

文章编号:1000-582X(2010)10-094-04

# 非线性各向异性扩散的图像修复

陈建军, 田逢春, 邱宇, 宋建文

(重庆大学通信工程学院, 重庆 400044)

**摘要:**根据图像曲率和梯度的特性引入扩散控制变量因子, 提出非线性各向异性扩散的图像修复方法, 能根据图像本身的几何信息进行不同方向和不同强度的扩散。其中关键参数  $p$  能根据图像局部几何信息的曲率和梯度自适应地改变, 并控制扩散方向和扩散强度。扩散过程中, 在图像的边缘区域, 沿边缘方向扩散具有较大的扩散系数, 沿垂直边缘方向扩散具有很小的扩散系数; 在图像的平坦区域, 向周围等强度扩散, 而且扩散强度值较大。实验结果与经典的全变分、曲率驱动和 P-laplace 常数变分方法做比较, 表明研究方法能对图像的破损区域进行修复, 提高图像的质量。

**关键词:**图像修复; 全变分; 曲率; 梯度

**中图分类号:**TP391

**文献标志码:**A

## Image inpainting based on nonlinear anisotropic diffusions

CHEN Jian-jun, TIAN Feng-chun, QIU Yu, SONG Jian-wen

(College of Communications Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044 P. R. China)

**Abstract:** Following the features of curvature and gradient at image edges, an image inpainting method based on nonlinear anisotropic diffusion is proposed. The diffusion can be conducted with different directions and different intensities according to the geometric features of the inpainted images. An adaptive factor is introduced based on the curvature and gradient of the image local geometric information, which can control the diffusion direction and diffusion intensity. At the edges in images, the diffusion coefficients are large for the horizontal directions, while the diffusion coefficients are small for the vertical directions. At the smooth regions, the diffusion coefficients are the same for different directions and they are usually large. Compared with the typical total variation method, the curvature derivation diffusion method, and P-laplace constant variation method, the experimental results show that the proposed method can improve the qualities of the inpainted images

**Key words:** image inpainting; total variation (TV); curvature; gradient

图像修复是用现有的信息来自动恢复丢失的信息。图像修复算法主要分 2 类, 一类是基于纹理结构的修复方法<sup>[1-3]</sup>, 另一类是基于偏微分方程(PDE)的修复算法<sup>[4-6]</sup>, 典型的算法包括全变分(total variation, TV)模型算法<sup>[4]</sup>, Chan 和 Shen 的 3 阶

PDE 模拟 CDD(curvature driven diffusions)算法<sup>[5]</sup>和基于 P-laplace 常数变分算法<sup>[6]</sup>。

偏微分方程是依据图像特征沿等照度线或者沿梯度的方向将周边已知的图像信息扩散填充到未知区域中, 能够很好地恢复图像的线性结构<sup>[7-12]</sup>。其

**收稿日期:**2010-04-20

**基金项目:**重庆市自然科学基金资助项目(2009BB2359); 中国博士后科学基金资助项目(20080430096); 中央高校基本科研业务费资助(CDJRC10160004)。

**作者简介:**陈建军(1978-), 男, 重庆大学博士生, 主要从事图像处理方向研究, (Tel)60781954; (E-mail)cjj@cqu.edu.cn。

田逢春(联系人), 男, 重庆大学教授, 博士生导师, (E-mail)FengchunTian@cqu.edu.cn。

中 Chan 提出的 TV 方法能很好地修复图像的纹理信息,得到了广泛的应用,但是在图像的平坦区域却容易产生阶梯效应<sup>[4]</sup>。为了解决平坦区域的扩散问题,很多学者提出了改进的 TV 方法<sup>[5-15]</sup>,其中张红英等提出 P-laplace 的常数变分方法解决平坦区域的修复问题,但是其中的关键参数  $p$  是 1 个常数,并没有根据图像的几何信息控制图像扩散方向和扩散强度<sup>[6]</sup>。笔者提出改进的 P-laplace 的变分方法,其中基于曲率和梯度的关键变量  $p$ ,它能够根据图像的几何信息控制图像的扩散方向和扩散强度。实验结果表明,研究方法在较好地保持图像纹理信息同时,能对图像破损区域进行较好地修复。

