

文章编号:1000-582X(2011)04-040-07

高压水射流破碎高围压岩石损伤场的数值模拟

刘佳亮^a, 司 鹄^{a,b}

(重庆大学 a. 资源及环境科学学院矿业工程; b. 西南资源开发及灾害控制教育部重点实验室, 重庆 400044)

摘要:利用 ALE(arbitrary lagrange-euler)算法,考虑到一般情况下岩石处于高围压状态,建立了高压水射流冲击高围压岩石的数值模型。分析了高压水射流冲击下高围压岩石的损伤演化过程,指出岩石破碎过程呈阶跃式;通过对比无围压状态下岩石和高围压状态下岩石在高压水射流作用下破碎坑演化情况,指出处于高围压状态下的岩石损伤沿轴向的演化速率明显低于无围压状态下的岩石,沿径向的损伤演化受围压影响较小。通过分析 4 个典型单元在不同速度射流冲击下损伤演化情况,表明在提高射流速度可明显提高射流破岩效率,并在理论上对射流速度与射流破岩性能的关系进行了解释。

关键词:数值模拟;高压水射流;围压;损伤

中图分类号:TD231.62

文献标志码:A

Numerical simulation on damage field of high pressure water jet breaking rock under high ambient pressure

LIU Jia-liang^a, SI Hu^{a,b}

(a. Department of Mineral Engineering; b. Key Laboratory for the Exploration of Southwestern Resource & Environmental Disaster Control Engineering, Ministry of Education, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: This paper uses ALE algorithm to develop a numerical model of breaking rock under high pressure water jet, in consideration of rock in a state of high ambient pressure. The simulation results show that damage evolution speed along axial direction of rock under high ambient pressure is lower than rock without ambient pressure, and ambient pressure has less impact on the damage evolution speed along radial direction. Through analyzing damage evolution of four typical element under water jet with different speed, it shows that increasing water jet speed can improve breaking rock efficiency. The relationship between water jet speed and performance of high pressure water jet breaking rock was explained in theory.

Key words: numerical simulation; high pressure water jet; ambient pressure; damage

由于高压水射流技术具有无热效应,高柔性,表面质量高等一系列其他切割技术无法比拟的优点,在许多行业部门得到了广泛的发展和应^[1-3],如在煤矿开采、巷道掘进、石油钻探等工程领域中,应用

高压水射流对岩石进行钻孔、破碎已较为常见^[4-5]。在高压水射流破岩研究中,岩石的破碎过程及机理是重要的研究方向。近年来有关高压水射流破岩机理形成了多种学说,如拉伸水楔破岩作用、密实核劈

收稿日期:2010-10-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50921063)

作者简介:刘佳亮(1985-),男,重庆大学博士研究生,从事矿业、安全工程方向研究,(E-mail)liujialianghai@163.com。
司鹄(联系人),女,重庆大学教授,博士生导师,主要从事工程力学、流体力学的研究,(E-mail)sihu@cqu.edu.cn。

拉破岩作用、气蚀破坏作用、水射流的冲击作用、水射流的动压力作用等一些半定性、半定量的理论模型^[6-7]。但由于高压水射流破岩过程涉及到流体、固体和流固耦合等诸多因素,高压水射流破岩机理一直尚未形成较为统一的学说^[8-9]。此外,许多学者通过数值方法来对高压水射流破岩机理进行研究。倪红坚等根据连续介质力学和连续损伤力学和细观损伤力学理论,给出了高压水射流破岩系统中流体和岩石的控制方程及适用于水射流破岩全过程分析的岩石损伤模型以及宏细观损伤的耦合模式^[10]。廖华林等利用全解耦流固耦合数值分析方法对超高压射流破岩过程中耦合系统应力场进行计算,建立了岩石宏观断裂规律与微观破坏机制间的联系^[11]。孙清德等人运用动态非线性有限元法和Hoffman破碎准则,对水射流破碎岩石的过程进行了分析,提出高压射流破碎岩石过程分为射流冲蚀破碎和水锤冲击破碎^[12]。以上研究推动了水射流破岩机理研究的更加深入,取得了一定的进展,但以上学者所采取的岩石模型均为理想状态下,未考虑地应力的影响,而考虑到岩石处于高围压状态,采用ALE算法建立了高压水射流冲击岩石的数值模型,通过流固耦合罚函数系数将射流与岩石耦合在一起,故模拟更接近真实物理状态下岩石的损伤破碎过程,计算结果更具参考价值。

