

文章编号:1000-582X(2011)02-032-06

自适应分数阶微分在图像纹理增强中的应用

汪成亮, 兰利彬, 周尚波

(重庆大学 计算机科学与工程学院, 重庆 400044)

摘要:针对目前只能通过人为实验指定最佳分数阶微分阶数的现状,为了节省大量人工寻求最佳分数阶微分阶数的时间,研究并提出了可以依据掩模窗口大小、G-L 公式、图像梯度特征和肉眼视觉特性等理论的能够自动生成分数阶微分阶数的新方法,基于该自适应阶数,设计并实现了对应的算子掩模。采用了信息熵、平均梯度等图像纹理特征评价参数做定量分析和实验验证,结果表明,该方法对任意灰度图像可以得到连续变化的增强效果,接近于最佳分数阶微分增强效果,符合人们的视觉感受,是有效的图像纹理增强方法。

关键词:分数阶微分阶数;掩模;梯度方法;视觉特性;图像纹理增强

中图分类号:TN911.73;TP391

文献标志码:A

Adaptive fractional differential and its application to image texture enhancement

WANG Cheng-liang, LAN Li-bin, ZHOU Shang-bo

(College of Computer Science and Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: Optimal fractional differential order can be only specified manually by experiments. In order to significantly save time of manually seeking optimal fractional differential order, a novel approach is studied and proposed, which is based on window size, G-L formula, image gradient and visual property to automatically generate fractional differential order. The fractional differential operator masks are designed and realized by employing this order. The evaluation parameters of image texture, such as information entropy and average gradient were used for quantitative analysis and experimental verification. The results show that, for any grey image, this method can obtain a successive enhancement result, which approximates the results of optimal fractional differential order and more satisfies human visual sense. It is an effective approach to enhance image texture.

Key words: fractional differential order; masks; gradient methods; visual property; image texture enhancement

相较传统的图像增强方法,分数阶微分用于图像处理将使图像边缘明显增强、图像纹理细节更加清晰并且非线性保留图像平滑区域信息^[1-3]。将分数阶微分用于图像处理,在国内外都是 1 个研究很

少的新兴领域^[2-5]。文献[1-4],采用不同窗口大小和多尺度的分数阶微分掩模处理图像,在特定窗口大小和指定分数阶微分阶数的前提下,获得了最佳的图像增强效果,但这必然增加了大量人工寻求最

收稿日期:2010-08-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61004112);中国博士后科学基金资助项目(20080430750)。

作者简介:汪成亮(1975-),男,重庆大学副教授,博士,主要从事图像处理、人工智能理论与应用等方向研究,
(Tel)18983055830;(E-mail)wangcl@cqu.edu.cn。

佳分数阶微分阶数的时间,不利于具有实时性要求的大量动态序列图像的处理。

笔者通过研究分析经典的分数阶微积分 G-L (Grunwald-Letnikov)定义^[6-9]和近似微分算子的实现过程,提出了可以依据图像梯度信息^[10-12]和人眼视觉特性^[13-15]等理论的能够进行分数阶微分阶数自动调整的新方法,同时设计了基于该分数阶微分阶数的算子掩模。该方法可以依据不同灰度图像、图像的不同灰度变化特征自适应地调节算子掩模系数,对各个像素点采用相应的掩模模板来处理。最后对 3 种不同的灰度图像做了实验和比较分析,实验结果表明该方法理论分析的正确性和可行性。此外,该方法完全自动化地处理图像,可以节省大量时间,使分数阶微分理论用于动态目标跟踪和识别成为可能。

1 自适应分数阶微分掩模的实现

1.1 掩模的近似构造

分数阶微分定义有多种,采用非整型分数阶微积分 G-L 定义。G-L 分数阶微分表达式

$${}^a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^m \times \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(t-mh), \quad (1)$$

