

文章编号:1000-582X(2010)11-124-05

## 不同密度流体场中稀疏颗粒运动的数值分析

王子云<sup>1,2</sup>,龙恩深<sup>1</sup>,欧阳金龙<sup>1</sup>,王 勇<sup>3</sup>

(1. 四川大学 建筑与环境学院,四川 成都 610065;2. 中铁二院工程集团有限责任公司,四川 成都 610031;  
3. 重庆大学 三峡库区生态环境教育部重点实验室,重庆 400045)

**摘 要:**推导出流体场中稀疏固体颗粒运动微分方程的三维数值解法。并以固体颗粒的自由沉降为例,采用无量纲微分方程,数值分析了固体颗粒在水中和在空气中的运动规律,重点探讨了 Basset 力在不同密度流体场中的贡献,结果表明颗粒在水中运动时, Basset 力和曳力在同一数量级;而颗粒在空气中运动时,可以忽略 Basset 力的作用,在研究江水源热泵时,分析泥沙在水中的流动,需要考虑 Basset 力的作用。

**关键词:**流场;微分方程;固体颗粒;Basset 力;沉降;数值分析

**中图分类号:**O359

**文献标志码:**A

### Numerical analysis on sparse solid particles' motion in flow fields of different density

WANG Zi-yun<sup>1,2</sup>, LONG En-shen<sup>1</sup>, OUYANG Jin-long<sup>1</sup>, WANG Yong<sup>3</sup>

(1. College of Architecture and Environment, Sichuan University, Chengdu 610065, P. R. China; 2. China Railway Eryuan Engineering Group Co. LTD, Chengdu 610031, P. R. China; 3. Key Laboratory of the Three Gorges Reservoir Region's Eco-Environment, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

**Abstract:** The three dimensional numerical solution for differential equation of motion of sparse solid particles in flow fields is derived. Taking free sedimentation of solid particles as an example, using dimensionless differential equation, the movement rule of solid particles in water and air is numerically analyzed. The contribution of Basset force on solid particles in different density flow fields is paid much attention to. The results show that the Basset force and drag force are in the same magnitude when solid particles move in water; the effect of Basset force can be neglected when solid particles move in the air; and the Basset force should be considered when river water source heat pump and the flow of silt particles are studied.

**Key words:** flow fields; differential equation; solid particles; Basset force; sedimentation; numerical analysis

在目前大力提倡节能减排的形势下,江河水、湖水等地表水源热泵的应用成为可再生能源利用的新热点<sup>[1-2]</sup>,文献[1]对长江重庆段江水水温、水质等

水源概况进行了分析,文献[2]对长江水作为水源热泵冷热源进行了技术分析。通常江水中都含有泥沙,因此泥沙在水中的流动规律及工程应用简化分

收稿日期:2010-06-14

基金项目:国家十一五科技支撑计划项目(2006BAJ01A06-3)

作者简介:王子云(1972-),男,四川大学高级工程师,博士,主要流动传热及可再生能源利用研究,(Tel)13981820692,  
(E-mail)wzyfirst@163.com。

析方法,成为了江河水源热泵研究的重要内容<sup>[3]</sup>,文献[4]对含杂质地表水的管式换热法进行了分析。在流体场中非恒定运动的固体颗粒所受到的各种作用力,按照作用方式的不同可以分为三类:a.与流体和颗粒间的相对运动无关的力,包括惯性力、压力梯度力  $F_P$ 、重力  $F_g$  等;b.依赖于流体和颗粒间的相对运动,且与相对运动速度方向相同的力,这类力有曳力  $F_D$ 、附加质量力  $F_{VM}$ 、Basset 力  $F_B$  等<sup>[5]</sup>,这类力可统称为广义阻力;c.依赖于流体和颗粒间的相对运动,但与相对运动速度方向垂直的力,如 Saffman 力  $F_{LS}$ 、Magnus 力  $F_{LM}$  等,这类力可统称为广义升力。广义阻力、广义升力和压力梯度力组成了流固相间作用力。颗粒在流体中的运动规律分析方面,文献[6]探讨了管内颗粒扩散,文献[7]分析了不可压缩流体中球体加速下降过程;文献[8-10]分析了气体中固体颗粒的二维扩散以及在加速气体中的运动轨迹。在颗粒在流体中的受力分析方面,文献[11]分析了垂直通道湍流中颗粒所受的重力、升力,文献[12]对湍流边界层中的剪切和重力进行了分析。在对 Basset 力的研究文献中,文献[13]对有限雷诺数下的颗粒所受 Basset 力的进行了数值求解;文献[14-15]分析了各种非稳态力对沉降颗粒运动的影响;但这些研究都缺乏对不同密度下颗粒运动特性的比较分析,笔者通过理论推导与数值分析相结合的方法,对不同密度流体场中固体颗粒运动规律的三维数值解法进行推导分析,以固体颗粒自由沉降为例,采用数值分析方法研究各种力对颗粒运动的贡献,为江河水源热泵的研究提供了相关理论研究基础。

