

文章编号:1000-582X(2010)12-095-08

不可压缩流体周期性流动格子波尔兹曼的边界处理

廖全,李隆键,崔文智

(重庆大学 动力工程学院 低品位能源利用技术及系统教育部重点实验室,重庆 400044)

摘要:提出了一种新的周期性边界处理方法,用于处理格子波尔兹曼(lattice boltzmann)方法中压力驱动不可压缩流体周期性流动的边界条件。当压力驱动的不可压缩流体充分发展时,可以在周期性截面上直接用压力梯度而不是采用当量体积力的常规周期性边界处理方法,来确定周期性流动截面上的粒子分布密度。应用所提出的压力驱动不可压缩流体周期性流动的边界处理方法,对二维压力驱动下充分发展的泊肃叶流(poiseuille flow)和周期性方柱扰流进行了数值模拟。结果表明:该周期边界条件处理方法能够很好地保持系统周期性,在其宏观的周期性边界截面上产生了连续的压力分布,真正地实现了直接压力驱动不可压缩流体周期性流动条件下的所有特征。

关键词:格子波尔兹曼方法;压力驱动;周期性边界处理

中图分类号:TK121

文献标志码:A

A new boundary treatment of lattice boltzmann method (LBM) for fully developed pressure-driven periodic incompressible fluid flow

LIAO Quan, LI Long-jian, CUI Wen-zhi

(College of Power Engineering, Key Laboratory of Low-grade Energy Utilization Technologies and Systems, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: This paper proposes a new boundary treatment of Lattice Boltzmann Method (LBM) for fully developed pressure-driven periodic incompressible fluid flow. The pressure gradient, instead of equivalent body force, is applied to determine the particle distribution function on the periodic traverse sections for the fully developed pressure-driven periodic flow. Numerical simulations, including 2D pressure-driven poiseuille flow and fluid flow passing periodic square obstacles, are carried out using this new boundary treatment. Simulation results show that the proposed approach not only overcomes the nonphysical inlet and outlet flow disturbances (which the LBM simulation always suffers from using the existing pressure boundary methods), but also preserves the system periodicity and generates consistent pressure distribution with macroscopic periodic boundary conditions for the pressure-driven incompressible fluid flow.

Key Words: lattice boltzmann method; pressure-driven flow; periodic boundary treatment

格子波尔兹曼方法(lattice boltzmann method)是基于微观动力学方程,用于处理微观粒子的分布密度,并通过粒子分布密度的积分求出相应宏观量

的一种计算流体力学(computational fluid dynamics)方法。该方法不同于常规的直接求解 Navier-Stokes(NS)方程从而得到宏观变量(譬如:

收稿日期:2010-06-15

基金项目:教育部高等学校博士学科点科研基金资助项目(20090191120017)

作者简介:廖全(1977-),男,重庆大学副教授,博士,主要从事工程传热传质及其强化、计算流体力学和可再生能源利用的研究,(Tel)023-65111867;(E-mail)Quan.Liao@cqu.edu.cn。

压力和速度等)的数值计算方法^[1-6]。在过去近 20 年时间里, LBM 得到了突飞猛进的发展, 广泛地应用于多孔介质内的流体流动与传热、复杂多相流的流动与传输等领域, 逐步发展成为常规 CFD 数值计算的一种替代方法^[7-8]。

与求解常规 NS 方程为主的 CFD 方法类似, 边界条件的处理在 LBM 中起着至关重要的作用。在过去几十年时间里, LBM 的研究者们致力于研究在不同情况下精确有效的边界条件处理方法^[9-19]。由于 LBM 中原始变量是粒子的分布密度, 宏观世界的变量(例如压力和速度等)是通过微观粒子分布密度进行相应积分处理后而获得, 因此在 LBM 中物理模型真实边界上的宏观变量与微观粒子分布密度间没有直接的、一一映射的关联, 从而导致真实边界上的宏观边界信息很难直接、有效地反映到微观粒子分布密度的变化中去。因此, 这种在物理世界中可直接观测的宏观变量如何正确、有效地转换到建立在介观尺度上的 LBM 微观粒子分布密度, 给 LBM 在工程实际中的广泛应用带来了一定局限性。