1 数值计算模型

1.1 力学模型

ALE算法充分集合了Lagrangian和Eulerian有限元的优越性,在物质域与空间域外引进了参考域,解决了Lagrange描述下材料可能严重扭曲的问题以及Euler描述下移动边界引起的复杂性问题^[13-16]。在射流和空气物质部分采用ALE格式。

ALE算法的流体控制方程^[14]

连续性方程

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = -\rho \frac{\delta v_i}{\delta x_i} - w_i \frac{\delta \rho}{\delta x_i}, (i, j = 1, 2, 3)。 \quad (1)$$

动量方程

$$v \frac{\delta v_i}{\delta t} = \sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho w_i \frac{\delta x_j}{\delta x_i}。 \quad (2)$$

能量方程

$$\rho \frac{\delta E}{\delta t} = \sigma_{ij} v_{i,j} + \rho b_i v_i - \rho w_i \frac{\delta E}{\delta x_j}。 \quad (4)$$

变形率

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})。 \quad (5)$$

ρ 为物质密度; v 为物质速度; E 为物质能量; b_i 为体力; w_i 为相对速度即物质速度与网格速度的差。

1.2 岩石损伤模型

常用的岩石损伤模型主要有Mazars模型、TCK模型H-J-C模型等。高压射流冲击破碎岩石时,将呈现高应变率、大变形和非线性,在这种工况状态下的岩石多采用H-J-C模型。在H-J-C模型中损伤积累是塑性体积应变、等效塑性应变及压力的函数,强度以规范化等效应力描述如下^[17]

$$\sigma^* = [A(1-D) + BP^{*N}](1 + C \ln \dot{\epsilon}^*), \quad (6)$$

式中: $\sigma^* = \sigma/f'_c$ 是实际等效应力与静态屈服强度之比; $p^* = p/f'_c$ 是无量纲压力; $\dot{\epsilon}$ 和 $\dot{\epsilon}_0$ 分别为实际应变率和参考应变率。 $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0$ 是无量纲应变率。

通过等效塑性应变和塑性体积应变累积得到的损伤因子表示如下

$$D = \sum \frac{\Delta \epsilon_p + \Delta \mu_p}{\epsilon_p^f + \mu_p^f}, \quad (7)$$

式中: $\Delta \epsilon_p$ 是等效塑性应变增量; $\Delta \mu_p$ 为等效体积应变增量。

1.3 材料模型

水和空气均被认为是完全塑性材料,选择Gruneisen方程作为水的状态方程

$$P = \frac{\rho_0 C^2 \mu [1 + (1 - \frac{\gamma_0}{2})\mu - \frac{\alpha}{2}\mu^2]}{\left[1 - (S_1 - 1)\mu - S_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - S_3 \frac{\mu^3}{(1 + \mu)^2}\right]^2} + (\gamma_0 + \alpha\mu)E, \quad (8)$$

式中: C 是冲击波速度与质点速度变化曲线的截距; S_1 、 S_2 、 S_3 是冲击波速度与质点速度变化曲线的斜率系数; γ_0 为Gruneisen常数; α 是 γ_0 和的一阶体积修正量,采用半经验半理论的公式表示如下^[14]

$$P = a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 + (b_0\mu + b_1\mu + b_2\mu^2)E, \quad (9)$$

空气采用Linear Polynomial状态方程,可表示如下

$$P = c_0 + c_1\mu + c_2\mu + c_3\mu + (c_4 + c_5\mu + c_6\mu)E, \quad (10)$$

式中主要参数由试验确定, $\mu = \frac{1}{V} - 1$, V 表示相对体积。

1.4 几何模型及边界条件

由于在高压水射流冲击岩石过程中各物体及受力情况都是轴对称的,为了简化计算采用了1/4模型进行分析,如图1所示。模型的岩石几何尺寸为

50 mm×50 mm×30 mm,空气尺寸为 50 mm×50 mm×50 mm,模拟过程中没有考虑喷嘴和靶距问题,简化为射流尺寸为 1 mm×50 mm,速度为 500 m/s 的射流直接冲击岩石。建立模型时假设岩石为各向同性均质材料,射流和空气用完全塑性多物质 ALE 实体单元(见表 1),岩石采用 Lagrange 单元网格划分,通过 ALE 和 Lagrange 网格的耦合算法实现高压水射流对岩石的冲击过程。在岩石侧面施加围压,约束岩石底端 x 、 y 、 z 向的位移,上下表面施加无反射边界条件,在 XOZ 对称界面上 $Y=0$;在 YOZ 对称界面上 $X=0$ 。

