

文章编号:1000-582X(2010)10-007-07

比值法的频率估计精度分析

柏 林,董鹏飞,刘小峰,徐冠基

(重庆大学 机械传动国家重点实验室,重庆 400044)

摘 要:针对快速傅里叶变换(FFT)中的频谱泄漏现象,对目前工程信号处理中广泛采用的多种比值频率估计算法进行了系统深入的研究。首先综合论述了各种比值频率校正方法的原理、特点,具体分析了信噪比、采样序列含有的波数以及无量纲频率偏移量对各种方法频率估计精度的影响。然后,采用仿真实验对各种频率校正方法的性能进行了具体的分析与比较。实验结果表明,频率估计精度存在下限,并不总是随着信噪比的提高而提高;当信号含有的波数较少时,各种方法频率估计的精度较差,对于大部分方法,增加波数能够显著提高其精度,当波数较多时,各方法的精度较好且稳定;加窗能提高 Rife-Jane 方法和 Vetterling 方法的精度。最后结合具体的工程环境,给出了频率校正方法的选择规律和原则。

关键词:频率估计;比值法;动平衡;校正精度

中图分类号: TN911.6

文献标志码: A

Accuracy analysis for frequency estimation of amplitude ratio method

BO Lin, DONG Peng-fei, LIU Xiao-feng, XU Guan-ji

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: Aiming at the spectrum leakage that exists in fast Fourier transform (FFT), several ratio frequency estimation algorithms that widely used by engineering signal processing are deeply studied. Firstly, the principles and features of these algorithms are introduced, and the influences of three parameters on frequency estimation accuracy are concretely analyzed. These parameters are signal to noise (SNR), cycles covered in record and the distance from the DFT output peak to the true frequency in bin widths. Then, related simulations are carried out to analyze and compare the performance of these frequency correction methods. The simulation results show that the frequency estimation accuracy has lower limit. When the number of the waves in the tone is small, the accuracy of these methods is poor, but can be improved observably by increasing the waves for the most methods. When the number of the waves in the tone is large, most methods have high and stable accuracy. The performance of the Rife-Jane's method and Vetterling's method can be improved by using Hanning-tapered data. Finally, considering specific engineering environment, some rules and principles about how to choose appropriate algorithm are provided.

Key words: frequency estimation; amplitude ratio method; balancing; correction accuracy

收稿日期: 2010-04-16

基金项目: 国家 863 计划资助项目(2008AA042408); 重庆市自然科学基金资助项目(CSTC, 2009BB3194, 2009BB0355); 重庆大学 211 项目(S-09106)

作者简介: 柏林(1972-),男,重庆大学副教授,博士,研究方向为虚拟仪器与信号处理,(Tel)023-65106974;
(E-mail)bolin0001@yahoo.com.cn。

快速傅立叶变换(FFT, fast Fourier transform)是处理周期信号的经典方法,但是直接由 FFT 谱线读出的信号参数的误差有时很大。例如在加矩形窗的 FFT 谱分析中,幅值误差最大可达 31%,相位误差最大可达 90°。而频率校正是幅值、相位校正的基础,为了减小 FFT 谱分析的误差,目前已经发展了形形色色的频谱校正方法,如:幅值比值法、相位差法、双窗法等^[1-2]。

在这些方法中,比值法目前工程信号处理中应用最广,也是算法最为成熟的一类频率校正方法。自十九世纪 70 年代 Rife 和 Jane 提出幅值比值法^[3-4],Grandke 于 1983 年提出了加 Hanning 窗的比值法^[9],Quinn 于 1994 年提出了一种精度更高的比值法算法^[7],Jacobsen 于 2007 年提出了一种更为简洁的比值法算法^[13],陈奎孚于 2008 年提出了复比值法^[10]。由于该类方法的实现算法众多,影响各种算法精度的因素多杂,针对不同的工程环境,算法的选择已经成为工程信号处理领域亟待解决的问题之一。

笔者主要介绍了该比值频率校正该类方法中的十一种具体算法,在各类算法实现理论分析基础上,结合具体的计算机仿真实验,深入分析信噪比、信号采样点数以及无量纲频率偏移量对各种方法精度的影响。根据频谱校正所采用 FFT 谱线的多少,可将比值法分为两谱线比值法与三谱线比值法两个自类。下面就对这两个子类中的各种频谱校正算法进行详细的介绍与精度分析。

1 两谱线比值法

两谱线比值校正法主要利用归一化后差值为 1 的主瓣峰顶附近两条谱线的窗谱函数的比值,建立一个以校正频率为变量的方程,解出校正频率,再进行幅值和相位校正^[1]。设被分析信号为 0~T 时间内对加高斯白噪声的单一频率正弦信号,将该信号按 $\Delta t = T/N$ 进行采样,得到采样序列为

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 Tn/N + \theta_0) + z(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (1)$$

式(1)中 f_0 , A , θ_0 分别为信号的频率、幅度和初相位, $z(n)$ 为零均值高斯白噪声,方差为 σ^2 , 采样序列的信噪比为 $SNR = A^2 / (2\sigma^2)$ 。 $x(n)$ 的 N 点 FFT 记为 $X(n)$, 由于实序列 FFT 的对称性可只考虑离散频谱的前 $N/2$ 点,并记 $X(n)$ 幅值最大处的谱线序号为 m , 与 m 谱线相邻的两谱线序号记为 $m-1$ 和 $m+1$, 故这三条谱线的复数值记为 X_{m-1} 、 X_m 、 X_{m+1} 。下面就以式(1)中的采样序列为研究对象,