其中: $\alpha > 0$; h 为微分步长; $\lceil \frac{t-a}{h} \rceil$ 表示取变量 x 的整数部分; $\Gamma(n)$ 为 Gamma 函数; a, t 分别为分数阶微分的下限和上限。 $f(t)$ 的持续周期 $t \in [a, t]$, 按步长 $h=1$ 等分,有

$$m = \lceil \frac{t-a}{h} \rceil^{h=1} = \lceil t-a \rceil,$$

因此,一元信号 $f(t)$ 的 α 阶微分的差分表达式

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx f(t) + (-\alpha) f(t-1) + \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)}{2} f(t-2) + \dots + \frac{\Gamma(-\alpha+1)}{m! \Gamma(-\alpha+m+1)} f(t-m), \quad (2)$$

在 $M \times N$ 的图像 $f(x, y)$ 上,用 $m \times n$ 大小的滤波器 $w(s, t)$ 进行线性滤波,则输出的图像 $g(x, y)$ 可以用离散卷积表示

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b f(x+s, y+t) w(s, t), \quad (3)$$

其中: $a = (m-1)/2$; $b = (n-1)/2$; $w(s, t)$ 称为掩模。为得到一幅完整的经过滤波处理的图像,要对掩模中心点距原图像 f 边缘的距离不大于 $M - \frac{m-1}{2}$ 和 $N - \frac{n-1}{2}$ 的像素进行逐个处理。为了不影响输出图像 g 的平均梯度等评价参数,对大于 $M - \frac{m-1}{2}$ 和 $N - \frac{n-1}{2}$ 的像素点灰度值进行保留。

根据式(2),为了构造对图像 f 具有旋转不变性的分数阶微分掩模,采用 x 轴正负方向, y 轴正负方向,左右对角线方向共 8 个方向的具有各向同性的掩模。同时采用窗口大小为 3×3 的掩模处理图像。对掩模内的各个系数除以 $(8-8\alpha)$, 以进行归一化处理。此时,近似的掩模如图 1。由图 1 可知,掩模中心点的系数权重与阶数 α 的大小成正比,而邻域系数权重与阶数 α 成反比,并且正比比重大于反比比重,比较关系如图 2。因此,对于不同阶数 α 的值,其中心点或邻域点的重要程度也不相同, α 值越大,越突出中心点的重要程度。由此,对各个像素点的掩模滤波运算,可以用不同的相应掩模进行处理,来适当加强图像灰度突变区域的灰度值,保留图像变化平缓的灰度值。

$\frac{\alpha}{8\alpha-8}$	$\frac{\alpha}{8\alpha-8}$	$\frac{\alpha}{8\alpha-8}$
$\frac{\alpha}{8\alpha-8}$	$\frac{8}{8-8\alpha}$	$\frac{\alpha}{8\alpha-8}$
$\frac{\alpha}{8\alpha-8}$	$\frac{\alpha}{8\alpha-8}$	$\frac{\alpha}{8\alpha-8}$

图 1 3×3 掩模模板

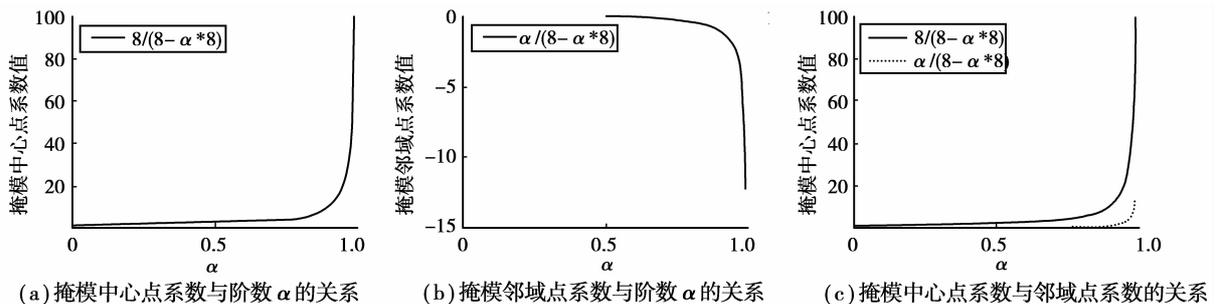


图 2 掩模各个系数与阶数 α 的关系

1.2 自适应 α 阶微分的推导过程

图像梯度反映了图像的空间变化率,表现在图像轮廓上,就是像素的灰度突变,则其梯度值就很大;图像灰度变化平缓,梯度值就较小;在等灰度区域,梯度值则为零。图像梯度对图像的纹理较为敏感,可以根据图像的梯度变化,使对比度在边缘细节部分增加的大一些,在平缓的部分小一些。依此,致力于寻求分数阶微分阶数与图像梯度模值之间的函数映射关系,以便依据图像梯度特征自适应地生成分数阶微分阶数 α 。