在工程实际应用过程中, 压力驱动的不可压缩流体周期性流动现象非常普遍。如何采用 LBM 来直接、有效地体现出压力驱动不可压缩流体周期性流动的所有特征, 在目前的工程实际应用中具有重要的现实意义。然而, 迄今为止, 在 LBM 研究者们所提出的几种不同压力边界处理方法中^[12-13], 几乎都存在这样或那样的一些缺陷, 都不能够完全、真正地体现压力驱动不可压缩流体周期性流动的所有特征。譬如, 在目前所提出的 LBM 压力边界处理方法中, 有些方法要求事先知道截面上的压力分布或者要求在该边界面上的宏观切向速度分量必须为零^[13]。一方面, 在实际工程应用过程中, 边界面上的压力分布可能很难获得; 另一方面, 在复杂的实际工程流动过程中, 物理边界面上的切向速度不可能或很难满足为零这一苛刻条件; 此外, 在 LBM 中的周期性边界条件处理方面, 只有常规的周期性边界处理方法(即, 给定方向上的分布密度直接从出口边界返回到入口边界的方法)不受非物理扰动现象的影响和切向速度为零这一苛刻要求。然而, 对于压力驱动不可压缩流体周期性流动问题而言, 这样简单处理的方法需要用当量体积力来代替驱动流体实际流动的压力梯度, 从而获得计算区域内正确的速度场分布。由于当量体积力的引入, 导致了该方法最终不可避免地丧失了计算域内沿流动方向上的压力信息, 最后造成计算域内的压力分布与实际压力驱动不可压缩流体周期性流动压力分布严重不一致

的结果。

笔者提出了一种新的用于处理压力驱动不可压缩流体周期性流动的 LBM 边界处理方法。这种边界处理方法克服了常规 LBM 压力边界方法和周期性边界方法的缺陷, 真正地直接实现了压力驱动不可压缩流体周期性流动条件下的所有特征。

1 不可压缩流体周期性流动的边界条件

如图 1 所示, 它是在两平行平板中间布置周期性的方形物体, 从而实现在压力驱动下不可压缩流体周期性地流动。从实验研究压力驱动下不可压缩流体周期性流动的文献中^[20-21]可知, 在这种周期性结构系统中, 流体流动的入口段长度较短, 并且一般能够在两个几何结构周期内变为充分发展流态。因此, 在此系统中宏观变量(速度 U 和压力 P)具有如下特点^[22]

$$U(x, y) = U(x + n \cdot L, y), \quad (1)$$

$$P(x, y) = P(x + n \cdot L, y) + n \cdot \beta \cdot L, \quad (2)$$

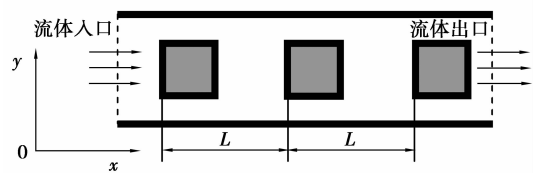


图 1 二维不可压缩流体周期性流动示意图

其中: n 是任意整数, L 是沿流动方向上的周期长度, β 是沿流动方向上的压力梯度, 即: $\beta = -\frac{dP}{dx}$ 。

对于一个周期长度的压力驱动不可压缩流体周期性流动(即, $n=1$, 如图 2 所示), 相应的宏观周期性

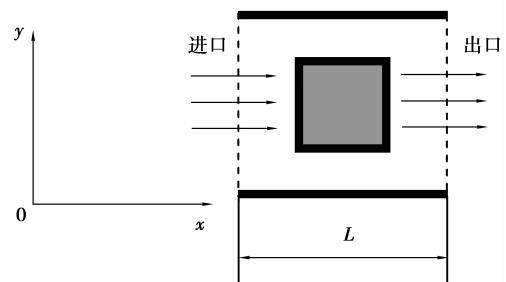


图 2 压力驱动不可压缩流体周期性流动的边界条件

边界条件如下:

$$U_{\text{inlet}}(x, y) = U_{\text{outlet}}(x + L, y), \quad (3)$$

$P_{inlet}(x, y) = P_{outlet}(x + L, y) + \beta \cdot L$, (4) 分布密度为原始变量的平衡态分布函数如下:
在不可压缩流体 LBM 的 D2Q9 模型中,以压力

$$f_i^{(eq)} = \omega_i \cdot \left\{ P + P_0 \cdot \left[3 \cdot \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{U}}{c^2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{(\mathbf{e}_i \mathbf{U})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{c^2} \right] \right\}, \quad (5)$$

这里, $\omega_i = \begin{cases} \frac{1}{9}, & i = 1, 2, 3, 4; \\ \frac{1}{36}, & i = 5, 6, 7, 8; \\ \frac{4}{9}, & i = 9. \end{cases}$ (6)

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} c \cdot (\cos[(i-1)/2] \cdot \pi, \sin[(i-1)/2] \cdot \pi), & i = 1, 2, 3, 4; \\ \sqrt{2} \cdot c \cdot (\cos[(2i-9)/4] \cdot \pi, \sin[(2i-9)/4] \cdot \pi), & i = 5, 6, 7, 8; \\ 0, & i = 9. \end{cases} \quad (7)$$

