

文章编号:1000-582X(2011)03-138-05

基于摄动有限元法的结构动力响应鲁棒优化

陈世崑, 蹇开林

(重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

摘要:在传统的静力学鲁棒优化设计基础上,考虑时间参数,通过摄动有限元法处理系统中存在的不确定性因素,用 Newmark 方法做时程分析,将鲁棒优化设计方法运用在动力响应优化问题中。通过一个门形框架算例,与传统的优化设计结果相比,显示了鲁棒优化设计方法的优越性,设计的结果能使结构具有更稳定的性能。

关键词:动力学;动力响应优化;鲁棒设计;摄动有限元法

中图分类号:O321

文献标志码:A

Robust optimization of dynamic response based on perturbation finite element method

CHEN Shi-wei, JIAN Kai-lin

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: On the base of traditional robust statics optimal design, by considering time parameter, dealing with uncertain parameters with perturbation finite element, and using Newmark method for dynamic analysis, robust optimal design is applied to dynamic response optimization. Compared with the traditional optimal design's result in a frame system, robust optimal design of the frame displayed a significant improvement in performance.

Key words: dynamics; optimization of dynamic response; robust design; perturbation finite element method

随着社会的进步与科技的发展,近年来,人们对工程系统性能的要求越来越高。人们在致力于提高系统性能和产品质量的探索中,关于鲁棒性的研究成了一个热点议题,越来越多的研究人员把鲁棒性作为一个系统质量好坏的评判标准^[1-3]。

在实际工程系统中,影响产品性能的因素很多,主要可以分为可控因素和不可控因素^[1],可控因素是人们在设计过程中可以控制的因素,如设计变量、设计安全等级、变量的容差等^[4-6];不可控因素是不确定的,系统总可能存在加工误差,支座发生位移,系统温度发生变化,构件的质量分布不均匀,材料或元器件随着时间推移而发生老化等等不确定的情

况,要控制系统的这种不确定变化要人为的花费很多精力和费用,而更多情况下是不可能完全控制的^[6-7]。在传统的优化设计中,设计者通常是用设计变量和设计参数的名义值进行设计,没有在设计过程中考虑名义值和实际值的差异^[8]。因此,传统的优化设计方法其实是一种确定性的设计方法,设计过程考虑的因素与实际加工出来的产品必然有误差,而这种误差有可能导致设计出的产品性能与期望值差异很大。所以,能不能在产品或系统的设计过程中就把系统的不确定因素考虑进去,从而使设计出的产品对系统发生不确定变化时其性能发生的变化最小,即对这种变化不敏感?因此,鲁棒优化设

收稿日期:2010-10-07

基金项目:国家自然科学基金中国工程物理研究院联合基金资助项目(10376047)

作者简介:陈世崑(1984-),男,重庆大学博士生,主要从事结构动力学研究。

蹇开林(联系人),男,重庆大学教授,主要从事结构动力学研究,(E-mail)cqjian@yahoo.com.cn。

计方法应运而生,在解决这类问题中突显了很大的优势^[9-12]。

目前在工程领域,鲁棒优化设计在静力学中的应用日趋成熟,大多数鲁棒设计的研究都只考虑了静态的情况^[13-14],而在动力学中的应用还很少。C. Zang^[2]研究了鲁棒优化设计在动力学中的应用情况,并通过一个二自由度系统在简谐激励下的动力响应优化问题,探讨了鲁棒优化设计在动力学中的应用。C. Zang只考虑了二自由度系统受简谐激励,系统振动响应的振幅与随机参数间可得到一显式的函数关系,动力响应优化问题变成使振幅最小的问题,从而动力响应中的时间变量不出现在优化模型中,其实质变成了一个静态鲁棒优化问题。肖方豪^[1]研究了动力响应鲁棒优化的一般情况,考虑系统受任意时间函数的激励力作用,系统的动力响应需采用数值积分法进行计算。提出了处理时间变量的方法。但是,对系统中的随机环境变量采用 Monte Carlo 法进行数值模拟,其计算效率较低。王文凯^[15]总结了鲁棒优化设计的研究成果,介绍并评述了工程鲁棒优化设计方法,以及结构动力鲁棒优化设计方法。但在结构动力响应的鲁棒优化方面没有提出新的想法。结构中的环境变量(随机变化的)往往在一个小范围内波动,因此为了提高动力响应鲁棒优化的计算效率,可采用结构动力重分析的方法来处理环境变量,其中常用的有矩阵摄动法^[16]、基于灵敏度的一阶摄动方法和小参数摄动的有限单元法以及其它近似逼近方法等^[17,18]。笔者考虑系统存在环境干扰因素,用小参数摄动有限元法推导了结构动力响应数值积分的计算公式,从而使结构的动力响应与环境变量之间的关系可近似的用显式表示,从而达到优化过程中提高计算效率的目的。通过一个立柱和横梁的弹性模量皆存在微小波动的门形框架模型,实现了结构动力响应的鲁棒优化设计。