### 1 非线性各向异性扩散方法

令  $u$  为原始图像,  $u_0$  为被噪声污染的图像,那么

$$u_0 = u + n, \quad (1)$$

式中的  $n$  具有零均值,方差为  $\sigma^2$  的随机噪声。采用改进的 P-laplace 的图像修复模型<sup>[6,14]</sup>

$$\begin{cases} \min_u J_p(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(|\nabla u|)} dx dy + \\ \quad \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy; \\ \lambda_D(x, y) = \begin{cases} \lambda & x, y \in \Omega \setminus D; \\ 0 & x, y \in D. \end{cases} \end{cases}, \quad (2)$$

其中:  $p(|\nabla u|)$  为扩散控制变量因子  $1 \leq p(|\nabla u|) \leq 2$ ,取值范围为;  $\lambda_D$  是保真度常数;  $\Omega$  是图像域,  $D$  图像破损区域。式(2)的欧拉-拉格朗日方程为

$$-\operatorname{div}\left[q(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right] + \lambda_D(u - u_0) = 0, \quad (3)$$

其中

$$q(|\nabla u|) = p(|\nabla u|) |\nabla u|^{p(|\nabla u|)-1} + \ln p(|\nabla u|) p'(|\nabla u|) |\nabla u|^{p(|\nabla u|)}. \quad (4)$$

在直角坐标系中,一幅灰度图像可以用  $u(x, y)$  表示灰度,用  $\nabla u = (u_x, u_y)$  表示  $u(x, y)$  的梯度。而在图像的任意像素点处,可以建立  $\eta - \xi$  局部坐标系<sup>[6]</sup>,其中,  $\eta$  轴是垂直于该像素点处的等照度线切线方向,  $\xi$  轴是平行于该像素点处的等照度线切线方向。当  $p(|\nabla u|)$  为常数时,可得扩散方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u|^{p-2} u_{\xi\xi} + (p-1) |\nabla u|^{p-2} u_{\eta\eta}, \quad (5)$$

式(5)扩散方程实质是一个非线性各向异性扩散方程<sup>[6]</sup>,扩散系数  $|\nabla u|^{p-2}$  和  $(p-1) |\nabla u|^{p-2}$  共同控制着沿等照度线  $\xi$  方向和沿梯度  $\eta$  方向的扩散方向和扩散强度。

当  $p(|\nabla u|)$  为变量时,方程(2)同样是一个非

线性各向异性扩散方程。2 个方向扩散的强度的大小由扩散因子  $p(|\nabla u|)$  直接决定,而  $p(|\nabla u|)$  的取值与该点图像像素与周围像素的梯度和纹理的曲率有关,因此需要根据修复区域的纹理特点自适应地选择扩散因子  $p(|\nabla u|)$ ,达到最佳的修复状态,下面讨论对扩散因子  $p(|\nabla u|)$  的取值。

### 2 扩散因子 $p(|\nabla u|)$ 的确定

在图像的修复过程中,在图像的边缘区域,沿边缘方向应当具有较大的扩散系数,沿垂直边缘方向应当具有很小的扩散系数;在图像的平坦区域,向周围等强度扩散,而且扩散强度值较大。因此要将信息有效地扩散到破损区域内部,同时保证信息有效扩散和修复边缘的尖锐性,应合理地控制沿等照度线和垂直于等照度线方向的扩散,扩散因子  $p(|\nabla u|)$  由梯度  $\nabla u$  和等照度线的曲率  $k$  共同决定

$$p = 1 + \frac{k}{k + |\nabla u|}, \quad (6)$$

其中  $k$  为等照度线的曲率

$$k = \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|}. \quad (7)$$

在直角坐标系中的等照度线的曲率  $k$  为

$$k = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

因此扩散因子  $p$  可写成

$$p = 1 + \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_x^2}{u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_x^2 + (u_x^2 + u_y^2)^2}. \quad (9)$$

下面对扩散因子在不同情况下进行讨论

1) 扩散因子  $p$  的取值范围在  $1 \leq p \leq 2$ 。当曲率  $k$  趋近于零,即等照度线趋于直线时,或者梯度  $\nabla u$  趋于无穷大时,扩散因子  $p$  趋近于 1;当曲率  $k$  趋近于无穷大,即等照度线接近 1 个点时,或者梯度  $\nabla u$  趋近于零时,扩散因子  $p$  趋近于 2。