其中, c 为微观格子速度, \mathbf{U} 是宏观速度矢量, P_0 是系统参考压力。

宏观变量(压力和速度)的计算公式则如下

$$P = \sum_{i=1}^9 f_i, \quad (8)$$

$$\mathbf{U} \cdot P_0 = \sum_{i=1}^9 \mathbf{e}_i \cdot f_i, \quad (9)$$

把 LBM 中宏观变量的计算公式(8)和(9)代入宏观周期性边界条件(3)和(4),则有:

$$\frac{\sum_{i=0}^8 \mathbf{e}_i \cdot f_{i,inlet}}{P_0} = \frac{\sum_{i=0}^8 \mathbf{e}_i \cdot f_{i,outlet}}{P_0}, \quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^8 f_{i,inlet} = \sum_{i=0}^8 f_{i,outlet} + \beta \cdot L, \quad (11)$$

在 LBM 中,对每次迭代计算,都可分为 2 个单独的交替计算步骤^[23-24],即:

碰撞步:

$$\bar{f}_i(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{(eq)}(\mathbf{x}, t)], \quad (12)$$

迁移步:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \cdot t, t + \delta t) = \bar{f}_i(\mathbf{x}, t), \quad (13)$$

此处, $\bar{f}_i(\mathbf{x}, t)$ 表示碰撞后的密度分布函数, $f_i(\mathbf{x}, t)$ 和 $f_i^{(eq)}(\mathbf{x}, t)$ 分别指当前状态的密度分布函数和该位置所对应的平衡态密度分布函数, τ 是无量纲松弛因子。

于是,在如图 2 所示压力驱动不可压缩流体周期性流动的边界面上,当完成 1 次迭代计算以后,在进、出口截面上,将会有如图 3 中圆圈所示方向上的未知密度分布函数(即,进口边界上有方向 1、5、8 上的密度分布函数未知;出口边界上有方向 3、6、7 上的密度分布函数未知)。为了使 LBM 的计算能够顺利进入下 1 个迭代步,则必须解决如何确定这些在边界面上特定方向上的未知密度分布函数。

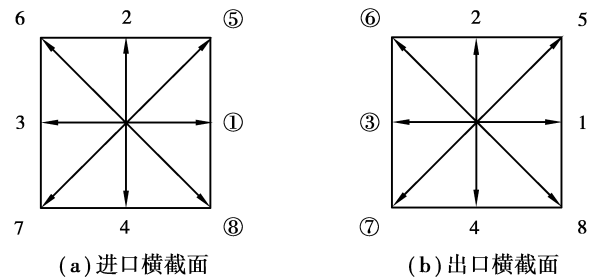


图 3 迁移后进出口截面上的未知分布函数

对方程(10)和方程(11)进行重新整理,则可以得到如下方程

$$\sum_{i=0}^8 \mathbf{e}_i \cdot (f_{i,inlet} - f_{i,outlet}) = 0, \quad (14)$$

$$\sum_{i=0}^8 (f_{i,inlet} - f_{i,outlet} - \omega_i \cdot \beta \cdot L) = 0, \quad (15)$$

在如上的方程(14)和方程(15)中,一共有 6 个方向上的密度分布函数未知(即, $f_{1,inlet}$, $f_{5,inlet}$, $f_{8,inlet}$, $f_{3,outlet}$, $f_{6,outlet}$, $f_{7,outlet}$),然而方程的个数却只有 3 个(即,方程(14)包含 x 和 y 方向上的 2 个方程和方程(15)),因此该方程组不封闭,具有无穷组解满足上述方程组。从数学的角度而言,只要能够找到一组满足上述方程组的解,且能够方便地确定未知方向上的密度分布函数,则 LBM 的迭代计算就能够顺利继续下去。显然,通过观察可以发现,方程 14 和 15 中一种最简单的解为

$$f_{i,inlet} - f_{i,outlet} = \omega_i \cdot \beta \cdot L, \quad (16)$$

这里,对进口截面未知密度分布函数而言, $i = 1, 5, 8$;对出口截面未知密度分布函数而言, $i = 3, 6, 7$ 。在 LBM 的每次迭代迁移步后,可以方便地通过方程(16)求出进、出口截面上所有的未知密度分布函数。