分别采用不同的两谱线比值算法进行分析。

1.1 Rife-Jane 和 Grandk 频率估计方法

当信号频率不是 FFT 的频率分辨率 Δf 的整数倍时,由于 FFT 的“栅栏”效应引起频谱泄漏,此时信号的实际频率位于 FFT 主瓣内两条最大谱线之间,可以利用第二谱线与最大谱线的幅度比值估计信号的实际频率在两条谱线之间的精确位置^[3]。

Rife-Jane 方法就是在不加窗的情况下,利用 $X(n)$ 在主瓣内两条谱线幅值比值估计信号的实际频率的位置。频率校正公式为式(2)

$$f_r = (m + \delta)\Delta f. \quad (2)$$

其中, δ 为无量纲频率偏移量^[1,4,5], 简称频偏

$$\delta = \begin{cases} \frac{|X_{m+1}|}{|X_{m+1}| + |X_m|}, & |X_{m+1}| \geq |X_{m-1}|; \\ \frac{-|X_{m-1}|}{|X_{m-1}| + |X_m|}, & |X_{m-1}| > |X_{m+1}|. \end{cases} \quad (3)$$

利用不加窗频谱次大谱线与最大谱线的幅度之比进行频率插值的优点是:插值算法简单,易于实现;且不考虑噪声影响,FFT 主瓣内的次大谱线的幅度永远大于旁瓣幅度,插值不会出现方向错误。其缺点是:在有噪声的情况下,当 δ 的绝对值较小时,可能出现位于 FFT 频谱最大值另一侧第一旁瓣的幅度超过主瓣内次大值的情况,从而造成频率插值方向相反,引起较大的频率估计误差^[6]。

Grandke 方法就是对(1)中序列加 Hanning 窗后进行 FFT 变换,再利用 $X(n)$ 在主瓣内两条谱线幅值比值来估计信号的实际频率的位置^[5,9]。频偏 δ 的公式为:

$$\delta = \begin{cases} \frac{2|X_{m+1}| - |X_m|}{|X_{m+1}| + |X_m|}, & |X_{m+1}| \geq |X_{m-1}| \\ \frac{|X_m| - 2|X_{m-1}|}{|X_{m-1}| + |X_m|}, & |X_{m-1}| > |X_{m+1}| \end{cases} \quad (4)$$

将 δ 代入式(2)即得到校正频率。这种方法的优点是加窗使主瓣变宽,主瓣内出现多条谱线,同时也使得分别位于最大值两侧的第二大和第三大谱线更容易区分,因此基本避免了频率插值出现方向错误,极大地提高了频率估计精度^[6]。

1.2 Quinn 方法

Quinn 方法就是,利用 FFT 主瓣内次大谱线与最大谱线 FFT 系数复数值 X_m 之比的实部进行频率插值的方法。其频率插值为^[7]:

$$\delta = \begin{cases} \delta_1 = a_1 / (1 - a_1), & \delta_1 > 0, \delta_2 > 0; \\ \delta_2 = a_2 / (1 - a_2), & \text{其它。} \end{cases} \quad (5)$$

式(5)中, $a_1 = \text{Re}\{X_{m+1}/X_m\}$, $a_2 = \text{Re}\{X_{m-1}/X_m\}$, $\text{Re}\{x\}$ 表示取 x 的实部。该方法与 Rife-Jane 方法相比,在 $|\delta|$ 很小时,由于 $|X_{m-1}|/|X_m|$ 与 $|X_{m+1}|/|X_m|$

| 非常接近, 所以 Rife-Jane 方法容易受噪声干扰出现插值方向错误, 而 X_{m-1} 与 X_{m+1} 的相位相差 180° , Quinn 方法取 X_{m-1} 与 X_{m+1} 的实部, 正是利用了相位信息来判断插值方向, 从而避免了 Rife-Jane 方法在 $|\delta|$ 较小时频率估计误差激增的问题, 所以不容易受噪声干扰^[6]。

对加汉宁的窗被分析信号作 Quinn 频谱校正时, 频偏 δ 可表示为式(6)^[8]:

$$\delta = \begin{cases} \delta_2 = (2a_2 + 1)/(1 - a_2), \delta_1, \delta_2 < 0; \\ \delta_1 = (2a + 1)/(a_2 - 1), \text{其它。} \end{cases} \quad (6)$$

文献[6]指出因为 FFT 具有提高白噪声背景中正弦信号信噪比的作用, 其信噪比增益与数据长度有关, 加(非矩形)窗使得有效数据长度缩短, 造成 FFT 频谱的信噪比增益损失约 3~5 dB。因此与不加窗相比, 加汉宁窗时的频率估计误差均略有增加(除 Rife-Jane 方法外, 因为加窗避免了 Rife-Jane 方法插值方向错误, 从而降低了估计误差, 加窗时的 Rife-Jane 方法(即 Grandke 方法)和 Quinn 方法的估计误差几乎相同。

