样的上限可能也很难用现有的计算机检验。

6 结 论

对基于 Takagi-Sugeno 模型的模糊控制系统的稳定性进行了分析,尤其是对渐近充要条件的形成和来源进行了描述。对 T-S 模糊控制的稳定性的研究,没有解决的问题还包括降低计算量的方法、鲁棒性研究、隶属度函数的处理等。实际的研究成果要比本文分析的多得多。关于一般模糊控制的研究则有更加丰富的内容。总之,只有在充分了解和掌握目前成果的基础上,才能推陈出新,为模糊控制的研究做出贡献。

参考文献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] ZADEH L A. Fuzzy algorithm [J]. Information and control, 1968, 12(2): 94-102.

[3] ZADEH L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1973, 3(1):28-44.

[4] MAMDANI E H. Application of fuzzy algorithms for simple dynamic plant [J]. Proceedings of the Institute of Electrical Engineering, 1974, 121 (12): 1585-1588.

[5] MAMDANI E H, ASSILIAN S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller [J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1975, 7(1): 1-13.

[6] FENG G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, 14(5): 676-697.

[7] DING B. Development of stabilisty research on Takagi-Sageno fuzzy control systems and approximation of the neassary and sufficient conditions [J]. Fuzzy Information and Engineering, 2009, 1(4): 367-383.

[8] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.

[9] DING B. Feasibility, optimality and computational complexity of robust model predictive control [C] // Chinese Control and Decision Conference. Yantai, China: IEEE, 2008: 2968-2973.

[10] LU Y, ARKUN Y. Quasi-Min-Max MPC algorithms for LPV systems [J]. Automatica, 2000, 36(4): 527-540.

[11] OLIVEIRA R C L F, PERES P L D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(7): 1334-1340.

[12] TANAKA K, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156.

[13] JOHANSSON M, RANTZER A, ARZEN K E. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(6): 713-722.

[14] 丁宝苍,雷兆明,邹涛. 采用双交叠模糊分划的 T-S 模糊系统的稳定性分析[J]. 控制与决策, 2007, 22(4): 457-461.
DING BAO-CHANG, LEI ZHAO-MING, ZOU TAO. Stability analysis of T-S fuzzy systems with two-overlapped fuzzy partition [J]. Control and Decision, 2007, 22(4): 457-461.

[15] 修智宏,任光. 模糊控制系统的稳定性分析及系统化设计[J]. 自动化学报, 2004, 30(5): 731-741.
XIU ZHI-GUANG, REN GUANG. Stability analysis and systematic design of T-S fuzzy control systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(5): 731-741.

[16] CAO S G, REES N W, FENG G. H_∞ control of nonlinear continuous-time systems based on dynamic fuzzy models [J]. International Journal of Systems Science, 1997, 27(9): 821-830.

[17] CAO S G, REES N W, FENG G. Analysis and design for a class of complex control systems—Part II: Fuzzy controller design [J]. Automatica, 1997, 33(6): 1029-1039.

[18] CAO S G, REES N W, FENG G. Stability analysis

and design for a class of continuous-time fuzzy control systems [J]. International Journal of Control, 1996, 64(6): 1069-1087.
[19] CHOI D J, PARK P G. H-infinity state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent Lyapunov functions [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2003, 11(2): 271-278.
[20] TANAKA K, HORI T, WANG H O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2003, 11(4): 582-589.
[21] DAAFOUZ J, BERNUSSOU J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties [J]. Systems and Control Letters, 2001, 43(5): 355-359.
[22] MAO W. Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on "an improved approach for constrained robust model predictive control" [J]. Automatica, 2003, 39(6): 1109-1112.
[23] GUERRA T M, VERMEIREN L. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi - Sugeno's form [J]. Automatica, 2004, 40(5): 823-829.
[24] DING B, SUN H, YANG P. Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form [J]. Automatica, 2006, 42(3): 503-508.
[25] DING B, HUANG B. Reformulation of LMI-based stabilisation conditions for non-linear systems in Takagi-Sugeno's form [J]. International Journal of Systems Science, 2008, 39(5): 487-496.
[26] DING B, ZOU T. Asymptotically necessary and sufficient stability with respect to nonquadratic Lyapunov function for Takagi-Sugeno model [C] // 48th IEEE Conference on Decision and Control. Shanghai, China: IEEE, 2009.
[27] DING B. Asymptotically necessary and sufficient stability conditions in the sense of homogeneously polynomially nonquadratic Lyapunov functions for discrete-time Takagi-Sugeno systems [C] // 7th International Conference on Control and Automation, ICCA'09. Christchurch, New Zealand: IEEE, 2009.
[28] SALA A, ARINO C. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Application of Polya's theorem [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(24): 2671-2686.
[29] BOYD S, GHAOUI L, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in systems and control theory [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
[30] GAHINET P, NEMIROVSKI A, LAUB A, et al. The LMI Control toolbox [M]. Natick, MA: The Mathworks, Inc., 1995.
[31] KIM E, LEE H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(5): 523-534.
[32] LIU X, ZHANG Q. New approaches to controller designs based on fuzzy observers for T - S fuzzy systems via LMI [J]. Automatica, 2003, 39(9): 1571-1582.
[33] DING B, SUN H, QIAO Y. Stability analysis of T-S fuzzy control systems based-on parameter-dependent Lyapunov function [J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(4): 651-654.
[34] DING B. Poly-quadratic stability of discrete-time nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form [J]. Asian Journal of Control, 2009, 11(6): 38-42.
[35] DE OLIVEIRA M C, BERNUSSOU J, GEROMEL J C. A new discrete-time robust stability condition [J]. Systems and Control Letters, 1999, 37(4): 261-265.
[36] MONTAGNER V F, OLIVEIRA R C L F, PERES P L D. Necessary and sufficient LMI conditions to compute quadratically stabilizing state feedback controllers for Takagi-Sugeno systems [C] // American Control Conference. NY, USA: [s. n], 2007: 4059-4064.
[37] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities, 2nd ed [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
[38] POWERS V, REZNICK B. A new bound for Polya's Theorem with applications to polynomials positive polyhedra [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2001, 164(1): 221-229.
[39] SCHERER C. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verification for exactness [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2005, 27(2): 365-395.
[40] BLIMAN P A, OLIVEIRA R C L F, MONTAGNER V F, PERES P L D. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex [C] // 45^{th} IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA: IEEE, 2006: 1486-1491.

（编辑 侯 湘）