图像 f 在其像素点 (x, y) 上的梯度是 1 个二维列向量

$$\mathbf{G}[f(x, y)] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}'_x \\ \mathbf{G}'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

定义梯度的模值

$$\text{mag}(\mathbf{G}[f(x, y)]) = \sqrt{\mathbf{G}'_x'^2 + \mathbf{G}'_y'^2} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

为了降低运算量,采用如下公式近似求梯度模值

$$\text{mag}(\mathbf{G}[f(x, y)]) = \sqrt{\mathbf{G}'_x'^2 + \mathbf{G}'_y'^2} = \max\{|\mathbf{G}'_x'|, |\mathbf{G}'_y'|\},$$

将偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 近似用差分 $\Delta_x f(x, y)$ 和 $\Delta_y f(x, y)$ 代替,沿 x 和 y 方向的一阶差分表示为

$$\begin{cases} \mathbf{G}'_x = \Delta_x f(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y); \\ \mathbf{G}'_y = \Delta_y f(x, y) = f(x, y+1) - f(x, y). \end{cases}$$

至此,求得梯度的模值

$$\text{mag}(\mathbf{G}[f(x, y)]) = \max\{|\mathbf{G}'_x'|, |\mathbf{G}'_y'|\} = \max(|f(x+1, y) - f(x, y)|, |f(x, y+1) - f(x, y)|). \quad (5)$$

研究基于 256 级灰度图像。根据人眼视觉特性,在图像灰度很高和很低的情况下,人眼对灰度的分辨力很差。而在图像灰度适中的情况下,人眼的分辨力最强。在 128 级灰度附近,人眼可以分辨出 2 个灰度级的差别。在图像处理中,图像在空域灰度变化的速度反映图像的梯度大小。由此,直接将梯度值小于 2 的像素点的灰度值保留不变。另外,由人眼的视觉特性可知,图像变化幅度较大,细节丰富的区域容易引起人眼的注意,而变化平缓的区域则不易引起注意。对灰度图像而言,人眼会将注意力集中在灰度值变化大的区域。由此,对图像纹理细节丰富的区域,应适当加强这个区域的灰度间隔。

对图像边缘突变的地方,应适当约束这个区域的灰度间隔,而对平缓或等灰度的区域,应保留灰度值不变。

因此,根据所设计的掩模和人眼视觉特性分析,得到分数阶微分阶数 α 与梯度模值 $\text{mag}(\mathbf{G})$ 的一种分段线性函数:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\max'(\mathbf{G}) + \epsilon_1} \cdot \text{mag}(\mathbf{G}) + \{\epsilon_2\}, & \text{mag}(\mathbf{G}) > 90; \\ 0, & \text{mag}(\mathbf{G}) < 2. \end{cases} \quad (6)$$

这里 \max' 是所有像素点的梯度模值的最大值。为了保证 α 值不超过 1, ϵ_1 为任意正数,为了突出掩模中心点对邻域各点的影响,可以增加一个可选的正数参数 ϵ_2 , ϵ_2 要满足下列条件

$$\epsilon_2 < 1 - \frac{1}{\max'(\mathbf{G}) + \epsilon_1} \cdot \text{mag}(\mathbf{G}).$$

当 $\max(\mathbf{G}) > 90$, 采用 $\epsilon_1 = \max'(\mathbf{G})$, 所以 $\epsilon_2 < 0.5$, 取 $\epsilon_2 = 0.499$ 。当 $2 < \max(\mathbf{G}) \leq 90$, 采用 $\epsilon_1 = 2\max'(\mathbf{G})$, 所以 $\epsilon_2 < 0.6666$, 取 $\epsilon_2 = 0.666$ 。由此,采用的分数阶微分阶数 α 与梯度模值 $\text{mag}(\mathbf{G})$ 的一种分段线性函数:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2\max'(\mathbf{G})} \cdot \text{mag}(\mathbf{G}) + 0.499, & 90 < \text{mag}(\mathbf{G}); \\ \frac{1}{3\max'(\mathbf{G})} \cdot \text{mag}(\mathbf{G}) + 0.666, & \text{mag}(\mathbf{G}) \leq 90; \\ 0, & \text{mag}(\mathbf{G}) < 2. \end{cases} \quad (7)$$