值得注意的是:上述新的处理方法不同于一般的

常规周期性边界处理方法。常规的处理方法就是简单地把流出边界上的密度分布函数沿该方向上重新流入进口边界,完全没有考虑进、出口边界上存在着一定压差这一事实。然而,从方程(16)中可以清楚地看见:在同一个方向上,进、出口截面上的密度分布函数并不相等,其差值就是最终导致进、出口截面上应有的压差。因此,该周期性边界处理方法能够在很好地保持系统周期性的同时,也不会丧失计算区域内沿流动方向上的压降信息,并且还没有其他一些苛刻的限制性条件(比如:进、出口截面上压力分布要求已知或进出口截面上的切向速度必须为零等)。

2 数值模拟结果

为了验证压力驱动不可压缩流体周期性流动边界条件的合理性,用 LBM 分别模拟了二维压力驱动不可压缩流体充分发展的泊肃叶流和周期性方柱扰流问题。

在表 1 中,给出了用 LBM 来模拟泊肃叶流和周期性方柱扰流时的各种参数设置。

表 1 数值模拟参数设置

项 目	压力驱动 泊肃叶流	压力驱动周期 性方柱扰流
计算域/ $m \times m$	0.1×0.1	0.1×0.1
单位格子长度/ m	$2.5E-4$	$1.0E-4$
格子速度/ $(m^{-1} \cdot s)$	680	680
无量纲松弛时间	1.0	1.0
密度/ $(kg \cdot m^{-3})$	6.49	6.49
粘度/ $(m^2 \cdot s^{-1})$	$2.83E-2$	$1.13E-2$
压力梯度/ $(Pa \cdot m^{-1})$	$1.0E6$	$1.0E6$
雷诺数	16.0	8.0
收敛判据	$1.0E-7$	$1.0E-7$

其中,雷诺数的计算是通过最大流通截面上流体的平均速度和上下平行平板的间距来确定;迭代计算的收敛判据是通过统计连续 2 次迭代计算所得的宏观速度的相对误差是否小于给定的收敛精度。同时,为了提高 LBM 数值模拟计算精度,在固液交界面上(例如,平行平板与流体的交界面、方柱与流体的交界面等),采用了具有二阶精度的插值边界处理方法^[25]。在相同的数值模拟参数设置和固液交界面边界处理方法的条件下,对比了新的周期性流

动边界处理方法和用当量体积力来代替压力梯度的常规周期性边界处理方法对泊肃叶流和方柱扰流的影响,分别对计算区域内的流场和压力场进行了详细的对比和分析。

如图 4、图 5 所示,在不同的周期性边界处理条件下,分别对比了平行平板间不可压缩流体充分发展时的压力分布和速度分布。

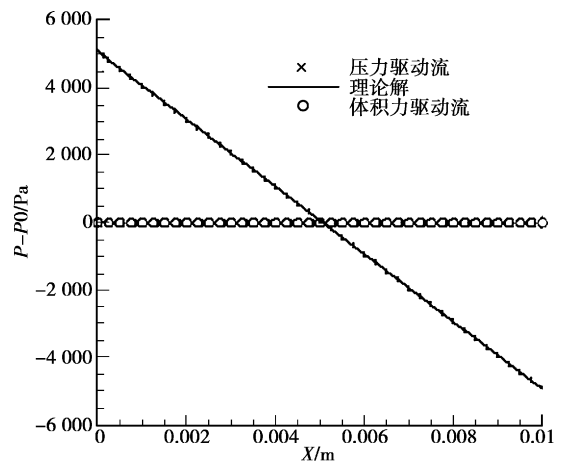


图 4 二维平行平板间流体流动在中心线上的压力分布

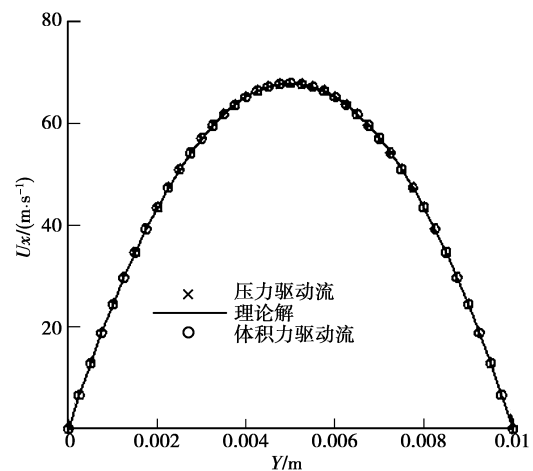


图 5 二维平行平板间流体流动的速度分布

由图 4 可见,提出的压力驱动不可压缩流体周期性流动的边界处理方法可以获得与理论解非常一致的结果。然而,在图 5 中可以发现,虽然采用当量体积力的常规周期性边界处理方法可以得到与解析解一致的速度场分布,但是却不能够在该计算域内获得正确的压力分布(如图 4 所示)。其主要原因在于:当采用当量体积力代替实际压力梯度来驱动不可压缩流体流动时,在计算域内不可避免地损失了压力沿流动方向上的信息。在这种情况下,为了在计算域内获得正确的压力分布,则必须对所获得的