1 动力学中的鲁棒优化设计

1.1 鲁棒性

所谓“鲁棒性”,是指控制系统在一定(结构、大小)的参数摄动下,维持某些性能的特性^[3]。鲁棒设计考虑系统在一定(结构、大小、温度)的参数摄动情况下对系统进行设计,从而得到对这种参数摄动不灵敏的系统,我们便称该系统具备良好的鲁棒性^[6]。

1.2 鲁棒设计

鲁棒设计的目的是优化系统性能平均值和最小化由不确定因素变化引起的系统性能可变性^[4-5]。根据这种指导思想,20世纪80年代初日本学者 G. Taguchi 首先提出了产品鲁棒设计方法,它实质上是在不消除变量的可能波动变化的情况下,找到

合理的设计变量值,来使设计对象的性能指标对各种变量的可能波动变化不敏感的设计方法。图1示意性地说明了鲁棒设计的设计理念,它一般不在于寻找设计对象性能指标(目标函数)的最优点 X_{opt} ,而是宁愿用比较接近目标值但其系统性能对设计变量和环境变量波动不敏感的设计点 X_{robust} ^[7-9]。

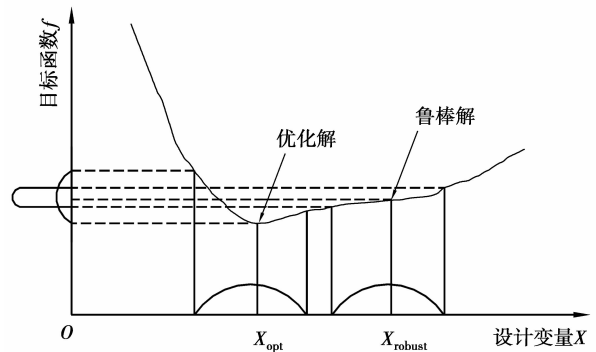


图1 鲁棒设计图解说明

1.3 动力学的鲁棒优化设计方法

在动力学问题中,考虑时间因素 t ,工程结构优化问题可以表示为

$$\begin{aligned} \min & f(\{x\}, \{z\}, t) \\ \text{s. t. } & g_j(\{x\}, \{z\}, t) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), (1) \\ & \{x_L\} \leq \{x\} \leq \{x_U\}, \end{aligned}$$

式中: $\{x\}$, $\{x_L\}$ 及 $\{x_U\}$ 分别为设计变量及其上下界; $\{z\}$ 为环境变量; $f(\{x\}, \{z\}, t)$ 为目标函数, $g_j(\{x\}, \{z\}, t)$, $(j=1, 2, \dots, m)$ 为 m 个约束函数。其中环境变量 $\{z\}$ 为在某一小区间随机变化的随机量^[10]。

在动力响应优化中,时间变量的出现增加了问题的复杂性,如何处理时间变量是动力响应优化与静力优化的关键区别之处。主要有两种方法处理时间变量,一种是通过时间的积分使目标函数和约束条件中不含时间,另一种方法是取动力响应时间历程中目标函数和约束函数的最大值,从而在优化模型中消除时间变量。于是消除时间变量后的动力响应鲁棒优化问题可变为如下的数学模型:

$$\begin{aligned} \min & F(\{x\}, \{z\}) \\ \text{s. t. } & G_j(\{x\}, \{z\}) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), (2) \\ & \{x_L\} \leq \{x\} \leq \{x_U\}. \end{aligned}$$