根据式(7)可以知,对于图像灰度值突变的边缘,则其梯度模值较大,分数阶微分阶数 α 适当减小。对于纹理密集的区域,分数阶微分阶数 α 适当增大。对等灰度区域或平缓区域,梯度值为零或者小于 2, 则其分数阶微分阶数为零,不对其进行处理,保留图像相应灰度值。

1.3 自适应 α 阶微分对信号增强分析

$G-L$ 公式(1)可以约简为如下等式

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^m \times \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(t-mh), \quad (9)$$

不失一般性,对指定 h 的步长值,可以得到 $G-L$ 公式对属于 $L^2(R)$ 空间的锯齿波、方波信号和 $\sin c$ 函数的不同阶数的分数阶微分的处理效果,如图 3。自适应 α 为每一个坐标点相对于下一个坐标点的斜率的绝对值,对斜率大于 1(即阶数 α 大于 1)的坐标点,其对应的阶数 α 取 0.99,以使阶数 α 不超过 1。

分析图 3 可以得出,自适应 α 阶微分具有以下特点

1)沿斜坡的自适应 α 阶微分值非零,亦非常数,对信号做非线性增强,而沿斜坡的整数阶微分值为常数;

2)平坦段的自适应 α 阶微分值保持不变,而指定分数阶的微分值是渐趋于零的,任意整数阶微分值则为零;

3)自适应 α 阶微分适当约束了高频成分的增

强,而使中频细节得以加强,这样从一定程度上抑制了噪声,增强了信号细节信息,并保留了信号的包络分布。

可以证明二维数字图像 $f(x,y) \in L^2(R^2)^{[16]}$,所以一维函数 $f(t)$ 的分数阶微分对信号作用规律的分析同样适合二维数字图像。

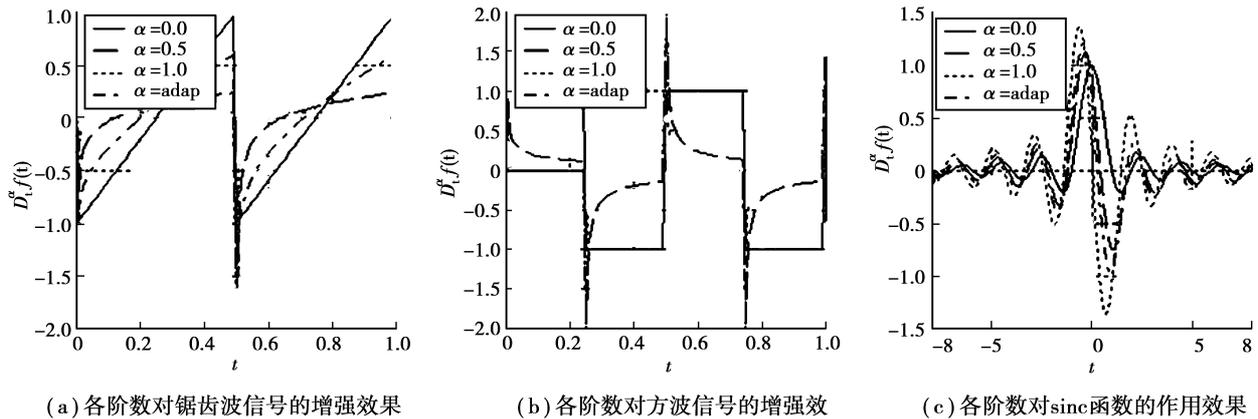


图 3 不同阶数对一维信号的作用规律

1.4 自适应 α 阶微分算法分析与时间复杂度

笔者提出的自适应 α 阶微分算法,其核心部分包括阶数 α 的确定和 α 阶微分对图像纹理增强2部分。因此,对于给定的一幅图像,首先计算出自适应的 α 阶数,然后依据设计的掩模模板对图像相应的像素进行逐个处理。其算法描述如下