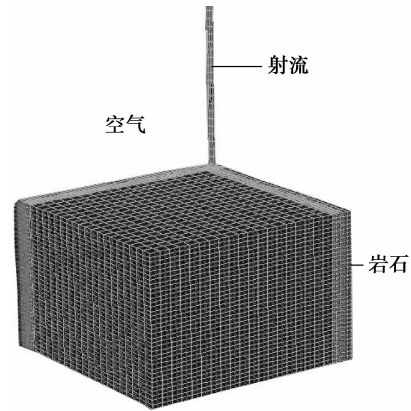


图 1 高压水射流冲击高围压岩石模型

表 1 煤岩的材料参数

| $\rho/(g \cdot cm^{-3})$ | F_c'/GPa | A | B | C | S_{Fmax} | G/GPa | D_1 | D_2 | N |
|--------------------------|------------|-----------------|---------------|----------------|--------------|-----------|-----------|-----------|------|
| 2.44 | 0.048 | 0.79 | 1.6 | 0.61 | 7.0 | 14.86 | 0.04 | 1.0 | 0.61 |
| E_{Fmin} | T/GPa | P_{crush}/GPa | μ_{crush} | P_{lock}/GPa | μ_{lock} | K_1/GPa | K_2/GPa | K_3/GPa | E |
| 0.01 | 0.004 | 0.016 | 0.001 | 0.80 | 0.10 | 85 | -171 | 208 | 35.7 |

2 计算结果分析

采用上述数值模型对高压水射流冲击岩石的过程进行计算,图 1 中(a)-(c)表示以速度为 500 m/s 的水射流对处于 8.0 MPa 围压下的岩石进行冲击,岩石的损伤演化情况,图 2 为岩石损伤部位示意图。

图 3、图 4 为图 2 所示岩石部位在几个不同时刻的损伤演化图及损伤场等值线演化图,随时间发展将岩石损伤动态显示可以发现岩石的破坏呈阶梯式,因为岩石损伤是 1 个能量交换的过程,由初始损伤发展成宏观裂纹、破碎坑,需要 1 个能量的积累、释放过程,岩石破碎坑呈阶跃式逐渐发展,最终形成近似为圆柱状的岩石破碎坑。岩石损伤场在轴向和径向迅速扩展,破碎坑的直径和深度逐

渐增大,但由于射流对岩体的冲击效应随径向距离的增大,衰减极为迅速,在距离射流冲击点较远处,岩石中的能量密度已经达不到岩石破坏的临界值,破碎坑直径很快趋于稳定,而破碎坑附近区域有不同程度的损伤。