鲁棒设计同时强调目标函数的鲁棒性和约束函数的鲁棒性。如果目标函数对各种环境变量的波动变化不敏感,则称目标函数具有鲁棒性^[11-13]。如果设计变量波动变化而名义约束边界仍在可行域内,则称约束函数具有鲁棒性^[5]。在鲁棒优化设计中,目标函数的鲁棒性与约束函数的鲁棒性都应该考虑。对于目标函数 $F(\{x\}, \{z\})$, 其均值 μ_F 与标准差 σ_F 可以通过一阶泰勒级数展开来近似表达为

$$\left. \begin{aligned} \mu_F &= F(\{x\}, \{\mu_z\}), \\ \sigma_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^K \left[\frac{\partial F}{\partial z_i} \right]^2 \sigma_{z_i}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: K 表示环境变量 $\{z\}$ 的总个数; $\{\mu_z\}$ 表示环境变量 $\{z\}$ 的均值; σ_{z_i} 表示第 i 个环境变量 z_i 的标准差。

对于约束条件, 由于环境变量的随机变化, 只能以某种概率要求约束条件被满足。通常随机变量落在其均值附近的 3 倍标准差范围的概率大于 99%^[14]。因此我们可以将含随机环境变量的约束条件改为如下形式的近似式:

$$G_j(\{x\}, \{\mu_z\}) + 3\sigma_{G_j} \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

式中 σ_{G_j} 为第 j 个约束函数的标准差, 可近似由下式计算:

$$\sigma_{G_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^K \left(\frac{\partial G_j}{\partial z_i}(\{x\}, \{\mu_z\}) \sigma_{z_i} \right)^2} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

因此, 对于一般的结构动力响应鲁棒优化问题可以描述成双目标优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & [\mu_F, \sigma_F] \\ \text{s. t.} \quad & G_j(\{x\}, \{\mu_z\}) + 3\sigma_{G_j} \leq 0 \\ & (j = 1, 2, \dots, m), \\ & \{x_L\} \leq \{x\} \leq \{x_U\}. \end{aligned} \quad (6)$$

当系统能得到目标函数 $f(\{x\}, \{z\}, t)$ 和约束条件 $g(\{x\}, \{z\}, t)$ 关于环境变量 $\{z\}$ 的显式表达式时, 目标函数和约束条件的均值和标准差的计算就变得容易, 否则只能采用 Monte Carlo 方法进行数值模拟计算。但是, 大多数的系统难以得到目标函数和约束条件关于环境变量的显函数, 只能采用近似的方法得到, 其中摄动有限元方法是一种可取的手段。

1.4 小参数摄动方法

若系统不能得到目标函数 $f(\{x\}, \{z\}, t)$ 和约束函数 $g(\{x\}, \{z\}, t)$ 的显函数, 可采用小参数摄动的方法, 将目标函数和约束函数表示成环境变量的近似函数关系式。环境变量 $\{z\}$ 可表示为:

$$z_i = z_{i0} (1 + \epsilon_i) \quad (i = 1, 2, \dots, K), \quad (7)$$

式中: ϵ_i 为小参数量, $\{z_{i0}\}$ 为环境变量的均值, ϵ_i 表示了环境参数的不确定性。则系统的目标函数和约束函数当采用一阶近似时可表示如下式(8)、(9):

$$f(\{x\}, \{z\}, t) = f(\{x\}, \{z_0\}, t)_0 + \sum_{i=1}^K f(\{x\}, \{z_0\}, t)_1 \epsilon_i, \quad (8)$$

$$g(\{x\}, \{z\}, t) = g(\{x\}, \{z_0\}, t)_0 + \sum_{i=1}^K g(\{x\}, \{z_0\}, t)_1 \epsilon_i, \quad (9)$$

式中: $\{z_0\}$ 为环境变量 $\{z\}$ 的均值, $f(\{x\}, \{z_0\}, t)_0$, $g(\{x\}, \{z_0\}, t)_0$ 是对应环境变量取均值的部分, $f(\{x\}, \{z_0\}, t)_1$, $g(\{x\}, \{z_0\}, t)_1$ 是其一次项的系数。当结构采用有限单元法时, 可应用摄动有限元

法进行计算, 其中动力响应采用 Newmark 方法^[15], 通过比较 ϵ_i 同次幂系数可以求解出 $f(\{x\}, \{z_0\}, t)_0$, $g(\{x\}, \{z_0\}, t)_0$, $f(\{x\}, \{z_0\}, t)_1$, $g(\{x\}, \{z_0\}, t)_1$, 从而得到目标函数 $f(\{x\}, \{z\}, t)_0$ 和约束函数 $g(\{x\}, \{z\}, t)_0$ 关于环境变量的小参数 ϵ_i 的表达式。为节省篇幅, 具体的公式推导这里就不给出了。

