

文章编号:1000-582X(2010)07-012-06

平面包络环面蜗杆副精确实体模型的建立

张彦钦,张光辉

(重庆大学 机械传动国家重点实验室,重庆 400044)

摘要:基于齿轮啮合原理,建立了平面包络环面蜗杆副的数学模型。结合工程实际,深入分析了蜗杆、蜗轮的几何特征。以典型传动蜗轮齿面二次区为例,研究了信息点呈不等距分布的复杂曲面的构造方法。结果表明:主曲线采用平面曲线,交叉曲线采用非均匀有理 B 样条曲线(NURBS)构造的空间曲面精度高且易于编程实现。基于 Unigraphics-Grip 编程开发平台开发了平面包络环面蜗杆传动实体建模系统,并通过实例验证实体模型的精度:特征点的最大线偏差为 $4.7 \mu\text{m}$ 。

关键词:蜗杆传动;曲面重构;建模;系统开发

中图分类号:TH132.4

文献标志码:A

Exact solid-modeling of planar enveloping hourglass worm gears

ZHANG Yan-qin, ZHANG Guang-hui

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: Based on the gear engagement theory, the mathematical model of the planar enveloping hourglass worm gears was established. By combination with engineering practice, the geometrical features of worm and gear are analyzed. Taking the secondary contact zone of worm gears in typical design as an example, reconfiguration methods of curved surface composed of unequally distribute data points are researched. Result shows that the required precision of the space surface can be achieved and the surface can be built easily through programming, when principal curves are planer curve and the cross ones are Non-Uniform Rational B-Splines(NURBS) curve. On UG-GRIP platform, three-dimensional model building system of planar enveloping hourglass worm drives is developed. The accuracy of the solid model is validated by example, that the max error of the data points is $4.7 \mu\text{m}$

Key words: worm gears; surface reconstruction; model buildings; software development

平面包络环面蜗杆传动具有多齿啮合、承载能力高、润滑角和诱导法曲率半径大、易于形成动压油膜、磨损小、寿命长、传动平稳等优点,在各行业的机械设备中得到了广泛应用。为了缩短产品开发周期,节约设计成本,在进行仿真分析时,必须建立基于传动副啮合理论的精确实体模型。近年来,界内学者在传动零部件建模方面进行了深入研究:文献

[1-4]分别推导了渐开线斜齿轮、圆弧齿轮、法向直廓蜗杆和渐开线包络环面蜗杆的数学模型,文献[5-7]讨论了空间曲面的几何构型方法,文献[8]应用布尔运算建立了环面蜗杆的实体模型,文献[9]采用轴截面与齿面求交的方法对平面包络蜗轮齿面进行了离散化处理。由于平面包络环面蜗杆副中的蜗轮齿面是空间曲面且模型中信息点分布不均匀,兼

收稿日期:2010-03-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50075089)

作者简介:张彦钦(1980-),女,重庆大学博士研究生,主要从事机械传动方面的研究。

张光辉(联系人),男,重庆大学教授,博士生导师,(E-mail)zhanggh2900@163.com。

顾曲面平顺性和准确性的精确建模方法鲜见报道。

笔者给出蜗杆副完整的数学模型;深入分析蜗轮齿面信息点呈不等距分布的特性,研究适用的插值构造方法,建立高精度的齿面模型;在考虑蜗杆副齿侧间隙的基础上,建立符合工程实际的精确三维实体模型;基于 UG-GRIP 平台,开发平面包络环面蜗杆传动参数化实体建模系统。