1)输入一幅待处理的图像 f ,若为非灰度图像,将其转化为灰度图像;

2)计算图像 f 在各个像素点的梯度值,并依据人眼视觉特性的理论,求得对应各个像素点的 α 阶数;

3)根据设计的掩模模板对图像 f 的各个像素进行处理,对图像边缘不能利用模板处理的像素点,保留其灰度值,输出增强后的图像 g 。

以 $N \times N$ 的图像为例,求解梯度值需要对每个像素进行2次加法运算,即需要 $2N^2$ 次加法运算。按照 3×3 的掩模模板,对图像 f 进行处理,对掩模中心点距原图像 f 边缘的距离不大于 $N-1$ 的像素进行逐个处理,并且需要9次加法运算,即需要 $9(N-1)^4$ 次加法运算。因此自适应 α 阶微分算法的时间复杂度为 $O(N^4)$ 。可以看出,该算法以降低部分时间效率为代价,使分数阶微分理论能够完全自动化地应用在图像处理上。

2 实验与分析

采用3种典型的阶数 $\alpha=0.3$ 、 $\alpha=0.5$ 和 $\alpha=0.8$

作为指定分数阶微分阶数,为了分析比较自适应 α 阶微分与指定分数阶微分的图像纹理增强能力,对3种不同的图像做了3组比较实验,结果如图4。从图4可知,自适应 α 阶微分对3种不同图像的处理结果,都使其纹理细节得到了增强,表现更清晰,不会出现弱锐化和强锐化现象,更符合人们的视觉感受。

为了客观评价各种方法的增强能力,依据信息熵 $^{[17-18]}$ 和平均梯度 $^{[19-20]}$ 等纹理分析的定量标准,对增强后的图像进行分析。结果如表1。从图4(a)和表1可知,首先,对于所有的处理方法而言,其平均梯度都得到了提高,说明分数阶微分可以增强图像清晰度,改善图像质量。自适应 α 阶微分得到的平均梯度是原图的1~2倍,其平均梯度明显高于 $\alpha=0.3$ 和 $\alpha=0.5$ 的平均梯度。这表明,自适应 α 阶微分可以得到清晰度更好的图像。其次,对于所有的处理方法而言,其信息熵一般都得到了提高,表明分数阶微分可以增强图像边缘和纹理细节。自适应 α 阶微分得到的信息熵高于原图像。这表明,自适应 α 阶微分可以明显增强图像纹理细节并且接近于指定阶数下的最佳效果。对(b)和(c)2组实验进行分析,可以得到相同的结论。因此,自适应 α 阶微分在增强图像纹理细节、提高图像清晰度和对比度方面具有较好的性能,并且依据图像自身梯度信息完全自动化地处理图像,可以极大地节省人工寻求最佳

分数阶微分阶数的时间,可以一定程度上地满足大量动态序列图像的增强处理要求。

为了证明自适应 α 阶微分算法可以一定程度上处理具有实时性要求的大量动态序列图像,在 Intel (R) Core(TM) Duo CPU T6400 的机器上,对该算