## 1 颗粒运动微分方程

Lagrangian 坐标下的颗粒运动微分方程形式为<sup>[15]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = & g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p}\right) + C_d \frac{3\rho_f}{4\rho_p d_p} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) + \\ & \frac{1}{2} C_m \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) + \frac{9C_B}{\rho_p d_p} \sqrt{\frac{\rho_f \mu_f}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \\ & \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) d\tau + \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{d\mathbf{u}_f}{dt} + C_{LM} \frac{3}{4} \frac{\rho_f}{\rho_p} \omega (\mathbf{u}_f - \\ & \mathbf{u}_p) + 6C_{LS} \frac{\sqrt{\rho_f \mu_f}}{\pi \rho_p d_p} \sqrt{\nabla \mathbf{u}_f} (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p), \quad (1) \end{aligned}$$

式中:  $\mathbf{u}_p$  为固体颗粒速度, m/s;  $\rho_p$  为固体颗粒密度, kg/m<sup>3</sup>;  $\rho_f$  为流体密度, kg/m<sup>3</sup>;  $d_p$  为颗粒直径, m;  $\mu_f$  为流体粘性;  $u_f$  为流体速度, m/s;  $C_d$  为曳力系数;  $C_m$  为附加质量力系数;  $C_B$  为 Basset 力系数;  $C_{LM}$

为 Magnus 升力系数;  $C_{LS}$  为 Saffman 升力系数;  $t, \tau$  为微分变量。

## 2 颗粒运动方程数学处理方法

### 2.1 Basset 力的数值积分

由式(1)中的 Basset 力表达式可见,其积分式为奇异积分,并且被积函数中含有未知待求解函数,这种特征和方程的非线性一起使得对微分方程的理论解析比较困难。同样原因,在研究微分方程时,也必须考虑其中的 Basset 力项计算式的合理计算方法。因 Basset 力表达式中的被积函数在积分区间有一奇点,属于广义积分,文献[16]分析了其收敛性,并构造了其积分格式,根据复合梯形公式构造 Basset 力积分项的计算格式为:

$$\begin{aligned} I_B = & \frac{1}{2} h \left[ \left( \frac{d(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{dt} \right)_{t=0} \frac{1}{\sqrt{t}} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \left( \frac{d(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{dt} \right)_{t=ih} \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{t-ih}} + \left( \frac{d(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{dt} \right)_{t=t-h} \frac{1}{\sqrt{h}} \right] + \\ & \left[ \left( \frac{d(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{dt} \right)_{t=t} + \left( \frac{d(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{dt} \right)_{t=t-h} \right] \sqrt{h}, \quad (2) \end{aligned}$$

式中:  $h = \Delta t = t/n$  为积分步长,  $h$  的大小由给定的计算精度决定,一般与积分上限  $t$  有关,而且必须受到微分方程迭代格式的制约,按照数值积分的理论,上式的代数精度为二阶精度,即  $O(h^2)$ 。

### 2.2 基本运动方程的数值方法

在构造了 Basset 力的数值计算格式后,可以对颗粒的基本运动方程的数值方法进行讨论,为了一般讨论,考虑颗粒在三维流场(流场已知)中的运动。在直角坐标系  $(i, j, k)$  中设:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_{pi}, \frac{dx_j}{dt} = u_{pj}, \frac{dx_k}{dt} = u_{pk}. \quad (3)$$