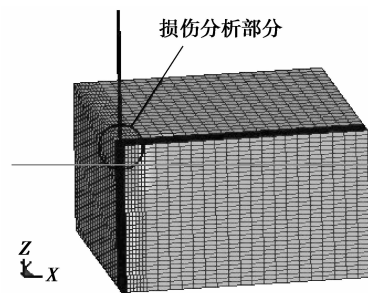


图 2 岩石损伤部位示意图

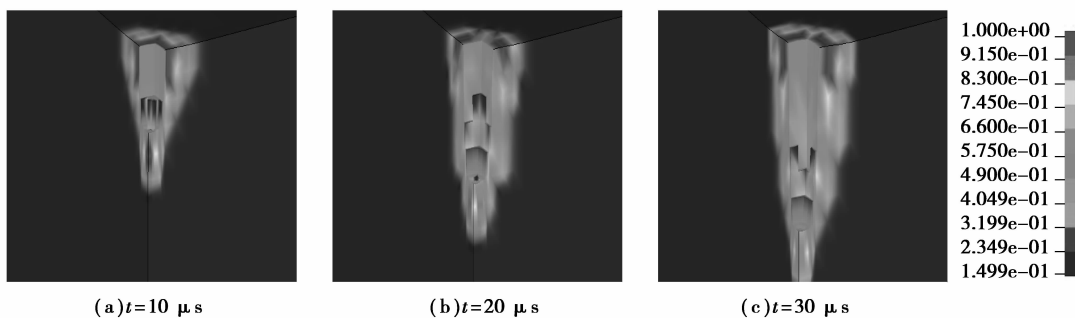


图 3 不同时刻岩石损伤演化图

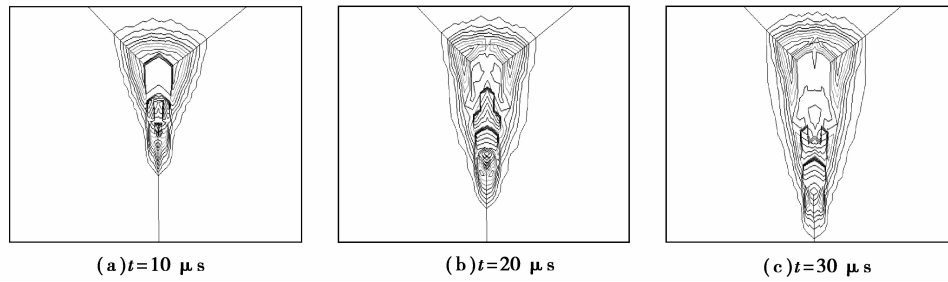


图 4 不同时刻岩石损伤场等值线演变图

图 5 为在 10 μs、20 μs、30 μs 时刻,无围压状态 碎坑演化的对比情况。
下岩石和高围压状态下岩石在高压水射流冲击下破

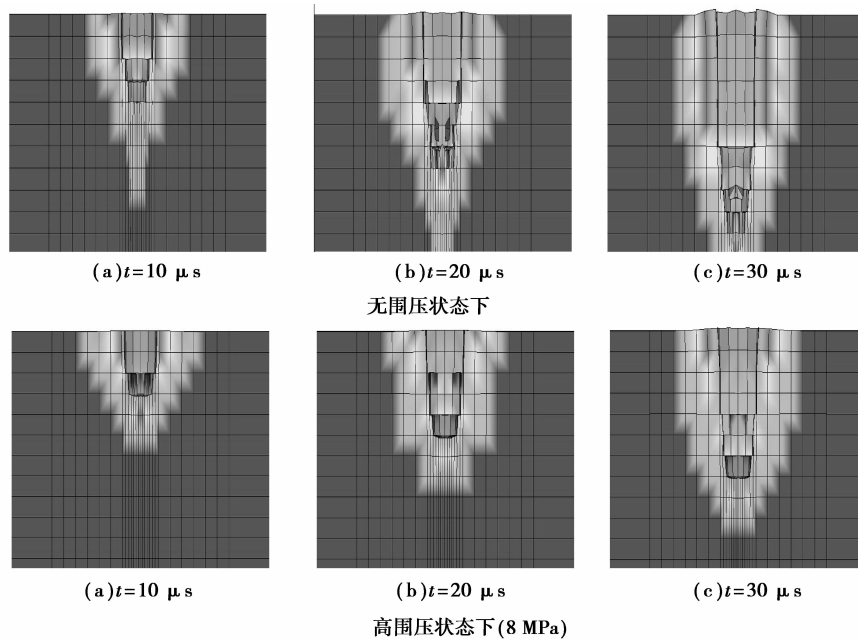


图 5 无围压状态下岩石和高围压状态下岩石破碎坑演化对比图

图 6 为射流冲击岩石 80 μs 内,无围压状态下岩石和高围压状态下岩石破碎坑深度变化曲线,可以发现在岩石处于高围压状态下时,岩石沿轴向的损失演化速率明显降低,沿径向的损伤演化受围压影响较小,在两种状态下破碎坑直径变化不大。高压水射流在与到岩石接触时,能量发生快速交换,在岩石表面产生巨大的冲击压力,射流与岩石内部的孔隙流体之间会形成巨大的压力差,在压力差作用下流体向岩石内部渗透,对岩体发生水楔作用,当超过岩石的抗拉和抗剪的极限强度时,岩石即发生破碎,由于高围压作用会影响岩石的微观裂隙的大小、结构等,水射流的水楔作用会受到影响,同时高围压状态下岩石的抗拉能力会相应提高,故高围压状态下岩石损伤发展较缓慢。此外,射流的部分能量会以应力波的形式在岩石中传播,对岩石产生拉伸作用,高围压作用会影响岩石内应力波的峰值和频率,

