http://qks.cqu.edu.cn

文章编号:1000-582X(2011)04-078-05

各向同性多孔介质中 Kozeny-Carman 常数的分形分析

徐　鹏,邱淑霞,姜舟婷,江　影
(中国计量学院 理学院,浙江 杭州 310018)

摘　要: Kozeny-Carman (KC) 方程是多孔介质渗流领域最著名的半经验公式,长期以来,KC 方程及其推广形式被广泛用于估算多孔介质的渗透率。但是,方程中的 KC 常数是一个没有确切物理意义的经验常数,且被证明并非一个常数值。天然多孔介质中的孔隙分布往往表现出自相似的分形标度律。因此,根据多孔介质的分形特征利用微观几何模型计算了各向同性多孔介质的有效渗透率,并进一步推导了 KC 常数的解析表达式。结果表明,KC 常数是由多孔介质的微结构决定的,是孔隙率和分形维数的函数,且随着孔隙率的增加而增大。

关键词:多孔介质;Kozeny-Carman 方程;分形;有效渗透率
中国分类号: O359　　**文献标志码:**A

Fractal analysis of Kozeny-Carman constant in the homogenous porous media

XU Peng, *QIU Shu-xia*, *JIANG Zhou-ting*, *JIANG Ying*
(College of Science, China Jiliang University, Hangzhou 310018, Zhejiang, P. R. China)

Abstract: The semi-empirical Kozeny-Carman (KC) equation, the most well-known permeability-porosity relation, is widely used in the field of seepage flow in porous media. However, the physical mechanisms behind the empirical KC constant are not clear, and the KC constant has not been proved to be a constant. The fractal scaling laws of pores have been extensively found in porous media. Therefore, the effective permeability of homogenous porous media is presented and the analytical expression of KC constant is derived based on the fractal characteristics of porous media and the microcosmic geometrical model. The results indicate that the fractal analytical expression of KC constant depends on the micro-structure of porous media. As a function of porosity and fractal dimensions, KC constant increases with the increase of porosity.

Key words: porous media; Kozeny-Carman equation; fractals; effective permeability

Seelheim 于 1880 年提出多孔介质的渗透率和孔隙直径的某些特征量的平方值有关[1]。此后,大量的经验和半经验方程被相继提出,用以预测多孔材料的水力传导系数,其中最著名的则是由 Kozeny[2] 于 1927 年首次提出并由 Carman[3,4] 其后修正的 Kozeny-Carman(KC)方程。KC 方程不仅在地下渗流、油气田开采、化学工程、生物化学和电化学等众多领域被广泛用于估计和预测水力传导系数,而且也是很多渗流模型的基本依据[5-7]。根据 KC 方程,多孔介质的渗透率可以表示为

收稿日期:2010-12-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10947153)
作者简介:徐鹏(1981-),男,中国计量学院博士,主要研究方向为分形理论及其应用,(Tel) 0571-86835749;(E-mail) xupenghust@yahoo.com.cn。

http://qks.cqu.edu.cn

$$K = \frac{\phi^3}{c(1-\phi)^2 S^2}。\tag{1}$$

其中，ϕ 是多孔介质的孔隙率，c 和 S 分别为 Kozeny-Carman 常数和固体相的比表面积。Carman[4] 指出均匀球形颗粒床的 KC 常数为 4.8±0.3，故 KC 常数通常近似为 $c=5$。