2 应用实例

2.1 门形框架的优化设计

一个由 3 根圆杆构成的门形框架(如图 2)。其中构件长度 $L_1 = L_3 = 3$ m, $L_2 = 4$ m, 材料密度 $\rho = 7800$ kg/m³。考虑系统立柱和横梁的弹性模量 E 在一小范围内波动, 目的是设计出一组合理的框架圆杆直径 d_1 , d_2 和 d_3 , 使得框架(如图 3)的 16 号节点在集中力 $F(t) = [1200 \sin(80t) + 1200 \sin(0.8t)]$ N 的作用下, 位移响应的时平均最小, 并与传统优化结果进行对比。

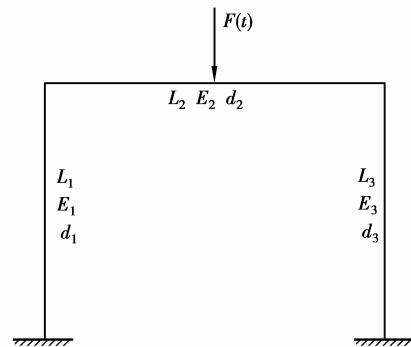


图 2 框架几何模型

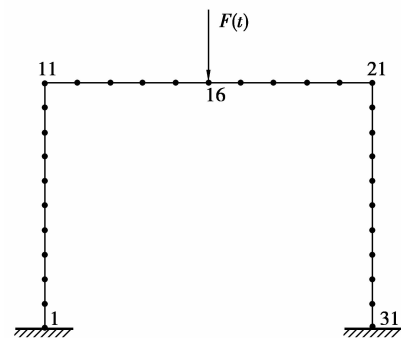


图 3 框架有限元模型

2.1.1 传统确定性的优化设计

用传统的确定性优化设计方法对这个门形框架模型进行设计, 不考虑门形框架的立柱和横梁的弹性模量波动, 取弹性模量为定值 $E = 210$ GPa, 使 16 号节点的位移响应时平均最小, 其中各杆直径的上下限如下:

$$\begin{aligned} 4 \text{ mm} &\leq d_1 \leq 50 \text{ mm}, \\ 4 \text{ mm} &\leq d_2 \leq 80 \text{ mm}, \\ 4 \text{ mm} &\leq d_3 \leq 50 \text{ mm} \end{aligned} \quad (10)$$

采用传统的确定性优化方法^[6]使用 Matlab 进行编程计算得到优化结果为 $[d_1, d_2, d_3] = [7.9, 32.8, 7.9]$ mm,第 16 号节点最大振幅 $A = 257.2$ mm。

2.1.2 鲁棒优化设计

采用鲁棒优化对这个门型框架进行设计,并考虑门形框架的立柱和横梁的弹性模量 E 在 210 GPa 周围存在小范围波动,用数学式表达为

$$[E] = [E_0] + \epsilon[E_0], \quad (11)$$

式中: ϵ 是服从正态分布的随机小参数,其均值 $\mu_\epsilon = 0$,标准差 $\sigma_\epsilon = 0.03$,根据概率理论的 3σ 原则, ϵ 至少有 99.865% 概率分布在 $[-0.1, 0.1]$ 范围内。

由小参数摄动法有限元法,第 16 号节点竖向位移可以表示成:

$$\{u_{16}\}_t = \{u_{16}\}_{0t} + \epsilon\{u_{16}\}_{1t}. \quad (12)$$

其位移响应关于时间平均后的均值和方差为:

$$\mu = \frac{\sum_{t=1}^N |\{u_{16}\}_{0t}|}{N}, \quad (13)$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum_{t=1}^N |\{u_{16}\}_{0t}|}{N}\right)^2 \times \sigma_\epsilon^2}. \quad (14)$$

系统总质量:

$$m = \rho(L_1\pi \times d_1^2/4 + L_2\pi \times d_2^2/4 + L_3\pi \times d_3^2/4). \quad (15)$$

要使系统的鲁棒性最好,则要求 16 号节点在整个时间段的位移响应平均值和方差都取最小值。考虑工程经济性,同时要求系统的质量不大于传统优化的所得质量 m_0 。因此,门形框架的鲁棒优化设计可以表示成下面的表达式:

$$\begin{aligned} \min & \quad [\mu, \sigma] \\ \text{s. t.} & \quad L_1 d_1^2 + L_2 d_2^2 + L_3 d_3^2 \leq 4m_0/\pi\rho, \quad (16) \\ & \quad 4 \text{ mm} \leq d_1 \leq 50 \text{ mm}, \\ & \quad 4 \text{ mm} \leq d_2 \leq 80 \text{ mm}, \\ & \quad 4 \text{ mm} \leq d_3 \leq 50 \text{ mm}. \end{aligned}$$