从而减弱应力波对岩石的损伤作用,增加岩石损伤破碎所需时间。

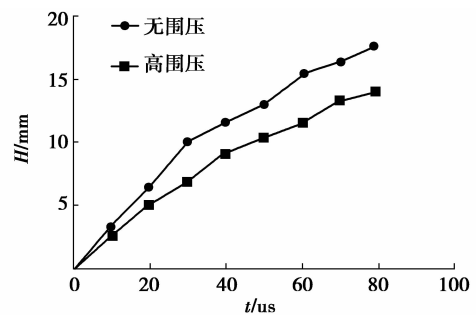


图 6 无围压状态下岩石和高围压状态下岩石破碎坑深度变化曲线

在岩体的 XOZ 断面选任意一条平行于 X 轴的直线,沿径向在该直线上依次取单元 E61861、

E38081、E38459、E38461,如图 7 所示,来研究不同射流速度下高围压岩石的破碎损伤情况。

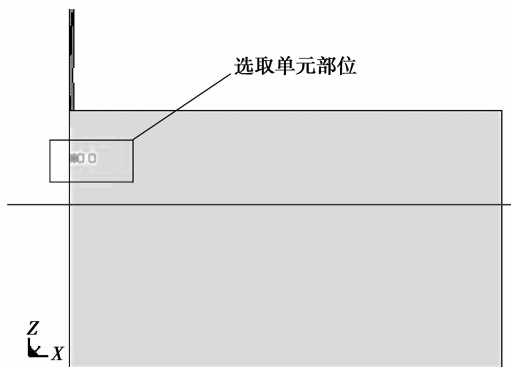


图 7 在 X-Z 投影图上所取单元示意图

损伤是由塑性体积应变、等效塑性应变及压力决定的,图 8 为单元 E61861、E38081、E38459、E38461 在不同射流速度冲击下的损伤演化情况(单元破坏失效后不再显示),可以看出 E38459、E38461 损伤量始终较小,因为根据圣维南原理在射流直径 10 倍以上的岩石冲击区域受影响很小,故不足以对岩石较大损伤。单元 E38459 在处于 300、400、450 和 500 m/s 射流下发生损伤的时间分别在 100、25、20、5 μs ,且射流速度越高单元的损伤变化速率越大,说明射流速度的增大会提高明显射流的破岩效率。根据能量守恒,随着射流速度增大,交换到岩石的能量越高,岩石受到的冲击压力越大,同时射流水楔作用及应力波效应也会相应加强,从而提高对岩石的损伤破碎速率。

