

文章编号:1000-582X(2011)02-125-05

处理梁单元端部自由度释放的附加自由度法

王忠全¹, 张其林¹, 康 澜²

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 中交四航工程研究院有限公司
水工构造物耐久性技术交通行业重点实验室, 广东 广州 510230)

摘 要:采用附加自由度的方法来处理梁单元的端部释放,为单元端部释放的处理提供了一种新的方法。根据具有附加自由度梁单元的应变矩阵,得到了扩充后的梁单元刚度矩阵,并推导出单元自由度沿整体坐标系释放或沿单元局部坐标系释放两种情况统一的刚度矩阵转换公式。针对两节点的梁单元采用 UL 列式,进行了非线性有限元分析,并编制了相应的分析计算程序。用此程序分析了具有自由度释放的梁单元模拟大位移大转动的性能,并与现有方法进行了比较。算例结果表明,附加自由度方法具有精度高,操作简便的优势。

关键词:附加自由度; 梁端部释放; 非线性有限元; 数值分析

中图分类号:TU411

文献标志码:A

Beam element end release by extra degree of freedom method

WANG Zhong-quan¹, ZHANG Qi-lin¹, KANG Lan²

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;
2. Key Laboratory of Durability Technology for Harbor and Marine Structure Ministry of Communications, Engineering Technology Research Co., LTD. of CCCC Fourth Harbor Engineering Co., Ltd., Guangzhou 510230, Guangdong, P. R. China)

Abstract: This paper develops a new method of extra degree of freedom (extra DOF) for the beam element with end release. Based on the strain matrix with extra DOFs, it derives the stiffness transformation matrix of released element, which can be applied to situations along global coordinate system or element local coordinate system. The effects of end release processing method for beams with large displacement are analyzed, and the results compared with those from other existing methods show that the extra DOF processing method has higher performance and accuracy.

Key words: extra degree of freedom; frame end release; nonlinear finite element method; numerical analysis

空间杆系结构的有限元方法中,常要处理单元端部释放的情况。端部释放的单元是杆系结构中一种重要的单元形式,在实际工程中已广泛应用。目前处理梁单元端部释放的方法一般有两种:一种是

采用自由度缩聚的方法,这种方法对单元刚度矩阵采用求逆的方式进行缩聚处理^[1-6],不需要另外建立节点,只要在单元内部对释放自由度进行缩聚,该方法的优点在于建模方便,减少了自由度数目;缺点是

收稿日期:2010-09-27

基金项目:上海市科委科研项目(08dz0580303)

作者简介:王忠全(1979-),男,同济大学博士研究生,主要从事结构有限元分析及数值模拟研究,(Tel)021-65981466;
(E-mail) wangzhq2000@sohu.com。

张其林(联系人),男,同济大学教授,博士生导师,(E-mail) zhangqilin@tongji.edu.cn。

精度有所损失,对于非线性问题的分析结果影响较大,有时甚至不收敛;第 2 种方法采用自由度耦合^[7-8]的方式进行处理,即建立重复节点,然后耦合某些自由度。这种方法没有对刚度矩阵进行缩聚处理,但需要有限元模型中允许多个节点的几何位置可以重合。其优点在于保留了释放自由度,计算精度高,缺点是有限元模型的建立和修改过程烦琐,容易出错,不符合工程人员的习惯。考虑到实际工程的需求,通过修改单元自由度数来完成该项功能。采用单元附加自由度的方法进行梁端部释放的处理,集合了上述 2 种方法的优点,既不需要处理重复节点,建模简便,同时又能保留释放的自由度项,可以完整的考虑刚度矩阵,计算分析精确。

1 梁单元端部释放产生附加自由度的方程推导

文中主要是在 2 节点截面梁^[9-10]基础上进行推导得到的,非线性格式采用 U. L. 列式^[11-13],具体推导过程如下。

方法的核心在于对梁单元从单元局部坐标到整体坐标的转换矩阵进行内部处理,处理过程不影响非线性迭代计算,因此具有很强的通用性,对应变位移矩阵的处理最后等效成对单元转换矩阵的处理。在有限元分析流程中需要增加和改动的部分如图 1 所示:

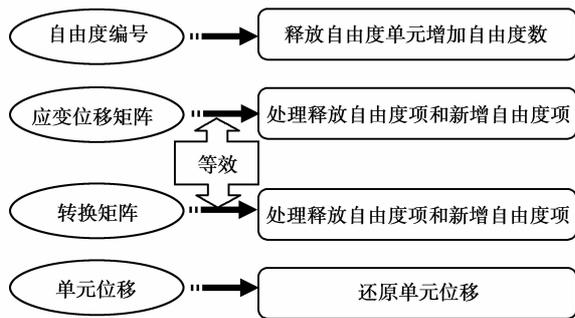


图 1 单元自由度释放非线性分析理论

已知:整体坐标系下为 (x, y, z) ,单元局部坐标系为 (x', y', z') ,假设:

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} l'_{x'x} & l'_{x'y} & l'_{x'z} \\ l'_{y'x} & l'_{y'y} & l'_{y'z} \\ l'_{z'x} & l'_{z'y} & l'_{z'z} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中: $l'_{x'x} = \cos(\alpha)$ 。

单元局部坐标系下,单元刚度矩阵为: $K'_e = \int B'^T DB' dV$ 。其中,单元局部坐标系下应变位

移矩阵为 $B' = [\dots B'_i B'_j B'_k \dots]$ 。

整体坐标系下,单元刚度矩阵为: $K_e = \int B^T DB dV$ 。其中,整体坐标系下应变位移矩阵为 $B = [\dots B_i B_j B_k \dots]$ 。

单元局部坐标系与整体坐标系之间应变位移矩阵的转换公式为: $B_i = B'_i \lambda_i$,其中 $\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$ 。

定义 4 个矩阵,分别是整体坐标系下保留自由度与原自由度的转换矩阵为 T_{released} ,整体坐标系下释放自由度与原自由度的转换矩阵为 T'_{released} ,单元局部坐标系下保留自由度与原自由度的转换矩阵为 T'_{reserved} ,单元局部坐标系下释放自由度与原自由度的转换矩阵为 T'_{released} 。

对于应变-位移矩阵进行处理可分成如下 2 种情况:

情形一:对该单元 j 节点整体坐标系下的某几个自由度进行释放(见图 2)

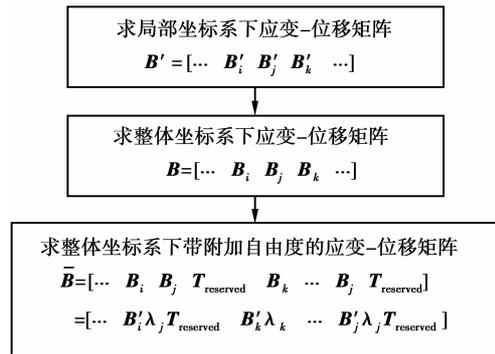


图 2 整体坐标系下自由度释放处理

情形二:对该单元 j 节点单元局部坐标系下的某几个自由度进行释放(见图 3)

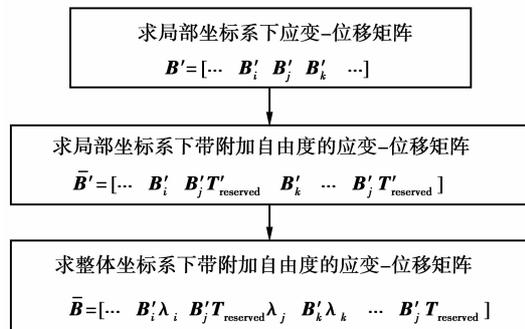


图 3 单元局部坐标系下自由度释放处理

这 2 种情形其实可以统一成采用不同的转换矩阵来表示:

$$\bar{B} = B'T, \quad (2)$$

情形一等效的转换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \lambda_j \mathbf{T}_{\text{reserved}} & 0 & \cdots & \lambda_j \mathbf{T}_{\text{released}} \\ \cdots & 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3)$$