以  $i$  坐标为例,则颗粒的运动微分方程可写为:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(t, x_i, x_j, x_k, u_{pi}, u_{pj}, u_{pk}, \frac{du_{pi}}{dt}, \frac{du_{pj}}{dt}, \frac{du_{pk}}{dt}) \quad (4)$$

式中:

$$\begin{aligned} f_i = & g_i \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p}\right) + C_d \frac{3\rho_f}{4\rho_p d_p} |u_{fi} - u_{pi}| (u_{fi} - u_{pi}) + \\ & \frac{1}{2} C_m \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{d}{dt} (u_{fi} - u_{pi}) + \\ & \frac{9C_B}{\rho_p d_p} \sqrt{\frac{\rho_f \mu_f}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{d}{dt} (u_{fi} - u_{pi}) d\tau + \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{du_{fi}}{dt} + \\ & C_{LM} \frac{3}{4} \frac{\rho_f}{\rho_p} [\omega_j (u_{jk} - u_{pk}) - \omega_k (u_{kj} - u_{pj})] + \\ & 6C_{LS} \frac{\sqrt{\rho_f \mu_f}}{\pi \rho_p d_p} \left[ \sqrt{\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j}} (u_{jk} - u_{pk}) - \sqrt{\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_k}} (u_{kj} - u_{pj}) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

由上式可见,在3个坐标方向上的颗粒运动方程中变量相互耦合,3个运动微分方程必须同时交替求解,从而组成了二阶常微分方程组。特别地,3个方程中以  $f_i$  为例,其包含未知待求函数  $u_{pi}$ ,及导数  $\frac{du_{pi}}{dt}$  的隐函数,因此  $f_i$  的求解必须采用迭代法。

对于以上二阶微分方程组因其变量相互耦合,故数值求解过程必须同时交替进行。但对于每一个二阶微分方程而言,在任一计算步长中,其计算格式却可以是相似的。因此考虑如下  $i$  方向上的二阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(t, x_i, x_j, x_k, u_{pi}, u_{pj}, u_{pk}, \frac{du_{pi}}{dt}, \frac{du_{pj}}{dt}, \frac{du_{pk}}{dt}) \\ x_i(0) = x_{i0} \\ \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} = u_{pi0} \end{cases} \quad (6)$$

并将二阶微分方程化为一阶微分方程组,设

$$u_{pi} = \frac{dx_i}{dt} :$$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = u_{pi} \\ x_i(0) = x_{i0} \\ \left. \frac{du_{pi}}{dt} = f_i(t, x_i, x_j, x_k, u_{pi}, u_{pj}, u_{pk}, \frac{du_{pi}}{dt}, \frac{du_{pj}}{dt}, \frac{du_{pk}}{dt}) \right|_{t=0} = u_{pi0} \end{cases} \quad (7)$$

由以上3式一阶化后为六元一阶微分方程组的初值问题。数值求解可采用具有四阶精度的Runge-Kutta法,这种方法属于单步法,特点是计算精度较高,但由于每步要计算各微分方程的4个斜率,因此计算量大,为了保证微分方程的精度,又减少计算时间,在此只用Runge-Kutta提供一阶微分方程组前面的3个计算步长,为后面的计算方法提供数据信息。然后结合初值条件,从第4步开始采用Adams预测校正法求解<sup>[17]</sup>。而在上面3式相互迭代过程中,可假定正交参变量独立(如在计算  $x_i$ ,  $\frac{dx_i}{dt}$ ,  $\frac{du_{pi}}{dt}$  时,假定  $x_j$ ,  $\frac{dx_j}{dt}$ ,  $\frac{du_{pj}}{dt}$ ,  $x_k$ ,  $\frac{dx_k}{dt}$ ,  $\frac{du_{pk}}{dt}$  已知),即:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = u_{pi} \\ x_i(0) = x_{i0} \\ \left. \frac{du_{pi}}{dt} = f_i(t, x_i, u_{pi}, \frac{du_{pi}}{dt}) \right|_{t=0} = u_{pi0} \end{cases} \quad (8)$$