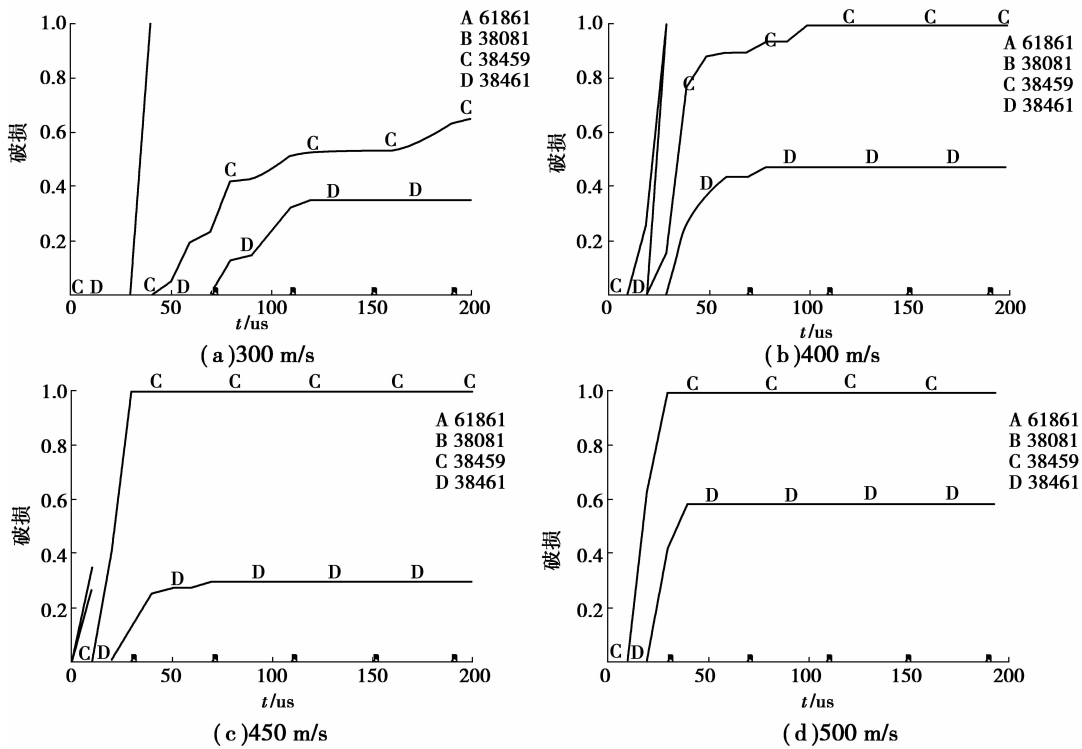


图 8 单元 E61861、E38081、E38459、E38461 在不同速度射流冲击下的损伤演化图

图 9 为不同射流速度下岩石破碎坑深度变化曲线,可以看出随着射流速度的增大,曲线斜率逐渐变大,表明射流速度增大会显著提高射流对岩体破碎效率,与以上分析相一致。从图 9 可以发现随着速度增大,曲线的斜率的变化趋势在减小,这说明仅在一定范围内增大射流速度才能明显提高射流的破岩效率。因为随着射流速度的提高,消耗在射流沿程损耗和克服孔底流体的滞止压力的能量也会随着增加,冲击压力、水楔作用等受到影响,岩石的损伤破碎效率趋于平缓。

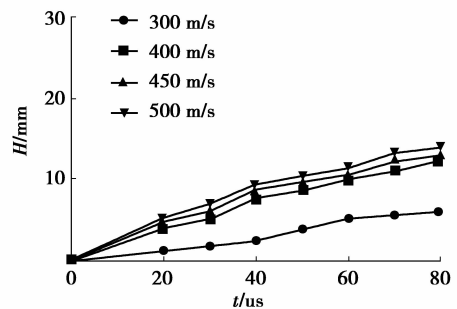


图 9 不同速度射流冲击岩石破碎坑深度变化曲线

3 结 论

考虑到水、空气、岩石3种物质特性及流固耦合问题,运用ALE流固耦合罚函数算法建立了高压水射流冲击岩石的数值模型,由于高压水射流应用于煤矿、石油钻探等工程领域时,岩石多处于高围压状态,在模拟计算时对岩石施加了围压约束,与实际情况更一致。通过模拟高压水射流冲击破碎高围压岩石的过程,分析了高压水射流冲击作用下高围压岩石的损伤演化过程,指出水射流破碎高围压岩石呈阶跃式,高围压会降低岩石沿轴向的损伤演化速率,而对损伤沿径向的演化影响不大。通过分析不同射流速度下4个典型单元的损伤演化过程,指出提高射流速度能明显提高射流破岩效率,并在理论上阐述了射流速度与破岩性能的关系。数值模拟过程避免了理论和实验研究的局限,较好地反映了水射流破碎高围压岩石的物理过程,可用来指导高压水射流破岩理论的进一步研究及应用。

参考文献:

- [1] THOMAS J K. An overview of waterjet fundamentals and applications[M]. St. Louis: Waterjet Technology Association, 2005.
- [2] LUTTERVELT C A. On the selection of manufacturing methods illustrated by an overview of separation techniques for sheetmaterials[J]. Annals of the CIRP, 1989, 38(2): 587-607.
- [3] 沈忠厚. 水射流理论与技术[M]. 东营: 石油大学出版社, 1998.
- [4] 司鸽, 王丹丹, 李晓红. 高压水射流破岩应力波效应的数值模拟[J]. 重庆大学学报, 2008, 31(8): 942-950.
SI HU, WANG DAN-DAN, LI XIAO-HONG. Stress wave effect in numerical simulation on rock breaking under high pressure water jet[J]. Journal of Chongqing University, 2008, 31(8): 942-950.
- [5] 孟筠青, 聂百胜. 磨料水射切割技术在矿山安全中的应用研究[J]. 中国煤炭, 2008, 15(6): 45-50.
MENG YUN-QING, NIE BAI-SHENG. A study on the application of abrasive water jet cutting technology in coal mine work safety[J]. China Coal, 2008, 15(6): 45-50.
- [6] 王瑞和, 倪红坚. 高压水射流破岩机理研究[J]. 石油大学学报: 自然科学版, 2002, 26(4): 118-122.
WANG RUI-HE, NI HONG-JIAN. Reserch of rock fragmentation mechanism with high-pressure water jet [J]. Journal of University of Petroleum, 2002, 26(4): 118-122.
- [7] 王瑞和, 倪红坚. 高压水射流破岩钻孔过程研究理论[J]. 石油大学学报: 自然科学版, 2003, 27(4): 43-48.
WANG RUI-HE, NI HONG-JIAN. Theoretical study on rock break-off process during high-pressure water jet drilling[J]. Journal of University of Petroleum, 2003, 27(4): 44-47.
- [8] 廖华林, 李根生. 超高压水射流冲击岩石的流固耦合分析[J]. 水动力学研究与进展, 2004, 19(4): 452-457.
LIAO HUA-LIN, LI GEN-SHENG. Fluid-structure interaction of high pressure water jets impinging on rock [J]. Journal of Hydrodynamics, 2004, 19(4): 452-457.
- [9] 常宗旭, 郜保平, 赵阳升, 等. 煤岩体水射流破碎机理[J]. 煤炭学报, 2008, 33(9): 983-987.
CHANG ZONG-XU, XI BAO-PING, ZHAO YANG-SHENG, et al. Mechanical of breaking coal by water jet [J]. Journal of China Coal Society, 2008, 33(9): 983-987.
- [10] 倪红坚, 王瑞和, 张延庆. 高压水射流作用下岩石破碎机理及过程的数值模拟研究[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(12): 102-105.
NI HONG-JIAN, WANG RUI-HE, ZHANG YAN-QING. Numerical simulation study on rock breaking mechanism and process under high pressure water jet [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(12): 102-105.
- [11] 廖华林, 李根生, 牛继磊. 淹没条件下超高压水射流破岩影响因素与机制分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(6): 1243-1250.
LIAO HUA-LIN, LI GEN-SHENG, NIU JI-LEI. Influential factors and mechanism analysis of rock breakage by ultra-high pressure water jet under submerged conditions [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(6): 1243-1250.
- [12] 孙清德, 汪志明, 于军泉, 等. 高压水射流破岩规律的数值模拟研究[J]. 岩土力学, 2005(6): 978-982.
SUN QING-DE, WANG ZHI-MING, YU JUN-QUAN, et al. A disquisition on breaking mechanism of high pressure jet impacting on rock [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005(6): 978-982.
- [13] 王勰成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [14] 王建明, 宫文军, 高娜. 基于ALE法的磨料水射流加工数值模拟[J]. 山东大学学报: 工学版, 2010, 40(1): 48-52.
WANG JIAN-MING, GONG WEN-JUN, GAO NA. Numerical simulation for the abrasive water jet machining based on the ALE algorithm [J]. Journal of Shandong University: Engineering Science, 2010, 40(1): 48-52.
- [15] 周宏, 李俊峰, 王天舒. 基于ALE有限元方法的充液