1 数学模型的建立

1.1 齿面方程的建立及离散化

在坐标系 $\sigma_1(o_1; x_1, y_1, z_1)$ 中,蜗杆齿面方程为^[10]

$$\begin{cases} X_0 = u, \\ Y_0 = v \sin \beta - r_b, \\ Z_0 = v \cos \beta, \\ v = \frac{u i_{01} \cos \beta + \sin \beta (u \cos \varphi_0 + 0.5 d_b \sin \varphi_0 - a_1)}{\sin \varphi_0} \\ (\varphi_0 \neq 0), \\ X_1 = -\cos \varphi_0 \cos \varphi_1 X_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_1 Y_0 - \\ \sin \varphi_1 Z_0 + a_1 \cos \varphi_1, \\ Y_1 = \cos \varphi_0 \sin \varphi_1 X_0 - \sin \varphi_0 \sin \varphi_1 Y_0 - \\ \cos \varphi_1 Z_0 - a_1 \sin \varphi_1, \\ Z_1 = -\sin \varphi_0 X_0 - \cos \varphi_0 Y_0. \end{cases}$$

式中: a_1 为加工中心距; β 为母平面倾角。如图 1 所示, $\sigma_1(o_1; x_1, y_1, z_1)$ 为蜗杆所在坐标系; $\sigma_2(o_2; x_2, y_2, z_2)$ 为蜗轮所在坐标系; d_b 为主基圆直径; L_w 为蜗杆工作长度; a 为传动中心距; d_2 为蜗轮分度圆直径; r_{a1} 为蜗杆齿顶圆弧半径; r_{f1} 为蜗杆齿根圆弧半径, ξ 为蜗轮齿面与中间平面的夹角。将上述方程简化为: $\bar{r}_1(u, \varphi_0)$ 。其中: u 是母平面参数; φ_0 是母平面的转角。当 u 变化时,蜗杆齿面上的点沿接触线方向变化;当 φ_0 变化时,蜗杆齿面上的点沿螺旋线方向变化。当 u 和 φ_0 固定时, \bar{r}_1 表示齿面上的唯一数据点。因此,通过变化 u 和 φ_0 实现蜗杆齿面的离散化。每一 φ_0 对应一条接触线的位置, u 取值的界限对应着接触线的端点坐标。

蜗轮齿面是蜗杆齿面在相对运动过程中产生的包络面。典型传动蜗轮齿面的特点是在包络过程中形成了两部分不同的曲面,一部分与一次包络中的母平面重合,称其为一次接触区;另一部分是二次包络过程中产生的空间曲面,称其为二次接触区;两部分齿面的分界线称为二类界限曲线。一般型传动蜗轮齿面仅有二次接触区。

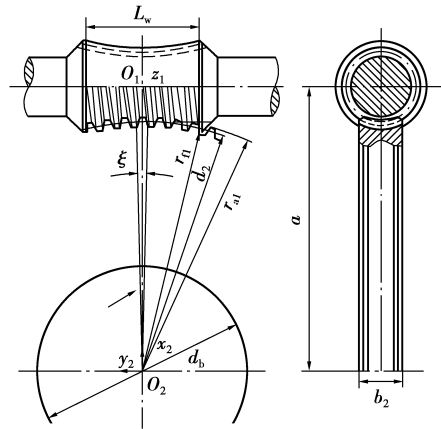


图 1 蜗杆副几何示意图

平面二次包络环面蜗杆典型传动蜗轮齿面在坐标系 $\sigma_2(o_2; x_2, y_2, z_2)$ 中的方程为:

$$\begin{cases} X_2 = -\cos \theta_1 \cos \theta_2 X_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 Y_1 - \\ \sin \theta_2 Z_1 + a \cos \theta_2, \\ Y_2 = \cos \theta_1 \sin \theta_2 X_1 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 Y_1 - \\ \cos \theta_2 Z_1 - a \sin \theta_2, \\ Z_2 = -\sin \theta_1 X_1 - \cos \theta_1 Y_1. \end{cases}$$

将上述方程简记为: $\bar{r}_2(u, \varphi_0, \theta_2)$, 式中 θ_2 是二次包络过程中蜗轮转角参数。

一次接触区离散化:取 $\theta_2 = \varphi_0, \bar{r}_2(u, \varphi_0, \theta_2)$ 化简为 $\bar{r}_2(u, \varphi_0)$, 同离散蜗杆齿面相似, u 和 φ_0 取一系列的值,得到一次区内一系列的数据点。只要任选 3 个不共线的接触点即可实现平面(一次区)建模。