Runge-Kutta法的计算格式为:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \frac{1}{6}(K_{i1} + 2K_{i2} + 2K_{i3} + K_{i4}),$$

$$u_{pi}^{n+1} = u_{pi}^n + \frac{1}{6}(L_{i1} + 2L_{i2} + 2L_{i3} + L_{i4}). \quad (9)$$

式中:  $K_{i1} = u_{pi}^n$ ,  $K_{i2} = u_{pi}^n + \frac{h}{2}L_{i1}$ ,  $K_{i3} = u_{pi}^n + \frac{h}{2}L_{i2}$ ,  $K_{i4} = u_{pi}^n + hL_{i3}$ ,  $L_{i1} = f_i(t^n, x_i^n, u_{pi}^n, L_{i1})$ ,  $L_{i2} = f_i(t^n + \frac{h}{2}, x_i^n + \frac{h}{2}K_{i1}, u_{pi}^n + \frac{h}{2}L_{i1}, L_{i2})$ ,  $L_{i3} = f_i(t^n + \frac{h}{2}, x_i^n + \frac{h}{2}K_{i2}, u_{pi}^n + \frac{h}{2}L_{i2}, L_{i3})$ ,  $L_{i4} = f_i(t^n + h, x_i^n + hK_{i3}, u_{pi}^n + hL_{i3}, L_{i4})$

同理可得到  $x_j$ ,  $u_{pj}$ , 和  $x_k$ ,  $u_{pk}$  的计算格式。

从第4步开始采用Adams预测校正法求解,其计算公式如下(以  $i$  方向为例):

先以  $AB_4$ (四阶Adams-Bashforth方法,其为显式格式)进行  $n+1$  步的  $x_i^{n+1}$  和  $u_{pi}^{n+1}$  预测:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^{n+1} &= x_i^n + \frac{h}{24}(55u_{pi}^n - 59u_{pi}^{n-1} + 37u_{pi}^{n-2} - 9u_{pi}^{n-3}), \\ \tilde{u}_{pi}^{n+1} &= u_{pi}^n + \frac{h}{24}(55f_i^n - 59f_i^{n-1} + 37f_i^{n-2} - 9f_i^{n-3}). \end{aligned} \quad (10)$$

然后进行第1步估计:

$$\bar{u}_{pi}^{n+1} = \tilde{u}_{pi}^{n+1}, \bar{f}_i^{n+1} = f_i(t^n, \tilde{x}_i^{n+1}, \tilde{u}_{pi}^{n+1}, \bar{f}_i^{n+1}). \quad (11)$$

再利用  $AM_4$ (四阶Adams-Moulton方法,其为隐式格式)进行校正:

$$\begin{aligned} x_i^{n+1} &= x_i^n + \frac{h}{24}(9\bar{u}_{pi}^{n+1} + 19u_{pi}^n - 5u_{pi}^{n-1} + u_{pi}^{n-3}), \\ u_{pi}^{n+1} &= u_{pi}^n + \frac{h}{24}(9\bar{f}_i^{n+1} + 19f_i^n - 5f_i^{n-1} + f_i^{n-2}). \end{aligned} \quad (12)$$

为提高计算精度,可继续反复进行估计-校正过程,以达到计算精度:

估计过程同式(11),但用  $x_i^{n+1}$ ,  $u_{pi}^{n+1}$  代替公式中的  $\tilde{x}_i^{n+1}$ ,  $\tilde{u}_{pi}^{n+1}$ ;校正过程同式(12)。

以上计算过程中由于  $f_i$  是隐函数,其计算需要用迭代的方法计算,迭代的初值  $f_i^{n+1}$  可由前两步计算中的  $f_i^n$  和  $f_i^{n-1}$  的线性外推插值给出,即

$$f_i^{n+1} = 2f_i^n - f_i^{n-1}. \quad (13)$$

对于  $n=0$ ,可令  $f_i^0 = f_i^{-1}$ 。  $f_i$  计算中的各项修正系数  $C_d$ ,  $C_m$ ,  $C_B$ ,  $C_{LM}$  和  $C_{LS}$ , 在计算过程中随雷诺数的变化而可能改变计算公式(尤其  $C_d$ ),因此在数值计算过程中需要根据雷诺数的不同范围进行逻辑判断,选择与雷诺数范围匹配的修正系数。