情形二等效的转换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \mathbf{T}'_{\text{reserved}} \lambda_j & 0 & \cdots & \mathbf{T}'_{\text{released}} \\ \cdots & 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

即整体坐标系下,单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}'_e \mathbf{T} \quad (5)$$

还原单元位移处理见图 4。

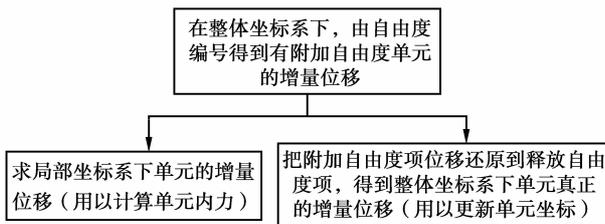


图 4 还原单元位移处理

2 2 种坐标系下自由度释放的典型示例

2.1 整体坐标系下自由度释放示例

以 2 节点截面梁单元为例,1 个节点具有 6 个自由度,如果在整体坐标系下释放 1 节点的 x 方向转角和 2 节点的 y 方向平动位移,那么该梁单元自由度数为 14,等效转换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{T}_{\text{reserved}}^1 & 0 & \lambda \mathbf{T}_{\text{reserved}}^1 & 0 \\ 0 & \lambda \mathbf{T}_{\text{reserved}}^2 & 0 & \lambda \mathbf{T}_{\text{released}}^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中:

$$\mathbf{T}_{\text{reserved}}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{\text{released}}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_{\text{reserved}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{\text{released}}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

最后 \mathbf{T} 矩阵为 12×14 ,形成的单元刚度矩阵为 14×14 。

2.2 单元局部坐标系下自由度释放示例

如果在单元局部坐标系下释放 1 节点的 x 方向转角和 2 节点的 y 方向平动位移,那该梁单元自由度数为 14,等效转换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{\text{reserved}} \lambda & 0 & \mathbf{T}'_{\text{released}} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}'_{\text{reserved}} \lambda & 0 & \mathbf{T}'_{\text{released}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中:

$$\mathbf{T}'_{\text{reserved}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}'_{\text{released}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{T}'_{\text{reserved}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}'_{\text{released}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

最后 \mathbf{T} 矩阵为 12×14 ,形成的单元刚度矩阵为 14×14 。

3 数值算例分析

根据上述计算方法编制了非线性有限元程序,并通过数值算例验证该方法的有效性。比对象为 ANSYS 的 BEAM44 单元,ANSYS 中单元局部坐标系下的自由度释放采用的是单元缩聚的方法,而整体坐标系下的释放采用的整体坐标系下非释放自由度耦合的方法。

3.1 线位移释放算例

如图 5 所示,直梁一端固结,一端简支,位于 $x-z$ 平面内,承受跨中的集中弯矩 M_y 。横截面边长为 200 mm, $M_y = 0.25EI\pi/L$, $E = 206 \text{ kN/mm}^2$, $L = 1 \text{ m}$ 。将直梁划分为 4 个单元,对与简支支座相连的

梁单元端部进行自由度释放,释放情况如下:分别沿整体坐标系和单元局部坐标系释放 x 方向和 z 方向的线位移自由度。ANSYS 中的整体释放采用的是耦合命令 CP,局部释放采用的是单元局部坐标系下的单元释放功能。计算时分 10 级加载,ANSYS 和计算结果详见表 1。由表 1 可得,对于这种大位移的情况,ANSYS 局部释放无法实现,原因是因为 ANSYS 采用的自由度缩聚的做法,这种缩聚的方法减少了自由度,在大位移计算时容易产生不收敛的计算问题。而文中的方法 2 种情况均可以实现,而且整体释放跟悬臂梁计算结果完全一致,而局部