齿面二次接触区的离散化:啮合方程中 θ_2 是运动参数,其值确定了二次接触线的具体位置。接触区内 θ_2 的取值范围始于起始啮合角,至啮出为止。 φ_0 在“二次包络”过程中,不再是运动参数,而是几何参数。当 θ_2 确定, φ_0 取一系列的值,就得到同一接触线上的若干接触点,也就是说, φ_0 的取值范围和步长决定了数据点的数目和坐标值的范围。

1.2 蜗杆齿面边界的数学特征

如图 2 所示,蜗杆模型的特征面由齿根螺旋面 1、蜗杆齿面 2 和 4、齿顶螺旋面 3、两侧轴端面 5、齿向端面 7、修缘面 6 和 8 等组成。

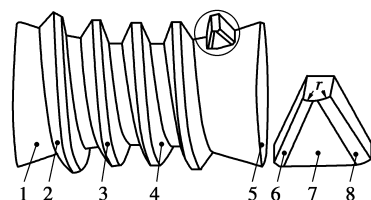


图 2 蜗杆实体示意图

1) 两侧轴端面 5 和 7 的方程为

$$z_1 = \pm 0.5 \times L_w。$$

2) 修缘面 6 和 8 简化处理后修缘半径为: $r =$

$$0.25s_{n1}。$$

3) 齿根螺旋面 1 和齿顶螺旋面 3 的圆弧半径为

$$r_{f1} = a - 0.5d_{f1}, r_{a1} = a - 0.5d_{a1},$$

式中: s_{n1} 为蜗杆喉部法向齿厚; d_{f1} 为蜗杆喉部根圆直径; d_{a1} 为蜗杆喉部齿顶圆直径。

1.3 蜗轮齿面边界的数学特征

如图 3 所示, 蜗轮模型由如下特征面组成: 齿顶圆柱面 1、齿顶圆环面 2、轮齿端面 3、轮齿底面 4、轮齿侧面 5、齿根圆环面 6 及蜗轮齿面 A 和 B 组成。

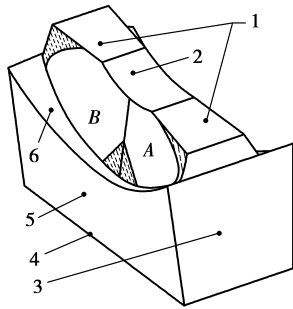


图 3 蜗轮齿边界示意图

在坐标系 σ_2 中, 各边界的特征表达式如下:

1) 齿顶圆柱面 1 的数学描述为

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5 \times d_{a2\max} = 0,$$

$$z^2 - (r_2 \times \sin(0.5\Psi))^2 \geq 0,$$

$$z^2 - (0.5 \times b_2)^2 \leq 0,$$

式中: $d_{a2\max}$ 为蜗轮最大外圆直径; r_2 为蜗轮齿顶圆弧半径; $\Psi = 2 \times \arccos((a - 0.5d_{a2\max})/r_2)$ 。

2) 齿顶圆环面 2 的数学描述为

$$r_2 - \sqrt{((x^2 + y^2)^{0.5} - a')^2 + z^2} = 0,$$

$$z^2 - (r_2 \times \sin(0.5\Psi))^2 \leq 0,$$

式中 $a' = d_{a2\max} + 2r_2 \cos\Psi$ 。

3) 轮齿端面 3 的数学描述为

$$z = \pm 0.5 \times b_2。$$

4) 轮齿底面 4 的数学描述为

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5 \times d_{f2} + 2m_t = 0,$$