1.3 复比值校正法

文献[10]指出, 在接近整周期采样时, 由于负频率泄露的干扰改变了次高谱线的高度, 造成校正区间发生误判, 从而导致 Rife-Jane 方法校正之后的结果比直接从 FFT 离散谱读出的结果更差。文献同时给出了一种基于复比值的校正方法, 该方法能够避免插值方向错误。校正公式仍为式(2), 其中频偏 δ 公式为式(7)^[10]

$$\delta = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{m+1}}{X_{m+1} - X_m} \right\}, |X_{m+1}| \geq |X_{m-1}|; \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{m-1}}{X_{m-1} - X_m} \right\}, |X_{m-1}| > |X_{m+1}|. \end{cases} \quad (7)$$

由于 FFT 输出的局部峰值的三个谱线的幅值对信号的频率进行校正时虚部很小, 可取其实部。

在加汉宁窗的情况下的 δ 公式为式(8)

$$\delta = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2X_{m+1} + X_m}{X_{m+1} - X_m} \right\}, |X_{m+1}| \geq |X_{m-1}|; \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{2X_{m-1} + X_m}{X_{m-1} - X_m} \right\}, |X_{m-1}| > |X_{m+1}|. \end{cases} \quad (8)$$

文献[10]指出, 在接近整周期采样时, 由于负频率泄露的干扰改变了次高谱线的高度, 造成校正区间发生误判, 从而导致 Rife-Jane 方法校正之后的结果比直接从 FFT 离散谱读出的结果更差。文献同时给出了一种基于复比值的校正方法, 该方法能够避免插值方向错误。校正公式仍为(2), 其中频偏 δ 公

式为式(7)^[10]

$$\delta = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{m+1}}{X_{m+1} - X_m} \right\}, |X_{m+1}| \geq |X_{m-1}|; \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{m-1}}{X_{m-1} - X_m} \right\}, |X_{m-1}| > |X_{m+1}|. \end{cases} \quad (7)$$

由于 FFT 输出的局部峰值的三个谱线的幅值对信号的频率进行校正时虚部很小, 可取其实部。

在加汉宁窗的情况下的 δ 公式为式(8):

$$\delta = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2X_{m+1} + X_m}{X_{m+1} - X_m} \right\}, |X_{m+1}| \geq |X_{m-1}|; \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{2X_{m-1} + X_m}{X_{m-1} - X_m} \right\}, |X_{m-1}| > |X_{m+1}|. \end{cases} \quad (8)$$

2 三谱线比值校正法

三谱线比值法是利用 FFT 离散谱局部峰值的三条谱线对信号的频率进行估计, 与两谱线方法相比, 由于三条谱线含有更多的信息, 在一定条件下能够提高频率估计的精度。

2.1 复合复比值校正法

由于复比值法原理上对插值方向不敏感, 因而可利用最高谱线左右两侧分别校正频率, 记为 f_L 和 f_R 。可以由 f_L 和 f_R 进一步组合得到更为稳健的结果, 这就是复合复比值法^[10], 即

$$f_r = \lambda f_L + (1 - \lambda) f_R. \quad (9)$$

$$f_L = \left[m + \operatorname{Re} \left(\frac{X_{m-1}}{X_{m-1} - X_m} \right) \right] \Delta f, \quad (10)$$

$$f_R = \left[m + \operatorname{Re} \left(\frac{X_{m+1}}{X_{m+1} - X_m} \right) \right] \Delta f. \quad (11)$$

这里的 λ 和 $1 - \lambda$ 为权系数。

$$\lambda = \frac{1 - \sin(\pi\delta)}{2}. \quad (12)$$

δ 为复比值法中利用最高和次高谱线代入式(6)得到的结果。当接近整周期采样时, 复合复比值法的误差的均方根值(RMS)明显小于 Quinn 法; 在接近 $0.5\Delta f$ 时, 该方法的误差均方根值与 Quinn 法极为接近。

2.2 Vetterling 法和 Voglewede 法

Vetterling 方法是在不加窗情况下, 使用信号 FFT 输出的局部峰值的三个谱线的幅值对信号的频率进行校正, 校正公式为式(2), 其中 δ 为式(13)^[11-12]

$$\delta = \frac{|X_{m+1}| - |X_{m-1}|}{4|X_m| - 2|X_{m+1}| - 2|X_{m-1}|}. \quad (13)$$

该方法不需要比较最大谱线两侧谱线的大小, 而使用直接 $|X_m|, |X_{m+1}|, |X_{m-1}|$ 计算, 故具有计算简单快捷等优点, 但是在有噪声的情况下, 校正精度不

高,性能较差^[13]。

Voglewede 法是针对 Vetterling 法的缺点提出的,该方法是在加窗的情况下,仍使用 FFT 输出的局部峰值的三个谱线的幅值对信号的频率进行校正,校正公式为(2),推导出 δ 的公式为式(14)^[12]

$$\delta = \frac{P(|X_{m+1}| - |X_{m-1}|)}{(|X_m| + |X_{m+1}| + |X_{m-1}|)} \quad (14)$$

其中 P 为窗系数如表 1 所示,与 Vetterling 法相比该方法能够显著提高校正精度,仅仅是在信号运行 FFT 之前加窗,运算相当简单^[14]。

表 1 窗系数

加窗类型	P	Q
哈明窗	1.22	0.60
汉宁窗	1.36	0.55
BLACKMAN	1.75	0.55
BLACKMAN-HARRIS	1.72	0.56