释放位移略小于整体释放的情况,这与工程实际完全吻合。因此,文中的计算方法完全可信,且比已有的处理方法有很大改进。

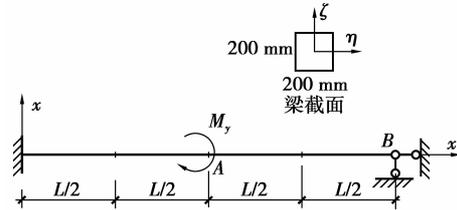


图 5 算例 1 未释放模型图

表 1 算例 1 计算结果

输出参数	A 点位移(ANSYS)			B 点位移(ANSYS)		
	悬臂梁	整体释放	局部释放	悬臂梁	整体释放	局部释放
u/mm	-94.168	-94.168	不能计算	-387.960	-387.960	不能计算
w/mm	-375.880	-375.880	不能计算	-1 083.900	-1 083.900	不能计算
θ_y/rad	0.787	0.787	不能计算	0.787	0.787	不能计算
输出参数	A 点位移(本文)			B 点位移(本文)		
	悬臂梁	整体释放	局部释放	悬臂梁	整体释放	局部释放
u/mm	-94.340	-94.340	-94.340	-389.974	-389.974	-384.866
w/mm	-376.046	-376.046	-376.046	-1 085.883	-1 085.883	-1 080.740
θ_y/rad	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786

3.2 转角位移释放算例

如图 6 所示,直梁两端固接,位于 $x-z$ 平面内, $1/4$ 跨承受集中力。截面几何和材料特性同文中算例 1。跨中 B 节点释放情况考虑如下 3 种: B 节点不释放,对两端固接梁进行分析,分别沿整体和单元局部坐标系释放 y 方向的转角角位移自由度。分 2 种情况加载,情况一:只有荷载 $P_z = -100\ 000\ \text{kN}$,情况二: $P_y = P_z = -100\ 000\ \text{kN}$ 。计算时分 10 级加载,ANSYS 和文中计算结果详见表 2 和表 3。由计算结果可得,对于这种工程上经常出现的大位移大转动问题,文中和 ANSYS 计算结果 2 种情况都非常接近。其中情况 1 应该局部释放和整体释放都一

样,文中计算结果完全吻合,ANSYS 计算结果有微小差别。情况二整体释放和局部释放会略有差别,文中计算结果跟 ANSYS 计算结果误差都在 5% 以内。以上计算结果表明:证明文中的转角释放结果真实可信,且计算效率高,建模方便。

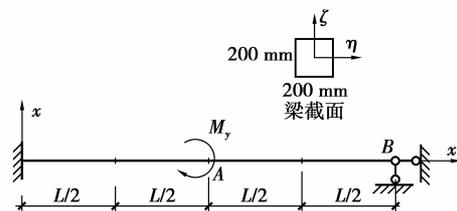


图 6 算例 2 释放后模型图

表 2 算例 2 情况一计算结果($P_z = -100\ 000\ \text{kN}$)

输出参数	A 点位移(ANSYS)			B 点位移(ANSYS)		
	无释放	整体释放	局部释放	无释放	整体释放	局部释放
u/mm	-1.251	-0.302	-0.235	-0.567	0.791	0.785
w/mm	-61.957	-69.892	-69.605	-72.280	-116.150	-116.970
θ_y/rad	0.122	0.159	0.159	0.056	-0.168	-0.168

续表

输出参数	A 点位移(本文)			B 点位移(本文)		
	无释放	整体释放	局部释放	无释放	整体释放	局部释放
u/mm	-1.672	-0.680	-0.680	-0.372	0.450	0.450
w/mm	-60.840	-68.074	-68.074	-70.834	-113.411	-113.411
θ_y/rad	0.120	0.155	0.155	-0.055	-0.164	-0.164

表 3 算例 2 情况二计算结果($P_y=P_z=-100\ 000\ \text{kN}$)

输出参数	A 点位移(ANSYS)			B 点位移(ANSYS)		
	无释放	整体释放	局部释放	无释放	整体释放	局部释放
v/mm	-60.340	-58.428	-57.791	-69.477	-66.467	-66.320
w/mm	-60.340	-67.339	-67.264	-69.477	-108.130	-108.120
θ_y/rad	0.118	0.150	0.151	-0.055	-0.156	-0.159
θ_z/rad	-0.118	-0.112	-0.110	0.055	0.054	0.052