### 3 泥沙颗粒沉降机理分析

现以颗粒的自由沉降问题来研究颗粒运动规

律,此时问题变为一维问题,  $u_p|_{t=0}, u_f = 0$ 。则颗粒运动方程可表示为:

$$\frac{du_p}{dt} = g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p}) - C_d \frac{3\rho_f}{4\rho_p d_p} u_p^2 - \frac{1}{2} C_m \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{du_p}{dt} - \frac{9C_B}{\rho_p d_p} \sqrt{\frac{\rho_f \mu_f}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{du_p}{dt} d\tau \quad (14)$$

其中各项的修正系数  $C_m = 1, C_B = 1, C_d$  取值如下:

$$C_d \begin{cases} \frac{24}{Re_p}, Re_p < 1 \\ \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}), \\ 0.44, Re_p > 8001 < Re_p < 800 \end{cases} \quad (15)$$

以颗粒的 Stokes 沉降速度  $u_s = \frac{d_p^2(\rho_p - \rho_f)g}{18\mu_f}$  和

弛豫时间  $\tau_p = \frac{d_p^2 \rho_p}{18\mu_f}$  对方程进行无量纲化得到颗粒沉降的无量纲运动方程:

$$\left(1 + \frac{X}{2}\right) \frac{dU_p}{dt} = 1 - \frac{C_d}{24} Re_s U_p^2 - \sqrt{\frac{9X}{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left(\frac{dU_p}{dt}\right)_{t=\tau} d\tau \quad (16)$$

式中:  $U_p = \frac{u_p}{u_s}, X = \frac{\rho_f}{\rho_p}$ , 时间仍然用  $t$  表示, 为无量纲时间。  $Re_s$  是以  $u_s$  为特征速度的雷诺数,  $Re_s = \frac{\rho_f d_p u_s}{\mu_f}$ 。

此方程为一阶非线性积分微分方程, 难以得到分析解, 而且方程中的积分项(代表 Basset 力)的被积函数为奇异函数, (如果  $\frac{du}{dt}$  有界, 则

$\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left(\frac{du_p}{dt}\right) \Big|_{\tau=t} = \infty$ ), 给方程的分析带来不便。

为分析各种阻力的变化情况以及在非线性项和记忆项共同作用下的颗粒沉降规律, 需要对非线性记忆方程进行研究。由于有非线性项和记忆项的存在, 使得方程无法得到解析解, 因此采用数值方法对方程进行分析, 微分方程数值解法见 2.2 节步骤。

首先分析考虑非线性和记忆性后的颗粒速度变化过程, 取流体和固体的密度比  $X$  分别等于 0.4 和  $5 \times 10^{-4}$ ,  $Re_s$  分别为 0.1、1、50 和 100。数值计算结果见图 1-4, 为比较方便, 图中同时显示了非线性非记忆方程的数值解。图 1 为  $X=0.4, Re_s = 0.1$  和 1 时的无量纲速度  $U_p$  的变化情况。由图 1 可见, 由于  $Re_s \leq 1$ , 两个  $Re_s$  下的数值解的曲线重合, 这同前文中分析非线性非记忆方程时的结果一致, 而未因为考虑了记忆项而有变化。由于记忆项

(Basset 力的作用)的作用使得颗粒加速过程变缓, 而最终沉降速度为 Stokes 沉降速度的 89.5%。

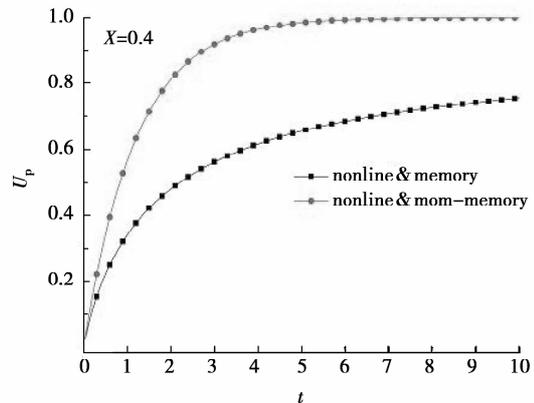


图 1 非线性条件下记忆项对颗粒速度影响随时间的变化 ( $X=0.4, Re_s = 0.1, 1$ )