对于  $p=1$  的极限情况,  $\Delta_p u = |\nabla u|^{-1} u_{\xi\xi}$ ,仅仅沿等照度线方向即边缘方向扩散,向与其垂直的梯度方向无扩散,这是各向异性扩散形式。在图像的边缘区域,这种修复方式可以较好地保持图像的纹理,但是在图像的灰度均匀区域即平坦区域,可能并不存在边缘,如果这种方式扩散显然容易造成虚假边缘,扩散时产生阶梯效应,引起图像修复质量严重下降。图 1 是扩散因子  $p$  一定时,梯度随着曲率的增大而增大。

对于  $p=2$  的极限情况,  $\Delta_2 u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$ ,沿等照度

线和梯度方向的扩散强度相同,这是各向同性扩散形式。在图像平坦区域,这种修复方式可以迅速地修复破损区域,但是在图像的边缘区域,这种方式扩散显然容易噪声边缘模糊化。所以需要根据图像修复区域的实际情况,自动地改变曲扩散因子  $p$  的值。

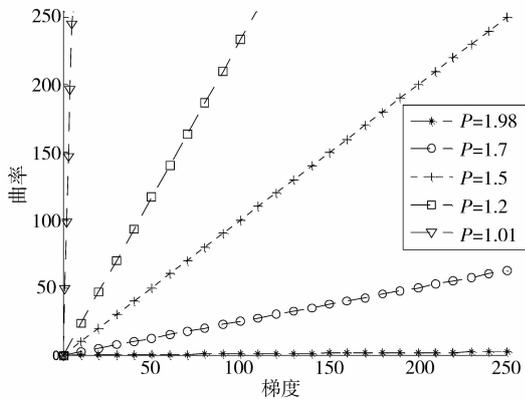


图 1 曲率与梯度的关系

2)当等照度线的曲率  $k$  相同而梯度  $\nabla u$  不同。越接近图像边缘,梯度  $\nabla u$  越大,扩散因子  $p$  就越小,反之,越接近图像平坦区域,梯度  $\nabla u$  越小,扩散因子  $p$  就越大。

从  $\Delta_p u = |\nabla u|^{p-2} u_{\xi\xi} + (p-1) |\nabla u|^{p-2} u_{\eta\eta}$  可以得到:随着扩散因子  $p$  的减小,方程右边第一项系数沿等照度线方向扩散强度相对就越大,方程右边第二项系数沿梯度方向的扩散强度相对就越小。图 2 是等照度线的曲率  $k$  一定时,扩散因子  $p$  随图像梯度的增大而减小。

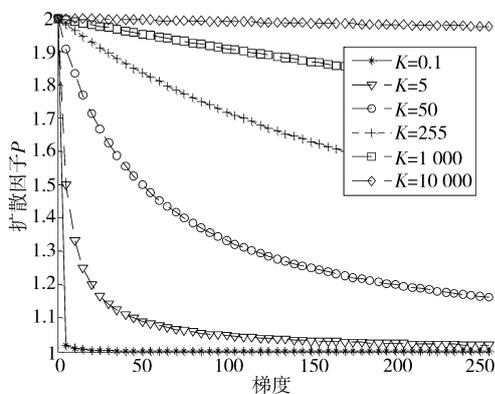


图 2 扩散因子  $p$ , 梯度和曲率  $k$  之间的关系

3)当梯度  $\nabla u$  相同而等照度线的曲率  $k$  不同。梯度  $\nabla u$  取值一定时,等照度线的曲率  $k$  越大,扩散因子  $p$  就越大,反之,扩散因子  $p$  就越小。从非线性

扩散方程  $\Delta_p u = |\nabla u|^{p-2} u_{\xi\xi} + (p-1) |\nabla u|^{p-2} u_{\eta\eta}$  可以得到随着扩散因子  $p$  的增大,沿梯度方向的扩散强度就越大。

### 3 仿真实验结果及分析

在图像修复过程中采用半点差分法得到扩散方程、扩散因子、梯度和曲率的相邻像素的离散表达式<sup>[13]</sup>,然后根据图像指定的修复区域对图像进行修。图 3 是第一个仿真实验,主要说明研究方法的图像修复效果。