输出参数	A 点位移(本文)			B 点位移(本文)		
	无释放	整体释放	局部释放	无释放	整体释放	局部释放
v/mm	-58.513	-56.474	-56.498	-67.187	-64.104	-64.044
w/mm	-58.494	-64.825	-64.770	-67.170	-104.534	-104.377
θ_y/rad	0.114	0.144	0.144	-0.054	-0.151	-0.151
θ_z/rad	-0.114	-0.108	-0.108	0.054	0.052	0.052

4 结 论

把端部释放的附加自由度处理方法引入到一般有限元方法的计算当中,同时以几个算例对该方法进行验证,得到以下结论:

1)单元局部坐标系下自由度释放时,采用附加自由度的端部释放处理方法,可以有效消除缩聚因素在有限元单元刚度计算中的影响,提高了计算结果的精度,适合进行大位移非线性计算;

2)整体坐标系下自由度释放时,采用附加自由度的端部释放处理方法,可以方便建模,不需要建立重复节点,即能完成自由度的释放;

3)文中的自由度释放非线性分析理论和计算方法,完成了基于有限单元计算方法系统的分析理论创新,用相对简单的方式高效率完成结构分析中经常出现的模拟计算问题,该理论适用范围广阔,不仅对梁单元有效,对于其他单元(例如三节点等参单元^[14,15])同样有效,理论通用性强。

参考文献:

- [1] 李国华,申林,顾强. 半刚性连接钢框架非线性有限元分析[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 29(2): 68-71.
LI GUO-HUA, SHEN LIN, GU QIANG. Nonlinear FEM analysis of semi-rigid frames in steel structures [J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2007, 29(2): 68-71.
- [2] 胡习兵,沈蒲生,舒兴平. 带转动弹簧的杆单元平面钢

结构弹塑性时程分析[J]. 湖南大学学报:自然科学版, 2008, 35(5): 11-15.

HU XI-BING, SHEN PU-SHENG, SHU XING-PING. Elastic-plastic time-history analysis of plane steel structures with two rotational springs[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2008, 35(5): 11-15.

- [3] SEKULOVIC M, SALATIC R. Nonlinear analysis of frames with flexible connections[J]. Computers and Structures, 2001, 79(11):1097-1107.
- [4] SIMOES L M C. Optimization of frames with semi-rigid connections[J]. Computers and Structures, 1996, 60(4):1097-1107.
- [5] SUAREZ L E, SINGH M P, MATHEU E E. Seismic response of structural frameworks with flexible connections[J]. Computers and Structures, 1996, 58(1):27-41.
- [6] HADIANFARD M A, RAZANI R. Effects of semi-rigid behavior of connections in the reliability of steel frames[J]. Structure Safty, 2003, 25(2):123-138.
- [7] Ansys11.0 使用手册[M]. Canonsburg, Pennsylvania: ANSYS, Inc, 2009.
- [8] SAP2000 分析参考手册[M]. Berkeley, California: Computers and Structures, Inc, 2004.
- [9] PETROLO A S, CASCIARO R. 3D beam element based on Saint Venant's rod theory[J]. Computers and Structures, 2004, 82(29/30): 2471-2481.

(下转第 141 页)