数值结果进行二次处理,否则将会得到错误的压力场分布。然而,若采用文中提出的新周期边界处理方法,由于在迭代计算过程中没有损失压力的相关信息,当迭代计算收敛后,则可以顺利获得正确的压力分布,无需对压力场进行二次处理。

为了验证文中提出的周期性边界处理方法在复杂周期性流动过程中的正确性,应用该方法对周期性方柱扰流问题进行了数值模拟。如图 6~9 所示,给出了在 1 个周期长度上不同计算区域内压力分布和流线分布的数值模拟结果。从这些模拟结果可以看出:应用所提出的周期性边界处理方法,可以得到正确的压力分布和流线分布云图。对于 1 个周期长度上不同计算区域的数值模拟结果可以看出,计算域的不同并没有改变周期性流动问题中的压力分布状态和流线分布特点,这一特征与实际周期性流动是一致的。模拟结果表明:所提出的周期性边界条件处理方法,能够解决复杂的压力驱动不可压缩流体周期性流动问题。

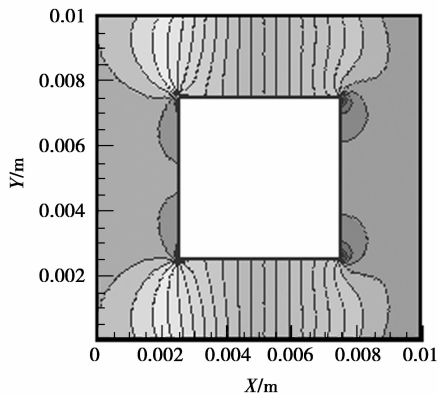


图 6 压力驱动周期性方柱绕流的压力分布

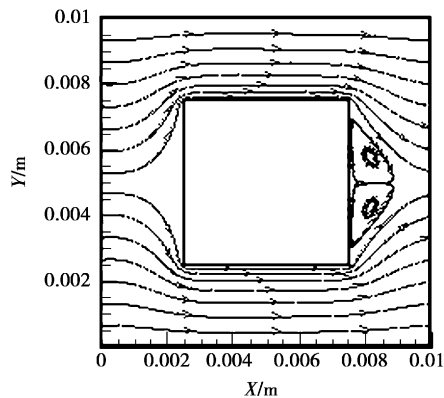


图 7 压力驱动周期性方柱绕流的流线图

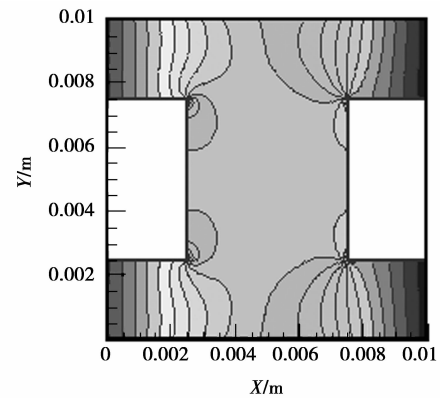


图 8 压力驱动周期性方柱绕流的压力分布

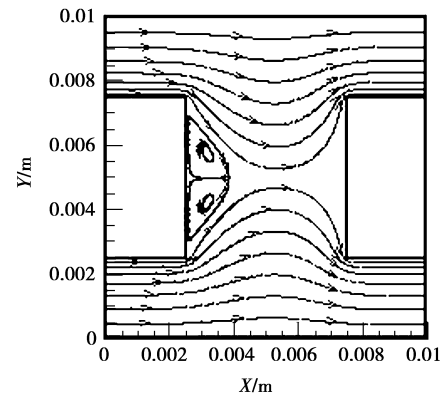


图 9 压力驱动周期性方柱绕流的流线图

为了进一步验证该周期性边界处理方法的适用性,把上述的 2 种计算区域分别扩大 1 倍,即在 2 个周期长度上的求解域内进行相同参数的数值模拟,其数值模拟结果如图 10 和图 11 所示。通过对图 10 和图 11 的分析可以发现:沿着流体流动方向,其压力不断降低;但是,压力分布或流线分布的具体形式却沿着流体流动方向以 1 个周期长度为间隔,进行着不断地重复。显然,上述这些特点成功地描述了周期性流动系统的严格周期性,完全实现了周期性流动问题的所有特点。