式中 m_t 为蜗轮端面模数。

5) 轮齿侧面 5 的数学描述为

$$y - x \sin(0.5\tau) = 0,$$

$$z \in [-0.5b_2, 0.5b_2],$$

式中 τ 为齿距角。

6) 齿根圆环面 6 的数学描述为齿根圆环面是由刀具顶刃在加工中切削而成的。为了避免切削不完全, 设滚刀切削长度为 d_b , 记滚刀最大外圆直径为 $d_{g1\max}$, 齿顶、齿根圆弧半径为 r_{ga1} 、 r_{gf1} 。在坐标系 σ_1 中, 滚刀最大外圆的切削轨迹为:

$$x = a - 0.5d_b \tan(\theta_3),$$

$$y = \sqrt{0.25d_{g1\max}^2 - x^2},$$

$$z = 0.5d_b。$$

式中: c 为径向间隙, $c = 0.2m_t$;

$$d_{g1\max} = \sqrt{(r_{a1} - c)^2 + 0.25d_b^2}。$$

转化到蜗轮坐标系 σ_2 中:

$$x_2 = a \cos(\theta_3) - x \cos(\theta_3) + z \sin(\theta_3),$$

$$y = a \sin(\theta_3) - x \sin(\theta_3) - z \cos(\theta_3),$$

$$z_2 = -y。$$

式中: $\theta_3 \in [\arcsin(0.5d_b/r_{f1}), \arcsin(0.5d_b/r_{ga1})]$ 。

1.4 特征的关联性

设平面蜗轮两侧齿面关于轴线 X_1 对称, 平面蜗轮两侧齿面与中间平面交线的夹角为

$$\xi = 2p_{x2}/d_2,$$

蜗轮齿面相对初始位置的转角为

$$\delta_2 = \alpha - 0.5\xi,$$

蜗杆齿面相应转角为

$$\delta_1 = (\delta_2 - 0.5j) \times i,$$

式中: P_{x2} 为平面蜗轮节圆齿厚; α 为分度圆压力角; j 为蜗杆副圆周侧隙; i 为传动比。

转过 δ_1 角, 蜗杆一侧齿面方程是:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\delta_1) & \sin(-\delta_1) & 0 \\ -\sin(-\delta_1) & \cos(-\delta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}。$$

蜗轮齿面在转过 δ_2 角后, 方程为:

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\delta_2) & \sin(-\delta_2) & 0 \\ -\sin(-\delta_2) & \cos(-\delta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}。$$

式中: $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 分别是蜗杆、蜗轮齿面离散点的坐标。蜗杆和蜗轮的另一侧齿面可由上述齿面分别绕连心线转 180° 得到。

2 复杂齿面的重构技术

在平面包络环面蜗杆副实体建模过程中, 蜗轮齿面造型最为复杂, 以此为例来说明复杂空间曲面的构造方法。

2.1 蜗轮齿面的构造

根据蜗轮齿面几何特征不同, 可将其分为 3 类:

平面一包的蜗轮齿面由啮合平面和非工作区(平面)组成;平面二包一般型传动的蜗轮齿面由二次接触区和非工作区组成;平面二包典型传动的蜗轮齿面包括一次接触区、二次接触区和非工作区。这里以平面二次包络环面蜗杆典型传动为例,说明蜗轮齿面的构型方法。

2.1.1 二次接触区的线面重构

根据啮合原理计算的信息点,构造蜗轮二次接触区的曲面。如图4所示,其中一簇为主曲线 P_1 、 P_2 ,一簇为交叉曲线 C_1, C_2, \dots, C_n ,交叉曲线是通过离散点的非均匀有理B样条曲线。

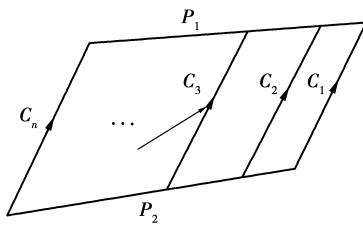


图4 曲面构造示意图

1) 应用“过点法”构造交叉线簇。把位于同一接触线上的信息点用NURBS曲线采用经过点的方式连接起来,这样构造的二次区接触线通过每个接触点,确保曲线的精确度。虽然各接触线及信息点分布不均匀,给后续重构带来一定的难度,但能够更准确地表达齿面的局部特性。