通过对式(13)、(14)两个函数分别进行单目标优化,可以得到理想的设计点(绝对最优解) $[\mu^*, \sigma^*]$,然后根据目标的相对重要程度赋予权系数,因此,该两目标鲁棒优化问题通过加权系数法,其目标函数可以转化为:

$$G = \alpha \frac{\mu}{\mu^*} + \beta \frac{\sigma}{\sigma^*}. \quad (17)$$

加权系数 $\alpha, \beta \in [0, 1]$ 是体现这两个目标函数重要性的参数。笔者折中考虑第 16 号节点位移均值、标准差的重要性,取 $\alpha = \beta = 0.5$ 。通过最小化目标函数 G 便可以得到满意的鲁棒优化设计解。通过 Matlab 软件编程计算,得到鲁棒优化设计结果: $[d_1, d_2, d_3] = [8.8, 31.6, 8.8]$ mm。第 16 号节点最

大振幅 $A = 259.3$ mm。

2.2 与传统的优化设计结果的比较

不妨假设框架立柱和横梁的弹性模量 E 发生 $\epsilon E = \pm 20$ GPa 的波动,现在对比鲁棒优化设计结果和传统优化设计结果(见表 1 和图 4)。

表 1 鲁棒优化设计结果与传统优化设计结果比较

参数/GPa	传统优化设计结果	鲁棒优化设计结果
		/mm
$\Delta\epsilon E = -20$	A_{16}	273.2
$\Delta\epsilon E = -10$	A_{16}	265.6
$\Delta\epsilon E = 0$	A_{16}	257.4
$\Delta\epsilon E = +10$	A_{16}	251.6
$\Delta\epsilon E = +20$	A_{16}	244.3

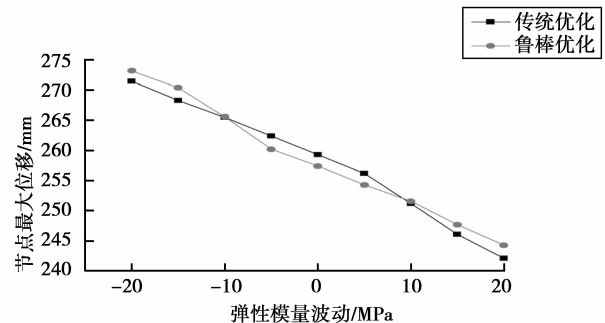


图 4 传统优化结果与鲁棒优化结果对比图

当弹性模量 E 不发生波动时,传统优化设计方法得到的优化结果要优于鲁棒优化设计结果,但当弹性模量 E 发生 10 GPa 的波动时,两种优化结果中的 16 节点处的最大位移 A_{16} 差距不大,而当 E 发生波动 20 GPa 时,传统优化设计方法得到的结果比鲁棒优化设计结果要差。

在实际工程应用中,由于时间,气候,环境等原因,不可避免的发生弹性模量的波动,为使结构不因弹性模量的波动破坏,采用鲁棒优化设计的框架能比传统优化设计的框架具有更好的性能,更安全可靠。

4 结 语

在结构动力学问题中进行鲁棒优化设计,用摄动有限元法处理系统的小参数波动,Newmark 方法做时程计算,通过一个任意随时间变化的振动荷载作用的框架模型,对系统的鲁棒性进行了优化设计。与传统的优化设计结果比较,由于鲁棒设计考虑了结构系统中不确定因素对系统的影响,得到的设计结果更加可靠,具有更稳定的性能。动力响应的鲁棒优化设计将在工程领域中具有广泛的应用前景。

本框架设计过程中,设计解的精度依赖于对时间步长的取值。时间步长越小,其解越精确。但是时间步长取值比较小时,将造成计算资源的浪费,增

大求解时间,特别是当系统自由度大时这个问题将更为突出,所以在求解时采取适当的时间步长至关重要,且有必要进一步研究其它更有效的方法。

另外有些系统的动力响应受不确定因素的影响较小,其鲁棒设计解与最优设计解得到的结果比较接近,这是由系统本身特性决定的,这种情况下,鲁棒优化设计方法的优势并不明显。

参考文献:

- [1] 肖方豪, 蹇开林. 鲁棒优化设计方法在结构动力学中的应用[J]. 工程力学, 2007, 24(S1): 62-65.
XIAO FANG-HAO, JIAN KAI-LIN. application of robust optimal design in structural dynamics [J]. Engineering mechanics, 2007, 24(S1): 62-65.
- [2] ZANG C, FRISWELL M I, MOTTERSHEAD J E. A review of robust optimal design and its application in dynamics [J]. Computers and Structures, 2005, 83(4/5): 315-326.
- [3] TAGUCHI G. Taguchi on robust technology development: bringing quality engineering up stream[M]. New York: ASME Press, 1993.
- [4] 宁喜荣, 李东海, 薛亚丽, 等. 基于遗传算法的预期动力学方程优化[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2006, 46(5): 674-677.
NING XI-RONG, LI DONG-HAI, XUE YA-LI. Optimization of desired dynamic equations using the genetic algorithm [J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2006, 46(5): 674-677.
- [5] 程远胜, 钟玉湘, 游建军, 等. 基于凸集模型的船舶坐墩鲁棒设计方法[J]. 中国造船, 2004, 45(1): 72-77.
CHENG YUAN-SHENG, ZHONG YU-XIANG, YOU JIAN-JUN. Robust design of docking blocks using convex models[J]. Shipbuilding of China, 2004, 45(1): 72-77.
- [6] 于利磊, 唐文勇, 张圣坤, 等. 一种工程结构的鲁棒优化设计方法[J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(8): 1189-1192.
YU LI-LEI, TANG WEN-YONG, ZHANG SHENG-KUN. Robust optimization design method for engineering structures[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2003, 37(8): 1189-1192.
- [7] DOLTSNIS IOANNIS, ZHAN KANG. Robust design of structures using optimization methods [J]. Comput. Methods: Appl. Mech. Engrg., 2004, 193 (23/26): 2221-2237.
- [8] LEE KWON-HEE, PARK GYUNG-JIN. Robust optimization considering tolerances of design variables[J]. Computers and Structures, 2001, 79(1): 77-86.
- [9] HAN J S, KWAK B M. Robust optimization using a gradient index: MEMS applications [J]. Struct. Multidisc. Optim., 2004, 27(6): 469-478.
- [10] 周继胜, 张圣坤. 结构鲁棒设计方法及其应用[J]. 力学与实践, 2000, 22(1): 11-15.
ZHOU JI-SHENG, ZHANG SHENG-KUN. Structures robust design and its application [J]. Mechanics and Engineering, 2000, 22(1): 11-15.
- [11] HU JIE, PENG YING-HONG, LI DA-YONG, et al. Robust optimization based on knowledge discovery from metal forming simulation [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2007, 187-188: 698-701.
- [12] GANTOIS K, MORRIS A J. The multi-disciplinary design of a large-scale civil aircraft wing taking account of manufacturing costs[J]. Struct. Multidisciplinary Opt., 2004, 28(1): 31-46.
- [13] JANAK S L, LIN XIAO-XIA, FLOUDAS C A. A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty[J]. Computers and Chemical Engineering 2007, 28(6/7): 171-195
- [14] WALKER M, HAMILTON R. A technique for optimally designing fibre-reinforced laminated plates with manufacturing uncertainties for maximum buckling strength[J]. Engrg. Optim., 2005, 37(2): 135-144.
- [15] 王文凯. 鲁棒优化设计方法及其在结构动力优化中的应用[J]. 机械制造, 2008, 22(12): 17-20.
WANG WEN-KAI. Application of robust optimal design in structural dynamics [J]. Machinery, 2008, 22(12): 17-20.
- [16] 陈塑寰. 结构动态设计的矩阵摄动理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [17] 黄斌, 刘文军. 随机结构重特征值分析的递推随机有限元法[J]. 振动工程学报, 2006, 19(2): 156-160.
HUANG BIN, LIU WEN-JUN. Analysis of repeated eigenvalues of structures with random parameters based on RSFEM [J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(2): 156-160.
- [18] 孙亮, 李顺华, 李正光, 等. 结构动力重分析的向量值有理逼近方法[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2005, 43(3): 258-261.
SUN LIANG, LI SHUN-HUA, LI ZHENG-GUANG. Vector-valued rational approximate method for structural dynamic reanalysis [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2005, 43(3): 258-261.

(编辑 郑洁)