2.3 Jacobsen 方法

Jacobsen 方法是针对 Vetterling 法校正精度不高的缺点提出的,该方法使用 FFT 输出的局部峰值的三个谱线的系数复数值对信号频率进行校正,校正公式为(2),不加窗时, δ 的公式为式(15)^[13-14]

$$\delta = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{(X_{m+1} - X_{m-1})}{(2X_m - X_{m+1} - X_{m-1})} \right\} \quad (15)$$

加窗时 δ 的公式为式(16)^[13-14]

$$\delta = \operatorname{Re} \left\{ \frac{Q(X_{m+1} - X_{m-1})}{(2X_m + X_{m+1} + X_{m-1})} \right\} \quad (16)$$

其中, Q 为窗系数如表 1 所示。与 Vetterling 法、Voglewede 法和加窗 Jacobsen 法相比,不加窗 Jacobsen 法运算简单且精度高^[13]。不加窗和加窗的 Jacobsen 法与 Quinn 法相比,在整周期采样时精度更高一些,且该算法不需要迭代,算法更为简单^[14]。

3 算法的性能分析与比较

本节将使用频率估计方差下限对上述方法的精度进行评估,分别分析信噪比、波形数以及频偏等参数对各方法精度的影响。Rife-Jane 方法在受噪声干扰时,可能存在频率插值方向错误,Vetterling 法存在使用旁瓣内谱线进行校正的错误,因此,该两种方法只分析频偏的影响,而不考虑信噪比和波数的影响。为了描述方便,在下文的分析图中将用公式代表校正方法,式(3)-(9)、(13)-(16)分别代表 Rife-Jane 方法、Grandke 方法、Quinn 方法、加窗 Quinn、复比值法、加窗复比值法、复合复比值法、

Vetterling 方法、Voglewede 方法、Jacobsen 方法、加窗 Jacobsen。

根据参数估计理论,在给定数据长度和信噪比前提下,AWGN 背景中信号参数的任意无偏估计方差不会小于某一确定值,即方差下限。方差下限有不同的确定方法,常用的为 Cramer Rao 下限(CR 下限)。在信号频率不接近零或二分之一采样频率、初始相位未知情况下,实正弦信号频率估计方差下限公式为式(17)^[15]

$$\sigma_{\text{CRB}}^2 = \frac{3}{T^2 N \pi^2 \cdot \text{SNR}} \quad (17)$$

使用仿真试验对各种估计方法的精度进行对比,为了方便与 FFT 本身的频率分辨率 Δf 对比,设频率估计的误差为 $\sigma = (f_0 - f_r) / \Delta f$,记所有样本误差的均方根值为 σ_{RMS} ,同时为了便于与估计误差的理论下限进行比较,下面给出的结果均为归一化频率估计系数 ϕ ,即频率估计均方根值与相应的标准差下限 σ_{CRB} 的比值,如式(18)

$$\phi = \frac{\sigma_{\text{RMS}}}{\sigma_{\text{CRB}}} \quad (18)$$

3.1 信噪比对频率估计精度的影响

仿真试验环境如下,采样频率为 1 000 Hz,采样点数为 1 000,式(1)中信号幅值 A 为 1,而信噪比 SNR 从 0 dB 变化到 50 dB,步长 2 dB,而 $f_0 / \Delta f$ 在 10~11 之间随机分布。对于每个 SNR 产生 1 000 个样本,而对这 1 000 个样本,相位 θ_0 随机分布在 $[-\pi, \pi]$,计算样本的频率估计误差的均方根值 σ_{RMS} ,进而考察各种方法的在不同的信噪比情况下的精度。

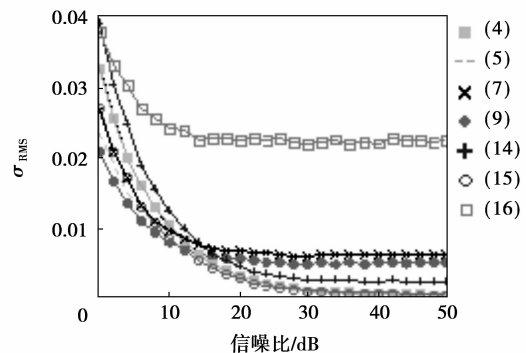


图 1 信噪比对频率估计误差 σ_{RMS} 的影响

在图 1 中,横坐标是信噪比,单位 dB,纵坐标是各种方法的频率估计误差均方根值 σ_{RMS} 。Grandke 方法、加窗的 Quinn 方法以及加窗的复比值法的误差几乎相同,故只给出 Grandke 方法的误差曲线。

当信噪比较低的时,所有方法的估计误差随着

信噪比的增加而减小。当信噪比较高时,除了 Grandke 方法(与加窗 Quinn 和加窗复比值法精度相同),其他的方法都会达到频率估计的下限,即信噪比的提高也无法提高其频率估计的精度。例如在上述仿真的条件下,加窗 Jacobsen 方法,复比值法,Quinn 方法,复合复比值法,Voglewede 法和 Jacobsen 方法的频率估计下限为 $0.022\Delta f, 0.006\Delta f, 0.006\Delta f, 0.005\Delta f, 0.0023\Delta f$ 和 $0.0004\Delta f$,在较高信噪比的情况下复比值法和 Quinn 方法的精度几乎相同。Grandke 方法能够随着信噪比的提高而提高频率估计的精度。在上述仿真条件下,当 $SNR < 10$ dB 时,复合复比值法的估计精度最高,当 10 dB $< SNR < 32$ dB 时, Jacobsen 方法的估计精度最高,当 $SNR > 32$ dB 时,加窗复比值法的精度最高。