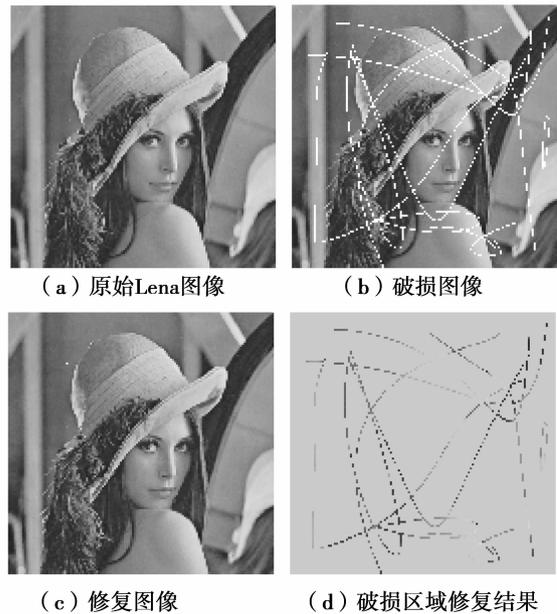


图 3 Lena 图像修复结果

如图 3(a) 所示,原始 Lena  $512 \times 512$  图像,图 3(b) 是图 3(a) 的破损图像,图 3(c) 是采用研究方法对图 3(b) 中的白色破损区域进行修复的结果,图 3(d) 是破损区域的具体修复情况。从主观视觉上看,修复图像 3(c) 与原始图像 3(a) 之间的视觉差别不明显,破损区域得到了较好地修复。

除主观视觉外,峰值信噪比 (PSNR) 作为一种常用的客观评价标准,反映了图像之间的相似程度。对于 8bit 图像,其计算式为

$$PSNR = 20 \log_{10} (255 / RMSE) \text{ (dB)}, \quad (10)$$

其中,255 是灰度图像的最大灰度值, RMSE 代表原始图像  $(x, y)$  与处理后图像  $\hat{f}(x, y)$  之间的误差均方根,其定义为

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N [\hat{f}(x, y) - f(x, y)]^2}{M \times N}}. \quad (11)$$

图 3(b)破损图像的 PSNR 为 33.253 0 dB,图 3(c)修复图像的 PSNR 为 33.871 3 dB,说明采用研究方法可以对破损图像进行修复。为了进一步说明研究方法的图像修复性能,图 4 是研究方法与已有的图像修复方法作比较,用经典的 TV 图像修复方法、CDD 方法和研究方法对眼睛破损图像进行修复。图 4(a)是 256×160 眼睛的原图像,图 4(b)是破损的图像,图 4(c)是 TV 方法修复的图像,图 4(d) CDD 方法修复的图像,图 4(e)是修复的图像,图 4(f)是修复区域的结果。从图 4 的仿真实验结果可以看出,TV 方法和 CDD 方法在修复过程中虽然将眼睛的眉毛部分大概修复出来了,但是还是有明显的修复痕迹,而研究方法恢复的结果比较理想,从图像修复的客观衡量标准 PSNR 也可以得到 TV 方法为 35.133 2 dB,CDD 方法为 34.588 2 dB,P-laplace (P 为常数)方法为 35.459 8 dB,而研究方法为 35.545 2 dB,在不同区域根据梯度和曲率自动地改变扩散的强度,所以较好地修复图像的破损区域,具有较高的 PSNR 值。