为了对比当量体积力代替压力梯度的常规周期性边界处理方法与文中所提出的压力驱动周期性流动边界处理方法对周期性流动问题模拟结果的影响,采用常规的周期性边界处理方法对上述的两种不同计算域内的周期性流动问题进行了数值模拟,得到了图 12 和图 13 所示的模拟结果。

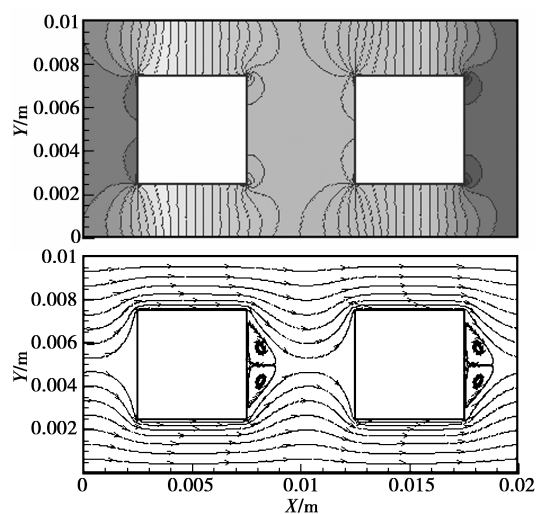


图 10 压力驱动周期性流体在 2 个周期长度内的压力分布和流线分布

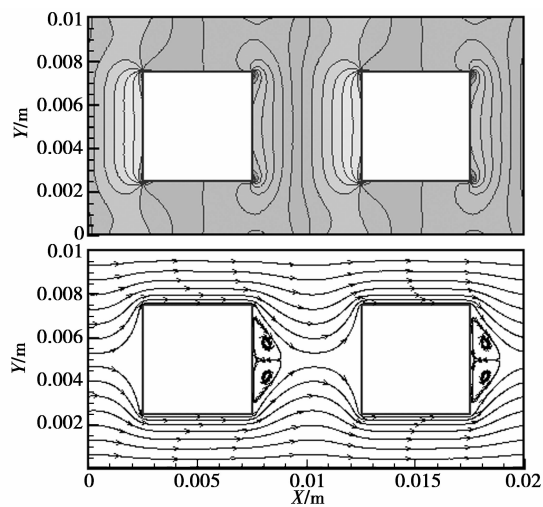


图 12 当量体积力驱动周期性流动在 2 个周期长度内的压力分布和流线分布

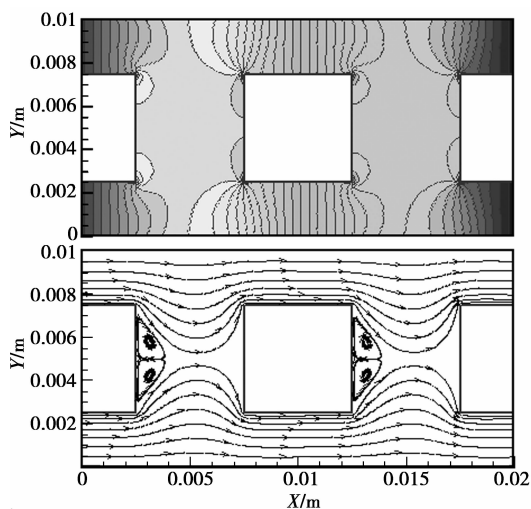


图 11 压力驱动周期性流体在 2 个周期长度内的压力分布和流线分布

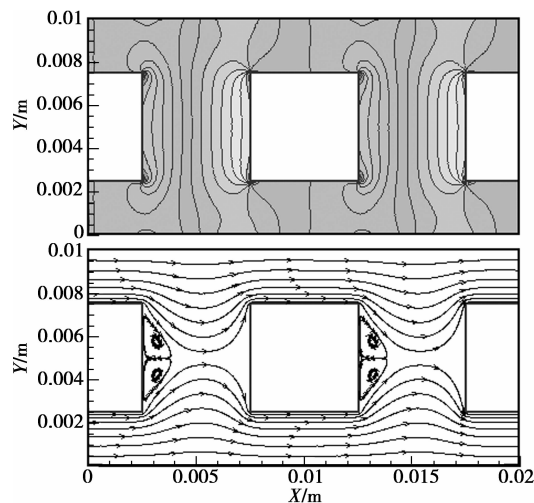


图 13 当量体积力驱动周期性流动在 2 个周期长度内的压力分布和流线分布

通过对比图 10、11 和图 12、13 可以发现,采用当量体积力的常规周期性边界条件虽然得到了与采用压力驱动周期性流动边界条件一致的流线分布,并且也体现出了周期性流动应有的一些特点,但是计算域内的压力分布却明显地与实际不符,即:没有体现出沿流体流动方向,压力逐渐降低这一基本规律。此外,在图 12 和图 13 中,虽然在压力分布云图上也可以明显地观察到压力分布的周期性,但是其具体的压力分布形式却与图 10 和图 11 有显著的区别(在实际的压力驱动周期性流动中,不可能产生类似于图 12、13 中的在方柱前后几乎有对称的压力分布形式)。造成这些差异的原因,最终也归结到:当用当量体积力代替压力梯度驱动流体周期性流动