作为比较使用 CR 下限对各种方法频率估计精度进行分析,由式(17)可见 σ_{CRB} 和 SNR 成反比,详见文献[6]。在图 2 中,横坐标是信噪比,单位 dB,纵坐标是各种方法的归一化频率估计系数 ϕ 。从图中可以得出和图 4 相同的分析,当归一化频率估计误差曲线变成直线时,也就是该方法达到了频率估计的下限。例如信噪比在 23 dB 左右时,复合复比值法达到了下限。

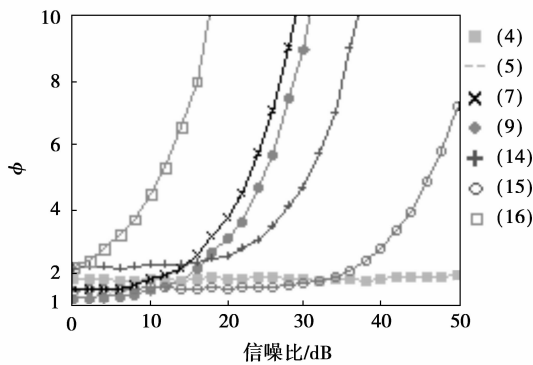


图 2 信噪比对归一化误差的影响

3.2 波数对频率估计精度的影响

仿真试验环境如下,采样频率为 1 000 Hz, $f_0 T = 100 + \delta$,其中 δ 随机分布在 $[0, 1]$ 之间,采样点数从 10 变化到 400,步长 20 个点,也就是仿真信号的波形数从 1 个变化到 40 个,步长为 2 个波形,式(1)中信号幅值 A 为 1,而信噪比 SNR 为 10 dB,而对于每个波形数产生 1 000 个样本,而对这 1 000 个样本,相位 θ_0 随机分布在 $[-\pi, \pi]$,计算样本的归一化频率估计系数 ϕ ,考察仿真信号含有的波形数对这些方法精度的影响。

图 3 的纵坐标是归一化频率估计 ϕ ,横坐标是仿

真信号中含有的波形数。从图 3 可以看出只有加窗 Jacobsen 方法的归一化频率估计系数 ϕ 是单调上升的。其他方法当波数达到 10 个左右时, ϕ 不再随着波数的增加而减小,并逐渐稳定在某个值附近,这些方法的总体精度从高到低排列如下,复合复比值法,Quinn 方法,复比值法, Jacobsen 方法, Grandke,加窗 Jacobsen 方法, Voglewede 法,其中 Grandke 方法、加窗复比值法以及加窗 Quinn 方法精度几乎相同。

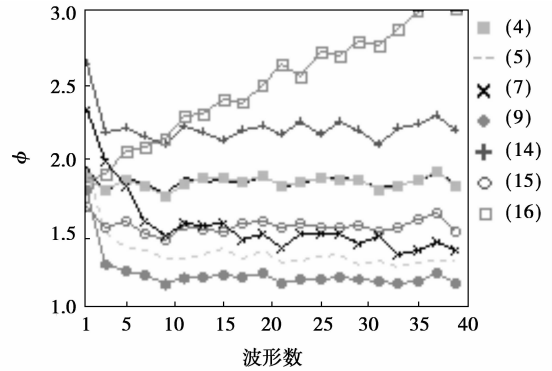


图 3 波形数对归一化误差的影响

3.3 频偏对频率估计精度的影响

仿真试验环境如下,采样频率为 1 000 Hz,采样点数为 1 000,式(1)中信号幅值 A 为 1,而信噪比 $SNR = 3$ dB。 $f_0 / \Delta f$ 从 10 变化到 11,步长 $0.05\Delta f$ 。对于每个 f_0 生成 1 000 个样本序列,而对这 1 000 个样本,相位 θ_0 随机分布在 $[-\pi, \pi]$ 。由图 2 可知,在当前的模拟环境中,各方法的性能比较稳定。为了视图方便,图 5 中给出了利用式(3)、(4)、(5)、(6)、(13)以及(14)计算出的归一化频率估计曲线。图 5 的横坐标是频偏,纵坐标是归一化频率估计系数 ϕ 。

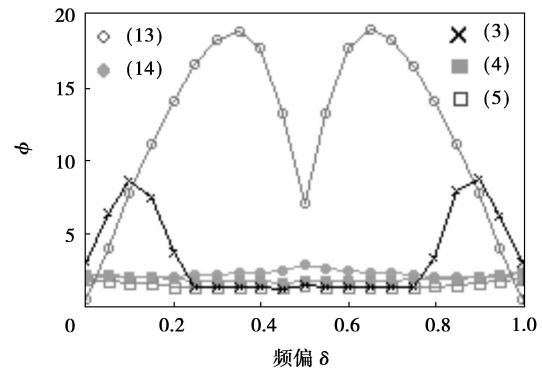


图 4 频偏对归一化误差的影响

从图 4 可以明显的看出 6 条曲线是关于 $\delta = 0.5$ 对称的,故只讨论 δ 在 $0 \sim 0.5$ 之间曲线的变化情况。由图可知, Rife-Jane 方法在 $\delta < 0.2$ 时,频率估