- 刚体耦合动力学仿真[J]. 清华大学学报:工学版, 2008, 48(11):1837-1840.
- ZHOU HONG, LI JUN-FENG, WANG TIAN-SHU. Dynamics simulation of a fluid-filled coupling system using the ALE finite element method[J]. Journal of Tsinghua Univ:Sci & Tech, 2008, 48(11):1837-1840.
- [16] 田保林, 刘妍, 申卫东, 等. 可压缩多介质流动的整 ALE 方法(GALE)[J]. 北京理工大学学报, 2007, 30(5): 623-625.
- TIAN BAO-LIN, LIU YAN, SHEN WEI-DONG, et al. Global arbitrary lagrangian-eulerian method for compressible multimaterial flows [J]. Journal of Shandong University, 2007, 30(5):623-625.
- [17] HOLMQUIST T J, TEMPLETON D W, BISHNOI K D. Constitutive modeling of aluminum nitride for large strain high-strain rate and high-pressure applications [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195: 110-132.
- (编辑 侯 湘)
-
- (上接第 39 页)
- [2] 刁刚田, 刘志华, 周家驹. 复合射孔技术的应用[J]. 钻采工艺, 2003, 26(6):30-33.
- DIAO GANG-TIAN, LIU ZHI-HUA, ZHOU Jia-ju. The application of compound perforation technology[J]. DST, 2003, 26(6):30-33.
- [3] 刘练, 丛宽, 郭玲玲. Stimgun 射孔与 DST 测试联作工艺及其应用[J]. 油气井测试, 2008, 17(5):43-45.
- LIU LIAN, CONG KUAN, GUO LING-LING. Technology about combining operation of stimgun perforation and DST testing and its application [J]. Testing of Oil&Gas field, 2008, 17(5):43-45.
- [4] 郭延亮, 陈锋, 袁吉诚. Stimgun 外套式复合射孔器在塔里木 QL-X 井的应用[J]. 测井技术, 2005, 3(6):. 253-255.
- GUO TING-LIANG, CHEN FENG, YUAN JI-CHENG. Application of Stimgun in Well QL-x in Tarim Oilfield[J]. Well Logging Technology, 2005, 3(6):. 253-255.
- [5] 王艳萍, 黄寅生, 潘永新. 复合射孔技术的现状与趋势[J]. 爆破器材, 2002, 3(6):30-33.
- WANG YAN-PING, HUANG YIN-SHENG, PAN YONG-XIN. Situation and tendency of combined perforating-fracturing techniques [J]. Explosive Materials, 2002, 3(6):30-33.
- [6] 李四江. 复合射孔-测试联作中值得探讨的几个问题[J]. 油气井测试, 2009, 1(2):54-56.
- LI SI-JIANG. Some problems being worth notice about combining operation of compound perforation and well test[J]. Testing of Oil&Gas field, 2009, 1(2):54-56.
- [7] 黄建宁, 卢永宽. 复合射孔技术及在靖安油田的应用效果分析[J]. 油气井测试, 2006, 15(2):48-49.
- HUANG JIANG-NING, LU YONG-KUAN. Perforation and fracturing technology and its treatment effect analysis in the Jing'an Oilfield. Testing of Oil&Gas field, 2006, 15(2):48-49.
- [8] 李东传, 金成福, 余海鹰. 复合射孔器射孔后环空压力分布实验研究[J]. 爆破器材, 2009, 1(2):38-40.
- LI DONG-CHUAN, JIN CHENG-FU, YU HAI-YING. Study on annulus pressure distribution after perforation of composite perforators[J]. Explosive Materials, 2009, 1(2):38-40.
- [9] YANG Z, CROSBY D G, A KGUN F, et al. Investigation of the factors influencing hydraulic fracture in intimation in highly stressed formations[C]//SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, 14-16 April 1997, Kuala Lumpur, Malaysia; EPS38043.
- [10] ZHANG GUANG-QING, CHEN MIAN. Influence of perforation on formation fracturing pressure [J]. Petroleum Science, 2004(1):356-361.
- [11] PAPANASTASIOUS P, ZERVOS A. Three-dimensional stress analysis of a wellbore with perforation and a fracture [C] // SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering, 8-10 July 1998, Frondheim, Norway; SPE47378.
- [12] CROUCH S L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method[J]. Int J Num Methods Eng, 1976(10):301-343.
- [13] JIM GILLIAT, PHILLIP MS, ROBERT H A review of field performance of new propellant[J]. SPE, 2003 (11):239-246.
- [14] FRIANKEL I. Weights influence of viscosity on the capillary of a stretching jet[J]. J Fluid Mech, 1987(2): 26-27.
- [15] BENZLEY, S E. Representation of singularities with isoparametric finite elements[J]. Int J Num Meth Eng, 1974(8):537-545.
- (编辑 张小强)