2) 主曲线簇的构建。主曲线可以是一条空间曲线,也可以是一条平面曲线。与空间曲线对比,采用平面曲线作为主曲线构造的曲面光滑度更好、质量更高。故采用平面曲线作为主曲线。在构造平面主曲线的过程中,可以采用插值法和桥接法,通过对比分析,认为插值法构造的平面曲线精度更高。

构造平面曲线所需的一系列共面离散点。分别过蜗杆副连心线与蜗轮齿顶圆、齿根圆的交点,建立两个与连心线垂直的基准平面。用这两个基准面作为边界“修剪”交叉曲线簇 C_1, C_2, \dots, C_n ,得到两系列共面的离散点。然后,分别通过两组离散点构建平面样条主曲线 P_1, P_2 ,如图4所示。

3) 应用“曲线网格法”构建空间复杂曲面。以主曲线 P_1, P_2 为主导线,以 C_1, C_2, \dots, C_n 为交叉线,重构得到一空间复杂曲面片。其精确度检查通过几何特性分析来完成。

2.1.2 非工作区的处理

一般来说,齿面上都存在“非工作区”,该区域不

会与蜗杆齿面发生干涉,不参与啮合。适当放大蜗轮转角 θ_2 的范围,从而延伸“工作区”齿面覆盖“非工作区”,因为非工作区一般不作为分析目标,这样处理可避免与蜗杆齿面发生干涉的问题,而且简单易行。

在二次接触区和非工作区曲面生成之后,与一次接触区(平面)做相切缝合处理,即生成了一侧蜗轮齿面。

2.2 蜗杆齿面的构造

由1.1知,蜗杆齿面函数为 $\bar{r}_1(u, \varphi_0)$ 。在构造蜗杆齿面时,取蜗杆齿面的两簇参数曲线,记为 u 线和 φ_0 线, u 线是接触线簇, φ_0 线是沿蜗杆齿向方向的螺旋线簇,通过这两簇交叉成网格的曲线即可建立蜗杆齿面片体。如图5所示,把螺旋线及接触线上的数据点分别连接成线,建立起蜗杆齿顶、齿根螺旋线和瞬时接触线簇。与蜗轮二次区的构建方法相似,以齿顶、齿根螺旋线为主曲线簇,以接触线为交叉线簇,生成蜗杆一侧齿面。

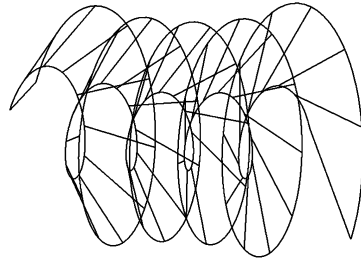


图5 蜗杆齿面线框模型

蜗杆副其他特征面(如圆环面、圆柱面及平面等)形状简单,不再赘述。

3 平面包络环面蜗杆副实体建模系统

3.1 功能及流程设计

根据需求分析,该系统主要包括3个功能:

1) 计算功能。能够进行几何尺寸和齿面离散点坐标的计算,能够方便地修改参数。输入的参数包括:中心距、蜗杆头数、蜗轮齿数、模数、主基圆直径、母平面倾角、蜗杆分度圆直径及齿厚分配系数等。

2) 绘图功能。能够根据计算获得的数据进行齿面数据点自动成线的绘制,能够自动绘制蜗杆齿面、蜗轮齿面和蜗杆副的所有边界曲面,能够进行曲面的缝合,实现蜗杆副的实体造型。