计的误差明显偏大,估计精度很差;而当 δ 靠近 0.5 时,误差接近频率估计误差的下限,估计精度较好。这是由于在有噪声的情况下,当 δ 的绝对值较小时,可能出现位于 FFT 频谱最大值另一侧第一旁瓣的幅度超过主瓣内次大值的情况,从而造成频率插值方向相反,引起较大的频率估计误差,即使信噪比较高时,该方法在 $|\delta| < 0.1$ 时也很难得到满意的精度,因此这种方法只能用到 $|\delta|$ 较大的情况^[6,16]。Vetterling 方法由于使用局部峰值的三个谱线进行校正,这三条谱线必有一条是第一旁瓣内的谱线,而使用平均插值导致较大的偏差,如图 5 所示,偏差最大值接近 $19\sigma_{\text{CRB}}$,由于在接近整周期采样时,两个次大谱线幅值较小,校正精度比频率估计误差的下限还要低,但是在 $\delta=0.05$ 时,偏差已经达到了 $4\sigma_{\text{CRB}}$,这种方法的精度很低,已经无法用来校正。

Grandke 方法和 Voglewede 方法本质上是 Rife-Jane 方法和 Vetterling 方法加有汉宁窗的算法,精度显著提高。在 $\delta=0$ 时,Grandke 方法和 Voglewede 方法的误差 σ_{RMS} 分别 $2.15\sigma_{\text{CRB}}$ 和 $1.83\sigma_{\text{CRB}}$; δ 在 $0\sim 0.5$ 之间时,两种算法的误差分别是单调下降和单调上升的;在 $\delta=0.5$ 时,两种方法的误差 σ_{RMS} 分别 $1.63\sigma_{\text{CRB}}$ 和 $2.85\sigma_{\text{CRB}}$ 。精度提高的原因在于加窗使主瓣变宽,主瓣内出现多条谱线,同时也使得分别位于最大值两侧的第二大和第三大谱线更容易区分,因此基本避免了 Rife-Jane 方法频率插值方向错误^[6]和 Vetterling 方法使用旁瓣内谱线进行平均比值校正的错误。加汉宁窗的 Quinn 方法与 Grandke 方法的精度几乎相同,但是比 Quinn 方法精度差,这是由于加窗使得有效数据长度缩短,造成 FFT 频谱的信噪比增益损失,从而降低了频率估计的精度。在上述 6 种方法中,Quinn 方法的精度最高,在整周期情况下,误差 $\sigma_{\text{RMS}} = 1.78\sigma_{\text{CRB}}$, δ 在 $0\sim 0.5$ 之间时,该算法的误差单调下降。

使用本小节的仿真模型,在图 5 中给出了利用式(5)-(9)、(15)以及(16)计算出的归一化频率估计曲线,图 6 的横坐标是频偏,纵坐标是归一化频率估计系数 ϕ 。

从图 5 上可以明显的看到六条曲线是关于 $\delta=0.5$ 对称的,只讨论 δ 在 $0\sim 0.5$ 之间曲线的变化情况。复比值法在 $\delta=0$ 时, $\sigma_{\text{RMS}} = 2.2\sigma_{\text{CRB}}$, 整周期频率估计误差要比 Quinn 方法大,但误差曲线随着 δ 的增加急骤下降,在 $\delta=0.25$ 时误差曲线已和 Quinn 方法重合;Jacobsen 方法在 $\delta=0$ 时, $\sigma_{\text{RMS}} = 1.22\sigma_{\text{CRB}}$, 整周期频率估计误差要明显小于 Quinn 方法,但误差曲线随着 δ 的增加而上升,在 $\delta=0.2$ 时误差已经大于 Quinn 方法;复合复比值法 $\delta=0$ 时,

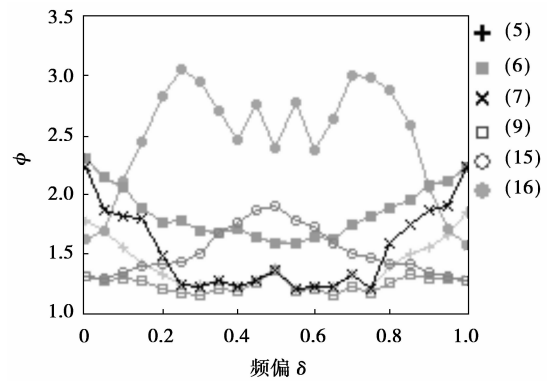


图 5 频偏对归一化误差的影响

$\sigma_{\text{RMS}} = 1.22\sigma_{\text{CRB}}$, 与 Jacobsen 方法相同,但误差曲线随着 δ 的增加有小幅下降,只是在 δ 接近 0.5 时才与 Quinn 方法重合,所以说复合复比值法总体性能优于 Quinn 方法和 Jacobsen 方法;加窗的 Jacobsen 方法和复比值法,都比原来不加窗时的精度低,这是由于加有汉宁窗时,使得有效数据长度缩短,造成 FFT 频谱的信噪比增益损失,从而降低了频率估计的精度,加汉宁窗的 Jacobsen 方法在整周期时的误差仍要比 Quinn 方法低,加汉宁窗的复比值法误差曲线几乎完全和加汉宁窗的 Quinn 方法重合。