KC 方程是一个半经验公式，KC 常数是一个经验常数。迄今为止，KC 方程不断被修正以提高计算精度，Xu 和 Yu 综述了 KC 方程的修正模型及其应用范围[8]。研究表明 KC 常数实际上并非一个常数，且被证明和孔隙率有关[7]。Kyan 等人[9] 发现纤维材料中的 KC 常数依赖于孔隙率并且随孔隙率近乎指数增长；Mathavan 和 Viraraghavan[10] 的研究发现在泥炭层中 KC 常数约为 3.4；Rahli 等人研究了随机单弥散纤维的 KC 常数[11]；Sparrow 和 Loeffler 则理论分析并数值计算了三角和方形排列圆筒间的纵向完全发展层流从而得到 KC 常数[12]；Davies 和 Dollimore 理论推导的 KC 常数只适用于沉降层和流化床[13]；Happel 和 Brenner 用并行和垂直圆筒模型计算了 KC 常数[14]；Costa 根据分形孔隙模型计算了 Kozeny 常数[15]；Eidsath 等人[16] 和 Sahraoui 等人[17] 的数值计算结果都表明 KC 常数先随孔隙率的增加而减小，当达到最小值之后继而随孔隙率的增加而增加。对于多孔介质渗流特性的认识还远远不够，尤其是渗透率和多孔介质几何结构的关联以及 KC 常数的确定仍需要深入研究。笔者将尝试采用分形理论推导多孔介质的有效渗透率并分析 KC 常数。

1　有效渗透率的分形几何模型

分形几何的提出打破了传统欧氏几何的束缚，分形理论为复杂和无规现象的描述提供了一个可行的理论工具。在多孔介质领域，自 Katz 和 Thompson 首次提供实验证据表明沙石样品中的孔隙表现出自相似的分形标度律[18]，分形理论已经被广泛用于描述多孔介质的复杂和随机的几何微结构[19-23]。根据分形几何理论，Yu 等人提出多孔介质中孔隙的累积分布满足以下标度律[22-23]

$$N(\varepsilon \geqslant \lambda) = (\lambda_{\max}/\lambda)^{D_f}。\tag{2}$$

其中 N 是孔隙或毛管的数量，ε 是长度尺度，λ 为孔隙大小，最小和最大孔隙直径分别用 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 表示，孔隙分形维数 D_f 在二维和三维空间的取值范围分别为 $0 < D_f < 2$ 和 $0 < D_f < 3$。由上式可知孔隙的总数为 $N_t = (\lambda_{\max}/\lambda_{\min})^{D_f}$。由于通常多孔介质中，孔的数目非常巨大，所以方程(2)可以近似认为是连续可微函数。对方程(2)微分可得尺度分布在 $\lambda \sim \lambda + \mathrm{d}\lambda$ 之间的孔隙数目

$$-\mathrm{d}N = D_f \lambda_{\max}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)} \mathrm{d}\lambda。\tag{3}$$

根据孔隙分布的概率密度函数的归一化条件，Yu 等人提出多孔介质能否用分形理论和方法处理的判据为[23]

$$(\lambda_{\min}/\lambda_{\max})^{D_f} = \xi^{D_f} = 0。\tag{4}$$

流体通过多孔介质中直径为 λ 长为 l_t 的毛细管通道时的流量 $q(\lambda)$ 满足修正的 Hagen-Poiseulle 方程：

$$q(\lambda) = \frac{\pi\lambda^4}{128\mu}\frac{\Delta p}{l_t}。\tag{5}$$

式中 μ 为流体的粘性系数，Δp 是毛管两端的压力差。建立如图 1 所示的分形毛管束模型，由方程(3)可得，通过某个单元截面 A 的总流量 Q 为：

$$Q = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} q(\lambda)\mathrm{d}N(\lambda) = \frac{\pi}{128\mu}\frac{\Delta p}{l_t}\frac{D_f}{4-D_f}\lambda_{\max}^4。\tag{6}$$

联立 Darcy 定律可得分形多孔介质的有效渗透率为：

$$K = \frac{\mu l_0 Q}{\Delta p A} = \frac{\pi}{128}\frac{D_f}{4-D_f}\frac{1}{l_t/l_0}\frac{\lambda_{\max}^4}{A}。\tag{7}$$