图 2 为  $X=0.4, Re_s = 50$  和 100 时的无量纲速度  $U_p$  的变化情况。当  $Re_s = 50$  时由于非线性的作用, 使得最终的沉降速度为 Stokes 沉降速度的 44.3%, 而再考虑记忆方程时沉降速度为 Stokes 沉降速度的 41.4%, 两者相差 2.9%。当  $Re_s = 100$  时由于非线性的作用, 使得沉降速度为 Stokes 沉降速度的 36.0%, 而再考虑记忆方程时沉降速度为 Stokes 沉降速度的 34.0%, 两者相差 2%。同时可以看出, 当  $Re_s$  增大时, 记忆项对颗粒加速的抑制作用相对非线性项是减弱的。

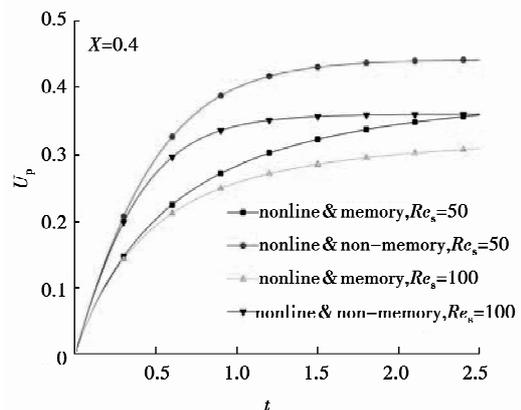


图 2 非线性条件下记忆项对颗粒速度影响随时间的变化 ( $X=0.4, Re_s = 50, 100$ )

图 3 为  $X=5 \times 10^{-4}, Re_s = 0.1$  和 1 时的无量纲速度  $U_p$  的变化情况。由图 3 可见, 由于  $Re_s \leq 1$ , 两个  $Re_s$  下的数值解的曲线也是重合的, 也未因为考虑了记忆项而有变化。由于记忆项(Basset 力的作用)的作用颗粒稍微变缓, 而最终沉降速度为 Stokes 沉降速度的 98.8%, 可见记忆项的作用基本可以忽略不计。

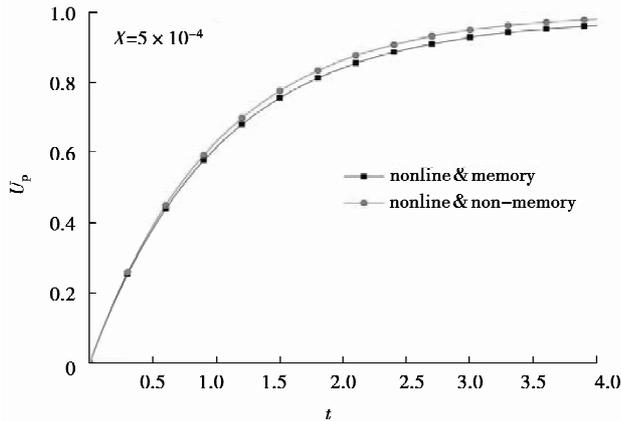


图 3 非线性条件下记忆项对颗粒速度影响随着时间的变化 ( $X=5 \times 10^{-4}$ ,  $Re_s = 0.1, 1$ )

图 4 为  $X=5 \times 10^{-4}$ ,  $Re_s=50$  和 100 时的无量纲速度  $U_p$  的变化情况。当  $Re_s=50$  时由于非线性的作用,使得最终的沉降速度为 Stokes 沉降速度的 44.3%,而再考虑记忆项时沉降速度为 Stokes 沉降速度的 44.0%,两者相差 0.3%。当  $Re_s=100$  时由于非线性的作用,使得沉降速度为 Stokes 沉降速度的 36.0%,而再考虑记忆项时沉降速度为 Stokes 沉降速度的 35.8%,两者相差 0.2%。可见考虑记忆项时,对颗粒加速的抑制作用不是很明显。同时可以看出,当  $Re_s$  增大时记忆项对颗粒加速的抑制作用相对非线性项是减弱的。