- ject[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(20): 3603-3613.
- [4] 王梦恕,李典璜,张镜剑,等. 岩石隧道掘进机(TBM)施工及工程实例[M]. 北京:中国铁道出版社,2004.
- [5] 中华人民共和国国家标准编写组. GB50218-94 工程岩体分级标准[S]. 北京:中国计划出版社,1994.
- [6] 何发亮,谷明成,王石春. TBM施工隧道围岩分级方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(9): 1350-1354.
HE FA-LIANG, GU MING-CHENG, WANG SHI-CHUN. Study on surrounding rockmass classification of tunnel cut by TBM[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(9): 1350-1354.
- [7] BIENIAWSKI Z T. 工程岩体分类[M]. 吴立新,王剑锋,刘殿书,等译. 徐州:中国矿业大学出版社,1993.
- [8] 中华人民共和国国家标准编写组. GB50287-99 水利水电工程地质勘察规范[S]. 北京:中国计划出版社,1999.
- [9] GONG Q M, ZHAO J, JIAO Y Y. Numerical modeling of the effects of joint orientation on rock fragmentation by TBM cutters[J]. Tunneling and Underground Space Technology, 2005, 20(2): 183-191.
- [10] GONG Q M, JIAO Y Y, ZHAO J. Numerical modeling of the effects of joint spacing on rock fragmentation by TBM cutters [J]. Tunneling and Underground Space Technology, 2006, 21(1): 46-55.
- [11] INNAURATO N, OGGERI C, ORESTE P P, et al. Experimental and numerical studies on rock breaking with TBM tools under high stress confinement[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2007, 40(5): 429-451.
- [12] TARKOY P J. Predicting raise and tunnel boring machine performance: state of the art [J]. Atlanta, Georgia, 1979, 5(8): 333-352.
- [13] RIEHARD J. Tunneling machines in hard rock[J]. Civil Engineering for Underground Rail Transport, 1990, 10(2): 121-123.
- [14] MOVINKELT J O. Geological parameters for hard rock tunnel boring [J]. Tunneling and Underground Space Technology, 1994, 9(4): 425-437.
- [15] HEER B, ESSEX R, YOUNG D. Manapouri second tailrace tunnel design and construction considerations [J]. Rapid Excavation and Tunneling Conference, 1997, 13(8): 132-133.
- [16] ZHU H, BRUMMER R, ANDRIEUX P. Joint rock mass numerical computation and application method and discussion[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(20): 3444-3449.
- [17] NASSERI M H B, RAO K S, RAMAMURTHY T. Anisotropic strength and deformational behavior of Himalayan schists[J]. Rock Mechanics and Mining Sciences, 2003, 40(1): 3-23.
- [18] 徐则民,黄润秋,张倬元. TBM刀具设计中围岩力学参数的选择[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(2): 230-234.
XU ZE-MIN, HUANG RUN-QIU, ZHANG ZHUO-YUAN. The mechanical parameters of surrounding rocks consideration in TBM cutter design[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(2): 230-234.
- [19] LIU W, ZHOU J. Prototype tests and particle flow numerical simulation of under-reamed piles on uplift loading [J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(S2): 201-206.
- [20] OKAZAKI K, ITO Y, AGUI K, et al. Risk management for the new tunneling construction using other tunnel records and helicopter borne survey in certiorari complex[J]. Tunneling and Underground Space Technology, 2006, 21(5): 123-130.

(编辑 陈移峰)

~~~~~

(上接第129页)

- [10] 周凌远,李乔. 基于UL法的CR列式三维梁单元计算方法[J]. 西南交通大学学报, 2006, 41(6): 690-695.  
ZHOU LING-YUAN, LI QIAO. Updated lagrange corotational formulation for geometrically nonlinear FE analysis of 3-D beam element[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2006, 41(6): 690-695.
- [11] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L. The finite element method for solid and structural mechanics[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005.
- [12] FREIREA A M S, NEGRAO J H O, LOPES A V. Geometrical nonlinearities on the static analysis of highly flexible steel cable-stayed bridges[J]. Computers and Structures, 2006, 84(31/32): 2128-2140.
- [13] BONET J, WOOD R D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008.
- [14] 童育强,向天宇,赵人达. 基于退化理论的空间梁单元有限元分析[J]. 工程力学, 2006, 23(1): 33-37.  
TONG YU-QIANG, XIANG TIAN-YU, ZHAO REN-DA. A degenerated 3D beam element for finite element analysis[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(1): 33-37.
- [15] 康澜,张其林. 三维退化纤维梁单元的非线性有限元分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2009, 31(2): 13-17.  
KANG LAN, ZHANG QI-LIN. Linear and nonlinear finite element analysis of a degenerated 3D beam element [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2009, 31(2): 13-17.

(编辑 陈移峰)