4 工程中算法的选择

综上所述,各种频谱校正方法都有各自的优缺点,下面就以动平衡试验为例,对工程中如何选择合适的频谱校正方法进行研究。旋转机械在现代工业生产中被广泛使用,其动平衡程度的高低决定了该产品的运行稳定性、寿命等关键性能。在动平衡测量中,传感器输出的振动信号主要包括:与主轴转频相同的基频不平衡信号、动平衡测量振动系统的固有频率干扰、转子系统自身的一些故障激发的倍频信号、工频干扰以及多种电磁噪声等,因此该振动信号的频谱可看作为若干个单频率信号频谱的叠加。从强噪声和干扰背景中获取不平衡信号的幅值和相位是实现高精度动平衡测量的关键,而不平衡信号频率估计的高精度又是实现其幅值和相位精确提取的基础。

在动平衡实验台进行实验,转子旋转速度为 1 200 r/min,计算得到基频频率为 20 Hz,位移传感器安装轴承支座上,采样频率为 1 kHz,采样点数为 1 000 点,计算可得信号中约含有基频信号的 20 个周期。图 6(a)为转子平衡前采集信号的时域波形,图 6(b)为其频谱,从频谱图可看出,20 Hz 左右的信号分量(正好对应着转子的基频)的幅值最高,是由不平衡故障引起的。由于现场存在干扰,信噪比不

高,参考图 1 当信噪比小于 10 dB 时,复合复比值法精度最高,再参考图 3,在信号中波数为 20 个时,复合复比值法精度最高,故选择复合复比值法校正基频频率,而后进行基频幅值和相位的校正,从而实现基频的精确提取用于转子动平衡。

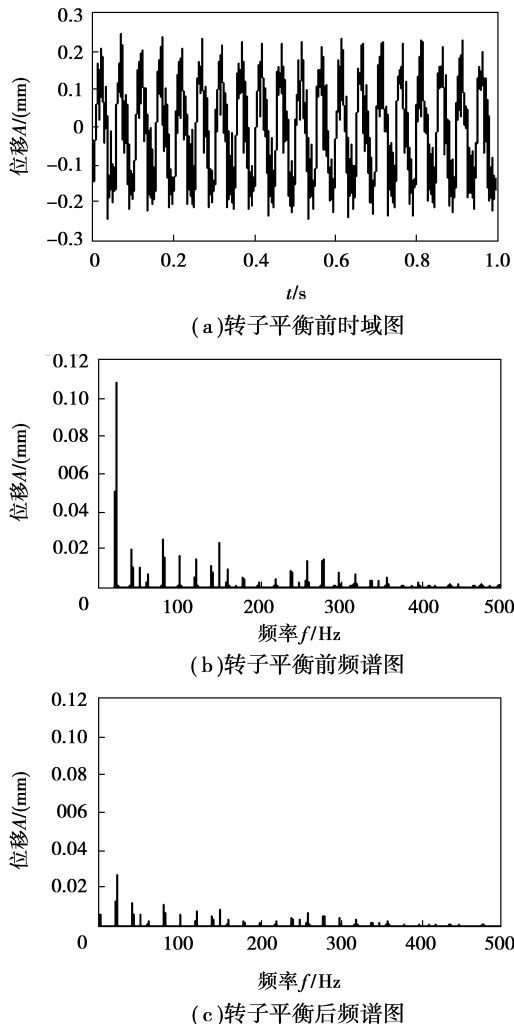


图 6 动平衡实验结果图

对转子进行平衡之后,得到平衡后转子振动的频谱如图 6(c) 所示,转子基频(20 Hz)振幅从 0.116 mm 下降到 0.027 mm,可见达到较高的平衡精度。

5 结 论

综上所述,可以得出以下结论:

1) 频率估计精度与 FFT 最大谱线对应的频率的相对偏差有关。利用 FFT 主瓣幅度最大值处和邻近最大值的一条或两条谱线的幅度可以提高基于 FFT 的频率估计方法的估计精度。

2) 频率估计精度与信号的信噪比有关。各种频率估计方法的并不是随着信噪比的提高而提高,信

噪比较低时,复合复比值法的精度较高,信噪比较高时, Jacobsen 方法的精度较高。

3) 频率估计精度与分析信号所含有的波形数有关。增加波数能够显著提高其精度,当波数较多时,各方法的精度较好且稳定,相反信号含有的波数较小时,各种方法频率估计的精度较差

4) 频率估计精度与加窗处理有关。加窗处理的方法使主瓣变宽,主瓣内出现多条谱线,同时也使得分别位于最大值两侧的第二大和第三大谱线更容易区分,故能够提高 Grandke 和 Voglewede 这两种方法的频率估计精度。但在复比值法、Quinn 方法以及 Jacobsen 方法频率估计达到下限之前,加窗处理会使得有效数据长度缩短,造成其估计精度降低。

参考文献:

- [1] 丁康, 张晓飞. 频谱校正理论的发展[J]. 振动工程学报, 2000, 13(1): 14-22.
DING KANG, ZHANG XIAO-FEI. Advances in spectrum correction theory[J]. Journal of Vibration Engineering, 2000, 13(1):14-22.
- [2] 黄迪山. FFT 相位误差分析及实用校正方法[J]. 振动工程学报, 1994, 7(2): 185-189.
HUANG DI-SHAN. Analysis on phase error in FFT and a practical approach method [J]. Journal of Vibration Engineering, 1994, 7(2):185-189.
- [3] FIFE D C, VINCENT G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones [J]. The Bell System Technical Journal, 1970, 49(2):197-228.
- [4] JAIN V K, COLLINS W L Jr, DAVIS D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1979, 28(2): 113-122.
- [5] 谢明, 丁康. 频谱分析的校正方法[J]. 振动工程学报, 1994, 7(2): 172-179.
XIE MING, DING KANG. Rectifying technique of spectrum analysis [J]. Journal of Vibration Engineering, 1994, 7(2): 172-179.
- [6] 齐国清. 几种基于 FFT 的频率估计方法精度分析[J]. 振动工程学报, 2006, 19(1): 96-92.
QI GUO-QING. Accuracy analysis and comparison of some FFT-based frequency estimators [J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(1): 96-92.
- [7] QUINN B G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(5): 1264-1268.