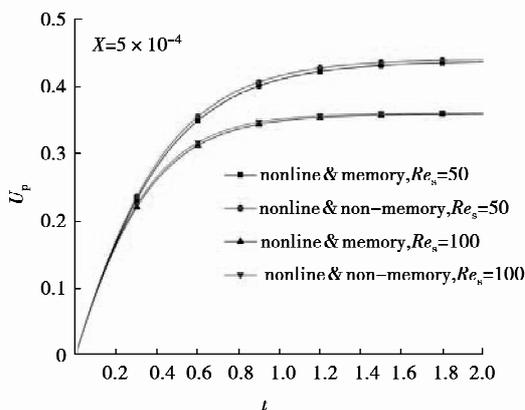


图 4 非线性条件下记忆项对颗粒速度影响随着时间的变化 ( $X=5 \times 10^{-4}$ ,  $Re_s = 50, 100$ )

## 4 结 语

流场中颗粒运动微分方程三维数值解法的推导为相关研究的进一步开展奠定了基础。不同密度流体场中稀疏固体颗粒的受力一直是学术界探讨和争论的问题。不同力的取舍,关系到工程实际问题是

否能够得到正确解。将数量级上小的颗粒受力忽略也可以大大简化问题的求解。过对水中和空气中的稀疏颗粒运动进行分析,在空气中,通常固体颗粒的密度相对空气密度,存在数量级的差别,可以忽略 Basset 的作用,仅考虑曳力的作用,求解过程将大大简化;由于固体颗粒和水的密度差相对较小,得到在水中具有记忆性的 Basset 力和曳力数量级上一致,固体颗粒运动方程的求解相对复杂,在研究江水源热泵时,分析泥沙在水中的流动,需要考虑 Basset 力的作用。

## 参考文献:

- [1] 王子云,付祥钊,王勇,等. 重庆市发展长江水源热泵的水源概况分析[J]. 重庆建筑大学学报, 2008, 30(1): 92-94, 104.  
WANG ZI-YUN, FU XIANG-ZHAO, WANG YONG, et al. Analysis of Yangtze River water as a potential source for developing a water source heat pump in Chongqing[J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2008, 30(1): 92-94, 104.
- [2] 王明国,付祥钊,王勇,等. 利用长江水作热泵冷热源的探讨[J]. 暖通空调, 2008, 38(4): 33-34.  
WANG MING-GUO, FU XIANG-ZHAO, WANG YONG, et al. Discuss on using Yangtze River water as heat and cold sources of water source heat pumps[J]. Heating Ventilating & Air Conditioning, 2008, 38(4): 33-34.
- [3] 王子云,付祥钊,王勇,等. 半圆环折返管内长江水固液两相流的数值模拟[J]. 重庆大学学报, 2008, 31(12): 1410-1414.  
WANG ZI-YUN, FU XIANG-ZHAO, WANG YONG, et al. Numerical simulation of solid-liquid flow of Yangtze River water in a semi-annulus reentry tube[J]. Journal of Chongqing University, 2008, 31(12): 1410-1414.
- [4] 吴荣华,张承虎,庄兆意,等. 地表水源热泵管式换热法及其特性研究[J]. 太阳能学报, 2007, 28(12): 1389-1393.  
WU RONG-HUA, ZHANG CHENG-HU, ZHUANG ZHAO-YI, et al. Research on the Thimble heat-transfer method and its characteristic of surface water source heat pump system[1]. Acta Energiæ Solaris Sinica, 2007, 28(12): 1389-1393.
- [5] 倪晋仁,王光谦,张红武. 固液两相流基本理论及其最新应用[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