法进行图像处理所花费的时间,做了一组的实验。结果如表 2。数据表明,在目前中端性能的机器上,自适应 α 阶微分完全可以满足大量动态序列图像的处理要求。

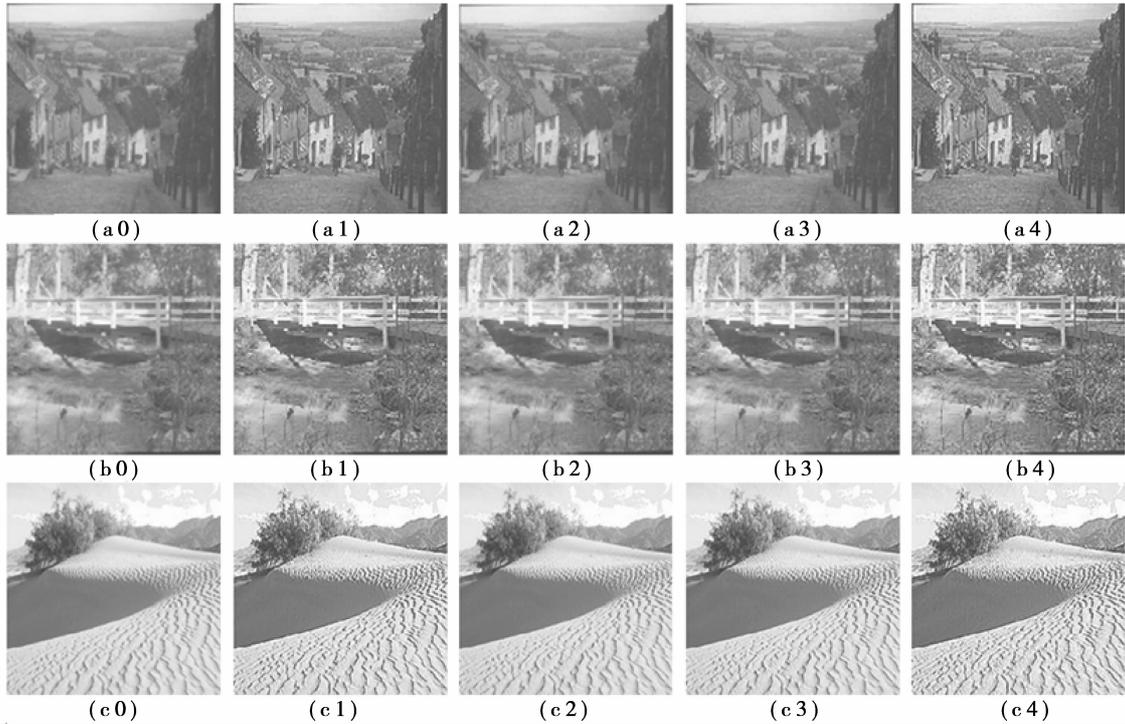


图 4 3 种不同图像的不同阶数微分的效果比较

(a0)、(b0)和(c0)为原图;(a1)、(b1)和(c1)为自适应 α 阶微分;(a2)、(b2)和(c2)为 0.3 阶微分;(a3)、(b3)和(c3)为 0.5 阶微分;(a4)、(b4)和(c4)为 0.8 阶微分

表 1 自适应 α 阶微分与固定分数阶微分对图像

纹理增强能力的定量比较		
(a)组图像		
阶数	信息熵	平均梯度
0.0	7.697 8	7.155 1
自适应 α 阶	7.729 5	12.61 6
0.3	7.681 1	7.632 8
0.5	7.671 3	9.209 3
0.8	7.790 6	16.678
(b)组图像		
阶数	信息熵	平均梯度
0.0	7.638 6	9.270
自适应 α 阶	7.781 1	17.977
0.3	7.663 6	10.230
0.5	7.715 5	12.638
0.8	7.813 4	22.823

(c)组图像

阶数	信息熵	平均梯度
0.0	7.419 4	10.843
自适应 α 阶	7.416 3	25.908
0.3	7.471 7	13.601
0.5	7.513 9	17.115
0.8	7.375 1	29.819

表 2 自适应 α 阶微分对 3 种不同图像的处理时间

图像	图像 a	图像 b	图像 c
t/s	0.0470	0.0470	0.0470

3 结 论

针对目前只能通过人为实验指定最佳分数阶微分阶数的现状,笔者研究并提出了可以依据图像自身梯度信息和人眼视觉特性等理论的能够自动生成分数阶微分阶数的新方法。并依据信息熵和平均梯

度等图像纹理分析的定量标准,对增强后的图像做了比较分析。实验结果表明自适应 α 阶微分可以得到连续变化的增强效果,适用于任意灰度图像的纹理增强,较之固定分数阶微分节省了大量人工寻求最佳分数阶微分阶数的时间,有利于实时性地处理大量动态序列图像,使分数阶微分理论用于动态目标跟踪和识别成为可能。同时实验结果也证明了对依据图像梯度进行分数阶微分阶数自动调整的理论分析的正确性。

参考文献:

- [1] PU Y F, ZHOU J L, YUAN X. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(2): 491-511.
- [2] 杨柱中,周激流,晏祥玉,等. 基于分数阶微分的图像增强[J]. 计算机辅助设计与图像学报, 2008, 20(3): 333-348.
YANG ZHU-ZHONG, ZHOU JI-LIU, YAN XIANG-YU, et al. Image enhancement based on fractional differentials [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2008, 20(3): 333-348.
- [3] 蒲亦非. 将分数阶微分演算引入数字图像处理[J]. 四川大学学报:工程科学版, 2007, 39(3): 124-132.
PU YI-FEI. Application of fractional differential approach to digital image processing [J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2007, 39(3): 124-132.
- [4] 蒲亦非,王卫星. 数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则[J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1128-1135.
PU YI-FEI, WANG WEI-XING. Fractional differential masks of digital image and their numerical implementation algorithms [J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(11): 1128-1135.
- [5] 蒲亦非,袁晓,廖科,等. 现代信号分析与处理中分数阶微积分的五种数字实现算法[J]. 四川大学学报:工程科学版, 2005, 37(5): 118-124.
PU YI-FEI, YUAN XIAO, LIAO KE, et al. Five numerical algorithms of fractional calculus applied in modern signal analyzing and processing [J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2005, 37(5): 118-124.
- [6] LOVERRO A. Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer [J/OL]. 2004; 1-28 [2010-03-18]. <http://www.nd.edu/~msen/Teaching/UnderRes/FracCalc.pdf>.
- [7] CAFAGNA D. Fractional calculus: a mathematical tool from the Past for present engineers [J]. IEEE Industrial Electronics Magazine, 2007, 1(2): 35-40.
- [8] MILLER K S, ROSS B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations [M]. USA: John Wiley & Sons, 1993.
- [9] ZHANG W W, ZHOU S B, LI H, et al. Chaos in a fractional-order rossler system [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42(3): 1684-1691.
- [10] HUANG P W, DAI S K, LIN P L. Texture image retrieval and image segmentation using composite sub-band gradient vectors [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2006, 17(5): 947-957.
- [11] FOUNTAIN S R, TAN T N. Efficient rotation invariant texture features for content-based image retrieval [J]. Pattern Recognition, 1998, 31(11): 1725-1732.
- [12] MAJUMDER A, IRANI S. Perception-based contrast enhancement of images [J]. ACM Transactions on Applied Perception, 2007, 4(3): 1-22.
- [13] COLEMAN S A, SUGANTHAN S, SCOTNEY B W. Gradient operators for feature extraction and characterization in range images [J]. Pattern Recognition Letters, 2010, 31(9): 1028-1040.
- [14] FATTAL R, LISCHINSKI D, WERMAN M. Gradient domain high dynamic range compression [C]// Proceedings of the 29th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 2002, San Antonio, Texas, New York, NY, USA: ACM, 2002: 249-256.
- [15] 康牧,王宝树. 一种基于图像增强的图像滤波方法[J]. 武汉大学学报:信息科学版, 2009, 34(7): 822-825.
KANG MU, WANG BAO-SHU. An image filtering algorithm with image enhancement [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2009, 34(7): 822-825.
- [16] TANG Y Y, YANG L H, LIU J M, et al. Wavelet theory and its application to pattern recognition [M]. Singapore: the World Scientific Publishing Company, 2000.
- [17] UBRIACO M R. Entropies based on fractional calculus [J]. Physics Letters A, 2009, 373(30): 2516-2519.
- [18] SHANNON C E. A mathematical theory of communication [J]. Bell System Technical Journal, 1948, 27(1): 1-54.
- [19] GROENEWALD A M, BARBARD E, BOTHA E C. Related approaches to gradient-based thresholding [J]. Pattern Recognition Letters, 1993, 14(7): 567-572.
- [20] 支力佳,张少敏,赵大哲,等. 基于灰度共生矩阵和梯度相位互信息的医学图像检索[J]. 东北大学学报:自然科学版, 2010, 31(3): 358-365.
ZHI LI-JIA, ZHANG SHAO-MIN, ZHAO DA-ZHE, et al. Medical image retrieval based on gray level co-occurrence matrix and gradient phase mutual information [J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2010, 31(3): 358-365.