(下转第 31 页)

的理论研究转化为实际应用打下良好基础,同时对相关课题的研究具有借鉴意义。

参考文献:

- [1] 王欢. 重型车辆多桥转向电控系统研究[D]. 长春: 吉林大学机械科学与工程学院, 2008.
- [2] 李炎亮. 全路面起重机多桥动态转向控制系统研究 [D]. 长春: 吉林大学机械科学与工程学院, 2006.
- [3] ALFI A, FARROKHI M. Hybrid state-feedback sliding-mode controller using fuzzy logic for four-wheel-steering vehicles[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2009, 47(3): 265-284.
- [4] ZHAO Y E, ZHANG J W. Yaw stability control of a four-independent-wheel drive electric vehicle [J]. *International Journal of Electric and Hybrid Vehicles*, 2009, 2(1): 64-76.
- [5] YIN G D, CHEN N. Study on four-wheel steering with direct yaw-moment robust integrated controlsimulation [J]. *Journal of System Simulation*, 2008, 20(16): 4264-4268.
- [6] CANALE M, FAGIANO L. Stability control of 4WS vehicles using robust IMC techniques [J]. *Vehicle System Dynamics*, 2008, 46(11): 991-1011.
- [7] ZHANG X Z, LI H, CAI S F. H₂/H_∞ mixed robust control and simulation for 4WS vehicle[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery*, 2008, 39(8): 14-17, 156.
- [8] WATANABE K, YAMAKAWA J, TANAKA M, et al. Turning characteristics of multi-axle vehicles, *Journal of Terramechanics*, 2007, 44(1): 81-87.
- [9] WU DER HO, LIN JIA HAI, Analysis of dynamic lateral response for a multi-axle-steering tractor and trailer [J]. *Heavy Vehicle Systems*, 2003, 10 (4): 281-294.
- [10] SANO S, FURUKAWA Y SHIRALSHIS. Four wheel steering with rear wheel steer angle controlled as function of steering wheel angle[J]. SAE, Paper, 860625.
- [11] YOU S S, CHAI Y H. Multi-objective control synthesis: an application to 4WS passenger vehicles[J]. *Mechatronics*, 1999, 9(4): 363-390.
- [12] DIRK E S, JONE M. S. Effect of model complexity on the performance of automated vehicle steering controllers: model development, validation and comparison[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1995, 24(2): 163-181.
- [13] HUH K, KIM J. Handling and driving characteristics for six-wheel vehicles [J]. *Journal of Automobile Engineering*, 2000, 214(2): 159-170.
- [14] 喻凡, 林逸. 汽车系统动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005: 235-240.
- [15] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 398-510.
- [8] QUINN B G. Frequency estimation using tapered data[C]// 2006 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, May 14-19, 2006, Toulouse, France. [s. l.]: IEEE, 2006: III-73-III 76.
- [9] GRANDKE T. Interpolation algorithm s for discrete Fourier transforms of weighted signals [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1983; M-32 (2): 350-355.
- [10] 陈奎孚, 王建立, 张森文. 频谱校正的复比值法[J]. *振动工程学报*, 2008, 21(3): 314-318.
CHEN KUI-FU, WANG JIAN-LI, ZHANG SEN-WEN. Spectrum correction based on the complex ratio of discrete spectrum around the main-lobe[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, 21(3): 314-318.
- [11] VWTTERLING V, PRESS W, TEUKLSKY S, et al. *Numerical recipes in C [M]*. Cambridge, United Kingdom; Cambridge University Press, 1992.
- [12] VOGLEWEDE P. Parabola approximation for peak determination[J]. *Global DSP Magazine*, 2004, 3(5): 13-17.
- [13] JACOBSEN E, KOOTSOOKOS P. Fast, accurate frequency estimators [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007(5): 124-125.
- [14] JACOBSEN E On local interpolation of DFT outputs [EB/OL]http://www.ericjacobsen.org/FTinterp.pdf.
- [15] 齐国清. 离散实正弦信号参数估计的 Cramer- Rao 方差下限[J]. *数据采集与处理*, 2003, 18(2): 151-156.
QI GUO-QING. Cramer rao bounds of real sinusoid parameter estimation from discrete-time observations [J]. *Journal of Data Acquisition & Processing*, 2003, 18(2): 151-156.
- [16] 刘渝. 快速高精度正弦波频率估计综合算法[J]. *电子学报*, 1999, 27(6): 126-128.
LIU YU. A fast and accurate single frequency estimator synthetic approach[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 1999, 27(6): 126-128.

(编辑 张小强)

(编辑 张小强)

(上接第 13 页)