时,在计算域内丢失了压力沿流向上逐渐降低这一信息,最后得到了与实际不一致的压力分布结果。

为了定量地分析压力驱动周期性流动边界条件是否能够严格地保持系统的周期性,图 14、15、16 分别显示了在给定竖直高度条件下,1 个周期长度和 2 个周期长度上,方柱绕流的水平速度分量、竖直速度分量和压力沿流体流动方向上的数值分布。在图 14、15 中可以明显地观察到,计算域内的速度分布在采用文中所提出的周期流动边界条件处理方式下具有严格的周期性,体现出了周期性流动的特点。在压力分布方面,如图 16 所示,在相同的高度条件下,1 个周期长度上的压力分布与 2 个周期长度上的压力分布具有非常一致的分布形态。由于在 1 个

周期长度和 2 个周期长度计算域内的压力参考点不一致,最后导致在给定高度上的压力分布在这两种情况下具有一恒定的压差。

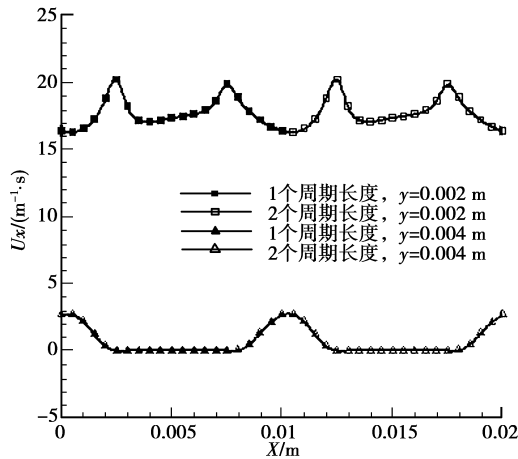


图 14 水平分速度沿 x 方向的分布

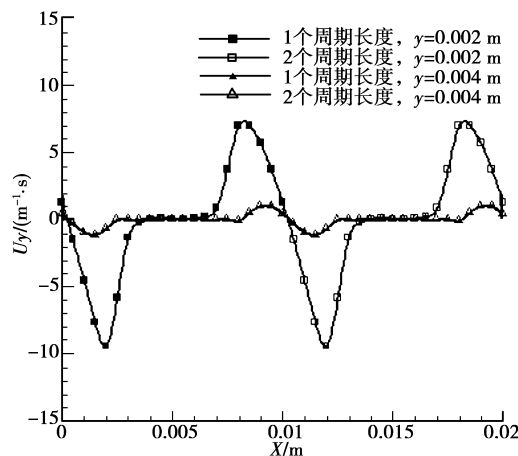


图 15 垂直分速度沿 x 方向的分布

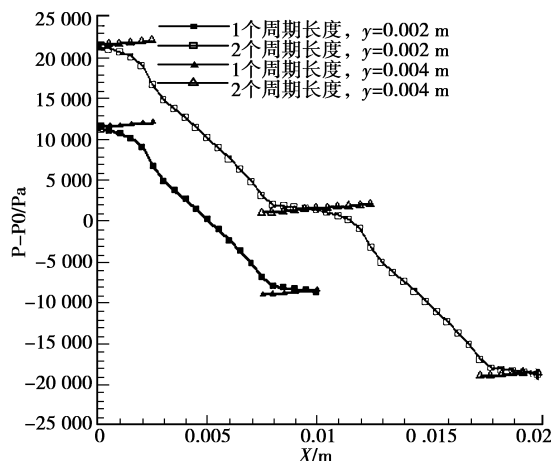


图 16 压力沿 x 方向的分布

3 结 论

提出了一种新的周期性边界条件,用于处理采用 LBM 方法来解决压力驱动不可压缩流体的周期性流动问题。该周期性边界条件处理方法与用当量体积力代替压力梯度的常规周期性边界处理不一样,可以准确地应用于复杂的周期性流动问题中,并且能够在很好地保持系统周期性(包括压力和速度)的条件下,得到与实际一致的速度场和压力场的分布。此外,这种周期性边界条件的处理方法,可以方便地拓展到其它量场的 LBM 数值模拟中去(比如温度等)。