3) 数据存储功能。该功能主要用于记录计算的数据和结果,保存模型,方便CAD/CAM/CAE软件

调用。

程序流程如图 6 所示。

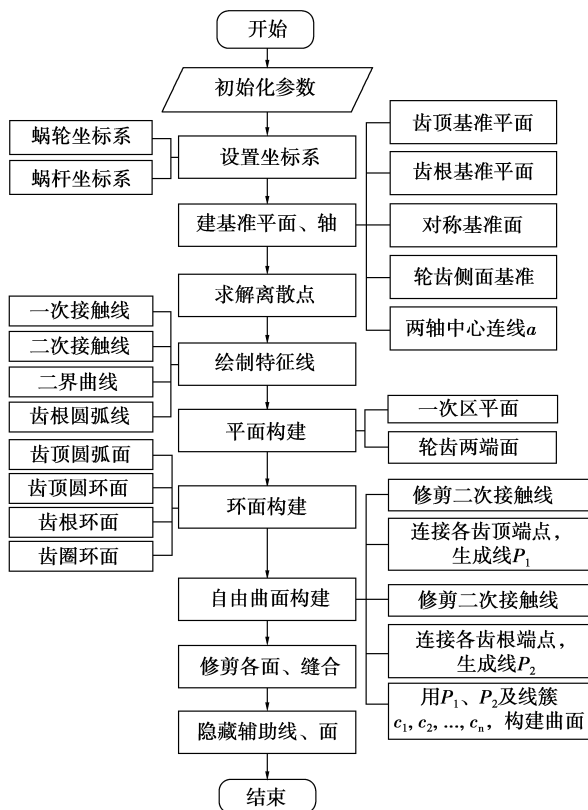


图 6 软件流程示意图

3.2 系统的开发及应用举例

GRIP 是 UGS 公司提供的用于二次开发的编程工具, 它可以实现与 UG 的各种交互操作。用 GRIP 编程, 减少了重复性的劳动, 方便建立标准零部件库。

以某蜗杆副为例, 对该参数化建模系统进行验证: $a=125\text{ mm}$, $i=50/1$, $m_t=4.2$, $d_b=82\text{ mm}$, $\beta=8^\circ$ 。得到实体模型如图 7 所示。

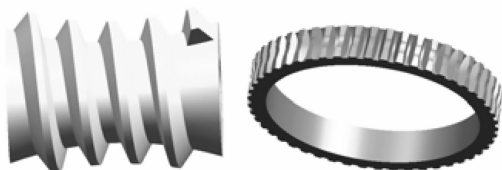


图 7 蜗杆副的实体模型

3.3 模型偏差分析

理论齿面和模型齿面间不可避免存在偏差, 由于理论数据点取值精确, 模型齿面上各点的位置偏

差可以通过理论数据点与模型齿面间的距离来反映。如图 8 所示, 在理论数据点中选取多个检查点, 测量各点与拟合面间距离的最大值和平均值, 对模型进行精度检查。本例在各交叉线上分别选择 50 个检查点, 得到的结果如表 1 所示。

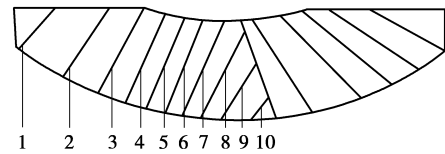


图 8 接触线偏差分析

表 1 各接触线偏差值 μm

交叉线号	平均偏差	最大偏差	交叉线号	平均偏差	最大偏差
1	1.1	2.0	6	3.0	4.3
2	1.4	2.0	7	2.7	4.7
3	2.0	2.7	8	1.3	3.8
4	2.8	3.5	9	0.5	0.9
5	3.1	4.1	10	2.7	4.5

4 结 语

1) 笔者分析了平面包络环面蜗杆副齿面的特点, 给出了啮合齿面的数学模型, 建立了蜗杆副齿面边界的数学模型, 并在模型中考虑了齿侧间隙的影响。

2) 应用逆向构型方法, 研究平面包络环面蜗杆副的实体建模技术。数据点呈不等距分布的交叉曲线簇采用“插值法”构造; 对主曲线的拟合方法进行了讨论, 证明采用平面曲线比空间曲线误差小, 采用插值法比分段桥接法构造的平面曲线的误差更小; 蜗杆接触线及蜗轮齿面二次区接触线采用 NURBS 构建, 齿面通过曲线网格法构建。