- coal[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(5):12-18.
- [10] 梁冰. 煤和瓦斯突出固流耦合失稳理论[M]. 北京: 地质出版社, 2000.
- [11] 卢平, 沈兆武, 朱贵旺. 含瓦斯煤的有效应力与力学变形破坏特性[J]. 中国科学技术大学学报, 2001, 31(6): 55-62.  
LU PING, SHENG ZHAO-WU, ZHU GUI-WANG. The effective stress and mechanical deformation and damage characteristics of gas-filled coal[J]. Journal of China University of Science and Technology, 2001, 31(6): 55-62.
- [12] 尤明庆, 华安增. 岩石试样的强度准则及内摩擦系数[J]. 地质力学学报, 2001, 7(1):53-60.  
YOU MING-QING, HUA AN-ZEN. Strength criterion and internal friction coefficient of rock specimen[J]. Journal of Geomechanics, 2001, 7(1): 53-60.
- [13] 曹树刚, 刘延保, 李勇, 等. 煤岩固一气耦合细观力学试验装置的研制[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(8): 1681-1690.  
CAO SHU-GANG, LIU YAN-BAO, LI YONG, et al. Research and development of testing apparatus of coal solid-gas coupled meso-mechanics[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(8): 1681-1690.
- [14] 曹树刚, 刘延保, 张立强, 等. 煤岩固一气耦合细观力学加载装置[P]. 中国, ZL200820099767.4, 2008-2-22.
- [15] 王振, 胡千庭, 尹光志. 瓦斯压力对煤体冲击指标影响的实验研究[J]. 中国矿业大学学报, 2010, 39(4): 516-519.  
WANG ZHEN, HU QIAN-TING, YIN GUANG-ZHI. Experimental research on the burst proneness index of coal treated with gas pressure[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2010, 39(4): 516-519.
- (编辑 郑洁)
- 
- (上接第 128 页)
- [6] REEKS M W. On model equations for particle dispersion in inhomogeneous turbulence [J]. International Journal of Multiphase Flow, 2005, 31(1): 93-114.
- [7] FERREIRA J M, CHHABRA R P. Accelerating motion of a vertically falling sphere in incompressible Newtonian media: an analytical solution[J]. Powder Technology, 1998, 97(1): 6-15.
- [8] SLATER S A, LEEMING A D, YOUNG J B. Particle deposition from two-dimensional turbulent gas flows[J]. International Journal of Multiphase Flow, 2003, 29(5):721-750.
- [9] FALTAS M S, SAADE I. Stokes flow with slip caused by the axisymmetric motion of a sphere bisected by a free surface bounding a semi-infinite micropolar fluid[J]. International Journal of Multiphase Flow, 2005, 43(11/12): 953-976.
- [10] VAN DER GELD C B M. Measurement and predication of solid sphere trajectories in accelerated gas flow[J]. Int J Multiphase Flow, 1997, 23(2): 357-376.
- [11] MARCHIOLI C, PICCIOTTO M, SOLDATI A. Influence of gravity and lift on particle velocity statistics and transfer rates in turbulent vertical channel flow[J]. International Journal of Multiphase flow, 2007, 33(3): 227-251.
- [12] ZISKIND G, CUTFINGER C. Shear and gravity effects on particle motion in turbulent boundary layers[J]. Powder Technology, 2002, 125(2/3): 140-148.
- [13] DORGAN A J, LOTH E. Efficient calculation of the history force at finite Reynolds numbers [J]. International Journal of Multiphase Flow, 2007, 33(8): 833-848.
- [14] SOBRAL Y D, OLIVEIRA T F, CUNHA F R. On the unsteady forces during the motion of a sedimenting particle [J]. Powder Technology, 2007, 178 (2): 129-41.
- [15] VISITSKII Y V, PETROV A G, SHUNDERYUK M M. The motion of a particle in a viscous fluid under gravity, vibration and Basset's force[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2009, 73(5): 548-557.
- [16] 黄社华, 李炜. 任意流场中稀疏颗粒运动方程的数值解法及其应用[J]. 水动力学研究与进展, 1999, 14(1): 51-61.  
HUANG SHE-HUA, LI WEI. On numerical method of resolving discrete solid particles' motion equation and its applications [J]. Journal of Hydrodynamics, 1999, 14(1): 51-61.
- [17] KINCAID D, CHENEY W. Numerical analysis mathematics of scientific computing(third edition)[M]. American Mathematical Society, 2002.
- (编辑 郑洁)