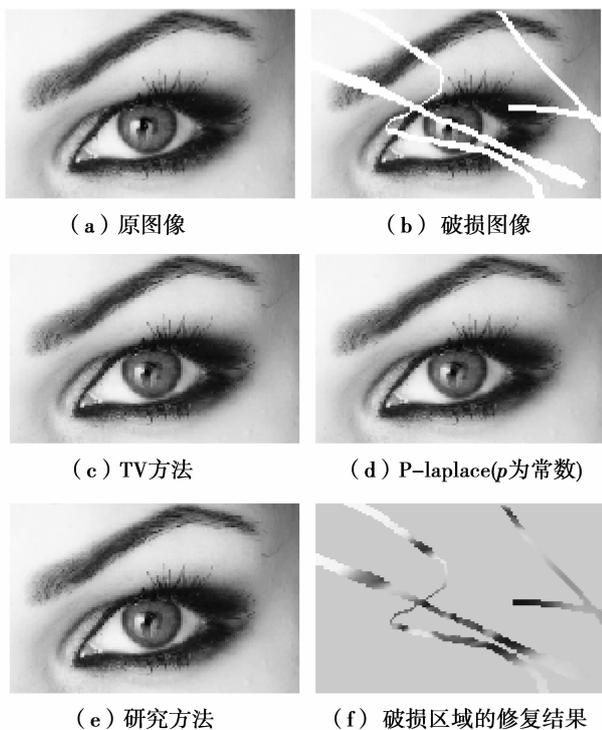


图 4 图像修复效果

表 1 给出了研究算法处理前后图像的 PSNR 值。可以看出,不同算法处理后其 PSNR 值均得到一定程度的提升,但研究方法提升的 PSNR 值最大。

表 1 图像修复方法的 PSNR 值比较 dB

修复方法	破损图像质量	修复图像质量	PSNR 提高值
TV	15.636 4	35.133 2	19.496 8
CDD	15.636 4	34.588 2	18.951 8
P-laplace (p 为常数)	15.636 4	35.459 8	19.823 4
研究方法	15.636 4	35.545 2	19.908 8

为了说明研究方法在纹理丰富的图像修复中的效果和局限性。图 5(a)是 512×512 的 Baboo 破损图像,图 5(b)是采用研究方法修复的结果,图 5(c)是修复图像的局部情况,图 5(d)是修复区域的修复结果。从图 5(b)的实验结果可以看出,虽然方法恢复的结果总体是比较理想的,但是从图 5(c)的局部情况看,可以明显地看到破损区域的线条状,这说明图像修复是具有一定的局限性。

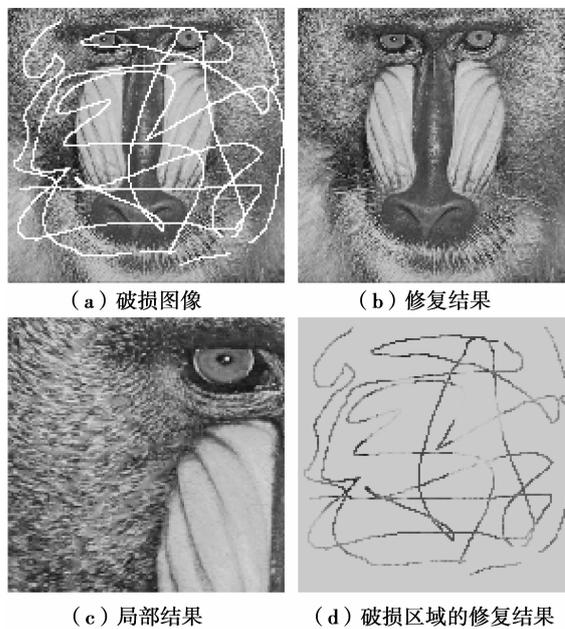


图 5 图像修复效果

### 4 结 论

笔者提出基于曲率和梯度的非线性各向异性扩散的图像修复方法,能根据图像本身的几何信息进行不同方向和不同强度的扩散。在图像的边缘区域仅沿着等照度线方向扩散,能较好地保持边缘信息,而在图像的平坦区域向周围等强度扩散,能较好地实现平滑。方法能提高图像修复的质量,较好地保持图像的细节,视觉效果较好,但是对于修复纹理非常丰富的图像还是具有一定的局限性。

(下转第 101 页)