参考文献:

- [1] ROMANA BEGUM, M ABDUL BASIT. Lattice boltzmann method and its applications to fluid flow problems [J]. European Journal of Scientific Research, 2008, 22(2): 216-231.
- [2] NIKOLASO I PRASIANAKIS, IIIYA V, KARLIN I. Lattice boltzmann method for simulation of compressible flows on standard lattices [J]. Physical Review E, 2008, 78(1): 016704-016714.
- [3] ZHOU J G. Rectangular lattice boltzmann method [J]. Physical Review E, 2010, 81(2): 026705-026715.
- [4] ZHOU J G. A lattice boltzmann method for solute transport [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2009, 61(8): 848-863.
- [5] DIXIT HN, BABU V. Simulation of high rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, 49(3/4): 727-739.
- [6] YIN X L, KOCH D L, ROLF V R. Lattice-boltzmann method for simulating spherical bubbles with no tangential stress boundary conditions [J]. Physical Review E, 2006, 73(2): 026301-026314.
- [7] JAMI M, MEZRHAB HASSAN NAJI H. Numerical study of natural convection in a square cavity containing a cylinder using the lattice Boltzmann method [J]. International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, 2008, 25(5): 480-489.
- [8] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 西安:西安交通大学出版社,1988.
- [9] CHEN D M. On boundary conditions in lattice Boltzmann methods [J]. Physics Fluids, 1996, 8 (9): 123-128.
- [10] MEI R, LUO L S, WEI S Y. An accurate curved boundary treatment in the lattice boltzmann method [J]. Journal of Computational Physics, 1999, 155 (2):

- 307-330.
- [11] TAKAJI I, MASATO T, FUMIMARU O. A non-slip boundary condition for lattice boltzmann simulations [J]. *Physics of Fluids*, 1995, 7(12): 105-110.
- [12] ZOU Q, HE X Y. On pressure and velocity flow boundary conditions and bounce back for the lattice boltzmann BGK model [J]. *Physics of Fluids*, 1996, 9(6): 9611001-9611019.
- [13] ZOU Q, HE X I. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann BGK model [J]. *Physics of Fluids*, 1997, 9(6): 1591-1599.
- [14] DAVID R NOBLE, CHEN S Y, GEORGIADIS JOHN G, et al. A consistent hydrodynamic boundary condition for the lattice Boltzmann method [J]. *Physics Fluids*, 1995, 7(1): 203-209.
- [15] SANTOSH ANSUMALI ILIYA V. KARLIN. Kinetic boundary conditions in the lattice boltzmann method [J]. *Physical Review E*, 2002, 66:263-271.
- [16] YU D Z, MEI R, WEI S Y. Improved treatment of the open boundary in the method of lattice boltzmann equation [J]. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 2005, 5(1): 102-107.
- [17] ZHANG J F, DANIEL Y K. Pressure boundary condition of the lattice boltzmann method for fully developed periodic flows [J]. *Physical Reviews E*, 73(4): 047702-047706.
- [18] MARCONI S, BASTIEN C, JONAS LATT. Reducing the compressibility of a lattice boltzmann fluid using a repulsive force [J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2003, 14(8):1015-1026.
- [19] GUO Z L, ZHAO T S, SHI YONG. A lattice boltzmann algorithm for electro-osmotic flows in microfluidic devices [J]. *Journal of Chemical Physics*, 2005, 122(14): 144907-144917.
- [20] YUAN Z X, TAO W Q, WANG Q W. Numerical prediction for laminar forced convection heat transfer in parallel-plate channels with streamwise-periodic rod disturbances [J]. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 1998, 28: 1371-1376.
- [21] WANG L B, TAO W, Q. Numerical analysis on heat transfer and fluid flow for arrays of non-uniform plate length aligned at angles to flow direction [J]. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 1997, 7(5): 479-496.
- [22] S V PATANKAR, LIU C H, SPARROW E M. Fully developed flow and heat transfer in ducts having streamwise-periodic variations of cross-sectional area [J]. *Journal of Heat Transfer*, 1977, 99: 180-186.
- [23] HE X Y, LUO L S. Lattice boltzmann model for the incompressible navier-stokes equation [J]. *Journal of Statistical Physics*, 1997, 88: 927-944.
- [24] LIAO Q. Numerical simulation with lattice Boltzmann method (LBM) in the curved square duct [C]//ASME international Mechanical Engineering Congress and Exposition, Chicago, Illinois, 2006.
- [25] CHEN S Y, DANIEL M. On boundary conditions in lattice Boltzmann methods [J]. *Physical Fluids*, 1996, 8(9):2527-2537.

(编辑 陈移峰)