3) 在 UG/GRIP 平台上开发了平面包络环面蜗杆副实体造型系统, 建立的三维实体模型精确度高、通用性好, 为平面包络环面蜗杆副的仿真分析奠定了基础。

参考文献:

- [1] LITVIN F L, PEREZ I G, FUENTES A, et al. Topology of modified surfaces of involute helical gears with line contact developed for improvement of bearing

- contact, reduction of transmission errors, and stress analysis[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, 42(9/10): 1063-1078.
- [2] YANG C S. Mathematical model of a stepped triple circular-arc gear[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(5): 1019-1031.
- [3] CHEN K Y, TSAY C B. Mathematical model and worm wheel tooth working surfaces of the ZN-type hourglass worm gear set[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(9): 1701-1712.
- [4] 梁邦龙,徐辅仁,徐增豪,等.基于数值分析方法的TI蜗杆三维造型[J]. *机械设计与制造*, 2006(6): 132-134.
LIANG BANG-LONG, XU FU-REN, XU ZENG-HAO, et al. Three-dimensional modeling for TI worm based on numerical analysis method[J]. *Machinery Design and Manufacture*, 2006(6): 132-134.
- [5] 武剑洁,王启付,黄运保,等.逆向工程中曲面重建的研究进展[J]. *工程图学学报*, 2004, 25(2): 132-142.
WU JIAN-JIE, WANG QI-FU, HUANG YUN-BAO, et al. Review of surface reconstruction methods in reverse engineering [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2004, 25(2): 132-142.
- [6] 李立新,曹谊勃.基于双三次B样条曲面的ZA蜗轮实体建模方法[J]. *工程设计学报*, 2009, 16(4): 286-291.
LI LI-XIN, CAO YI-BO. Solid modeling method of ZA worm-gear based on bicubic B-spline surface [J]. *Journal of Engineering Design*, 2009, 16(4): 286-291.
- [7] MORENO A B, SANCHEZ A, MARTINEZ E F. Three-dimensional facial surface modeling applied to recognition[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2009, 22(8): 1233-1244.
- [8] 杨玉虎,沈煜,张策,等.环面蜗杆类零件实体建模研究[J]. *天津大学学报*, 2004, 37(6): 471-474.
YANG YU-HU, SHEN YU, ZHANG CE, et al. Study on solid modeling of hourglass worm parts[J]. *Journal of Tianjin University*, 2004, 37(6): 471-474.
- [9] 孙昌佑,黄小强,孙传文.蜗轮三维扫掠路径与螺距的修正计算及实体建模[J]. *中国机械工程*, 2006(S2): 288-291.
SUN CHANG-YOU, HUANG XIAO-QIANG, SUN CHUAN-WEN. Worm wheel's revision and calculation of the sweep path and the pitches to three dimensional helix thread and solid modeling[J]. *China Mechanical Engineering*, 2006(S2): 288-291.
- [10] 张彦钦.平面包络环面蜗杆传动设计计算及其软件开发[D].重庆:重庆大学,2006.
- [11] MOHAN L V, SHUNMUGAM M S. Geometrical aspects of double enveloping worm gear drive [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(11): 2053-2065.
- [12] ZHANG D G, SU D Z, GENTLE R. 3D model approach utilizing virtual reality machining principles [C] // *Proceeding of the 2004 the Eleventh World Congress in Mechanism and Machine Science*, April 1-4, 2004, Tianjin, China. Beijing: China Machine Press, 699-703.
- [13] JACEK M, LESZEK S. A Comparative analysis of the geometrical surface texture of a real and virtual model of a tooth flank of a cylindrical gear[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2008, 204(1/3): 331-342.
- [14] MICHALSKI J. Surface topography of the cylindrical gear tooth flanks after machining [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009, 43(5/6): 513-528.
- [15] XU W J, QIN D T, SHI W K. Direct digital design and simulation of meshing in worm-gear drive [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering: English Edition*, 2006, 19(3): 428-433.

(编辑 张 苹)