- integrated waveguide power divider with low insertion loss[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2008, 56(6): 1473-1477.
- [5] CHE W Q, DENG K, WANG D P, et al. Improved spiral compact microstrip resonance cell low-pass filter with wide stopband characteristics[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2007, 49(1): 121-124.
- [6] CHE W Q, DENG K, XU L, WANG D P. A compact wide-band bandpass filter integrating SCMRC and SIRW structures[J]. Nanjing University of Science and Technology, 2006, 49(1): 195-198.
- [7] 湛正良, 吴先良, 丁让箭. 基于介质销钉的基片集成波导带通滤波器的设计[J]. 安徽建筑工业学院学报: 自然科学版, 2007, 15(1): 59-61.  
CHEN ZHENG-GEN, WU XIAN-LIANG, DING RANG-JIAN. Design of substrate integrated waveguide (SIW) bandpass filter based on centered dielectric posts[J]. Journal of Anhui Institute of Architecture, Natural Science Edition, 2007, 15(1): 59-61.
- [8] 冉亮, 吴先良, 丁让箭. 偏置介质销钉基片集成波导带通滤波器的设计[J]. 安徽工业大学学报: 自然科学版, 2007, 31(2): 45-47.  
RAN LIANG, WU XIAN-LIANG, DING RANG-JIAN. Design of offset dielectric post bandpass filter based on substrate integrated waveguide[J]. Journal of Anhui University Technology: Natural Science Edition, 2007, 31(2): 45-47.
- [9] 吴先良, 丁让箭, 吴琼. 基片集成波导带通滤波器的设计[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2007, 30(3): 394-396.  
WU XIAN-LIANG, DING RANG-JIAN, WU QIONG. Design of substrate integrated waveguide(SIW) bandpass filters[J]. Journal of Hefei University of Technology: Natural Science Edition, 2007, 30(3): 394-396.
- [10] 张胜, 王子华, 肖建康, 等. 一种新型的基片集成波导双模带通滤波器[J]. 压电与声光, 2006, 28(6): 674-676.  
ZHANG SHENG, WANG ZI-HUA, XIAO JIAN-KANG, et al. A novel substrate integrated waveguide (SIW) dual-mode bandpass filter[J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2006, 28(6): 674-676.
- [11] YABLONOVITCH E. Photonic band-gap structures [J]. Optical Society of America B Optical Physics, 1993, 10(2): 283-295.
- [12] CASSIVI Y, PERREGRINI L, ARCIONI P, et al. Dispersion characteristics of substrate integrated rectangular waveguide[J]. IEEE Microwave Wireless Components Letters, 2002, 9(12): 333-335.
- [13] 盛振华. 电磁场与微波技术与天线[M]. 西安电子科技大学出版社, 2003.
- [14] 邓磊, 唐高弟. 基片集成波导传输特性分析和应用仿真[C]//第二届全国信息与电子工程学术交流会暨第十三届四川省电子学会曙光分会学术年会. 成都四川省电子学会曙光分会学术年会论文集, 四川, 2006: 306-310.

(编辑 侯 湘)

(上接第 97 页)

## 参考文献:

- [1] RANE S, SAPIRO G, BERTALMIO M. Structure and texture filling-in of missing image blocks in wireless transmission and compression applications [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(3): 296-303.
- [2] MARCELO B. Strong continuation, contrast invariant inpainting with a third-order optimal PDE [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(7): 1934-1938.
- [3] MARCELO B, LUMINITA V, GUILLERMO S. Simultaneous structure and texture image inpainting[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(8): 882-889.
- [4] CHAN T F, SHEN J H. Mathematic models for local non-texture inpainting[J]. SIAM J Appl Math, 2001, 62(3): 1019-1043.
- [5] CHAN T F, SHEN J H. Non-texture inpainting by curvature driven diffusions (CDD) [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2001, 12: 436-449.
- [6] ZHANG H Y, PENG Q C, WU Y D. Wavelet inpainting based on p-laplace operator [J]. Acta automatica sinica, 2007, 33(5): 546-549.
- [7] JIN L H, LI D H, SONG E M. Combining vector ordering and spatial information for color image interpolation [J]. Image and Vision Computing, 2009, 27: 410-416.
- [8] JEAN-FRANCOIS A. Some first-order algorithms for total Variation based image restoration [J]. J Math Imaging Vis, 2009, 34: 307-327.
- [9] ZHONG J M, SUN H F. Wavelet-based multiscale anisotropic diffusion with adaptive statistical analysis for image restoration [J]. IEEE Trans Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2008, 55(9): 2716-2725.
- [10] MA J, FENN M. Combined complex ridgelet shrinkage and total variation minimization [J]. SIAM J Science. Computer, 2006, 28(3): 984.1 000.
- [11] PLONKA G, MA J. Nonlinear regularized reaction-diffusion filters for denoising of images with textures [J]. IEEE Trans Image Process, 2008, 17(8): 1283-1294.
- [12] JULIA A, ANDREA L. A wavelet-laplace variational technique for image deconvolution and inpainting [J]. IEEE Trans Image Process, 2008, 17(5): 657-663.
- [13] CHAN T F, SHEN J, ZHOU H M. Total variation wavelet inpainting [J]. Math J Image Vision, 2006, 25(1): 107-125.
- [14] ALEXANDRU K, HANNELORE L, CSABA A. Multiple solutions for p-laplacian type equations [J]. Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, 2008, 68(5): 1375-1381.
- [15] BLOMGREN P V, CHEN T F. Color TV: total variation method for restoration of vector valued images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 304-309.

(编辑 侯 湘)