式中 l_0 为流线的直线距离(图 1)。迂曲度可以定义为 $\tau = T^2 = (l_t/l_0)^2$，则上式可以表示为：

$$K = \frac{\pi}{128T}\frac{D_f}{4-D_f}\frac{\lambda_{\max}^4}{A}。\tag{8}$$

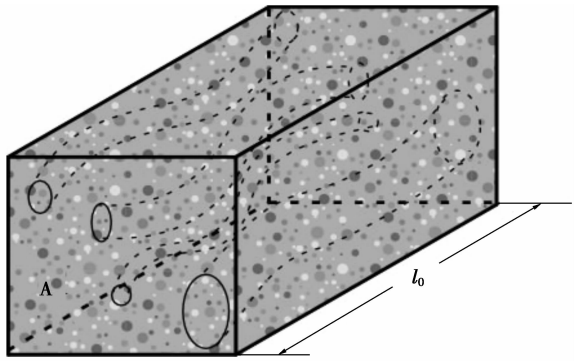

图 1　多孔介质的分形毛管束模型示意图

将孔隙的横截面近似为圆形，根据孔隙的分形标度律可得其总面积

$$A_p = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\pi}{4}\lambda^2 \mathrm{d}N = \frac{\pi D_f \lambda_{\max}^2}{4(2-D_f)}\left[1-\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^{2-D_f}\right]。\tag{9}$$

Yu 和 Li 根据精确自相似的 Sierpinski carpets 得到分形多孔介质的孔隙率和分形维数的关系[22]：

$$\phi = (\lambda_{\min}/\lambda_{\max})^{D-D_f}。\tag{10}$$

其中 D 为多孔介质所在的空间欧氏维数，在当前准三维的分形毛管模型中，欧氏空间维数 $D=2$，而孔隙分形维数 $0 < D_f < 2$。因此，孔隙的总面积可以进一步表示为

http://qks.cqu.edu.cn

$$A_p = \frac{\pi D_f \lambda_{\max}^2}{4(2-D_f)}(1-\phi)。 \tag{11}$$

则单元的总横截面面积为

$$A = \frac{A_p}{\phi} = \frac{1-\phi}{\phi}\frac{\pi D_f \lambda_{\max}^2}{4(2-D_f)}。 \tag{12}$$

将方程(12)代入方程(8)可得多孔介质的有效渗透率为

$$K = \frac{1}{32T}\frac{2-D_f}{4-D_f}\frac{\phi}{1-\phi}\lambda_{\max}^2。 \tag{13}$$

至此,得到了各向同性多孔介质的有效渗透率的解析表达式,该方程不包含经验常数,且每一项都具有确切的物理意义。从方程(13)可知,有效渗透率取决于多孔介质的微结构,是迂曲度、分形维数以及孔隙率的函数。需要指出的是,上述孔隙率为有效孔隙率。迂曲度虽然具有明确的物理意义,但是目前没有较为统一的解析形式。根据方程(13)可得无量纲渗透率

$$K^+ = K/\lambda_{\max}^2 = C_f\frac{\phi}{1-\phi}。 \tag{14}$$

其中系数 $C_f = (2-D_f)/[32T(4-D_f)]$ 只和分形维数以及迂曲度相关。

2 Kozeny-Carman 常数的分形分析

为了推导 KC 常数的解析形式,本节将对上一节中的有效渗透率进一步计算。图 2 显示了最大孔隙的颗粒排列单元,图中固体相(颗粒)的面积为 $\pi d^2/4$,因此单元面积 A_u 可以表示为

$$A_u = \pi d^2/4(1-\phi)。 \tag{15}$$

其中 d 为颗粒的平均直径。如果将最大孔隙等效成一个圆形孔隙,则最大孔隙面积

$$A_{\max} = \pi\lambda_{\max}^2/4 = A_u - \pi d^2/4 = \pi d^2\phi/[4(1-\phi)]。 \tag{16}$$

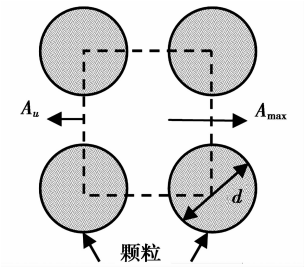

图 2 最大孔隙的颗粒排列示意图

因此,最大孔隙直径和颗粒平均直径有如下关联

$$\lambda_{\max} = d[\phi/(1-\phi)]^{1/2}。 \tag{17}$$

将方程(17)代入方程(13)可得:

$$K = \frac{2-D_f}{32T(4-D_f)}\frac{\phi^2}{(1-\phi)^2}d^2。 \tag{18}$$

由于 Kozeny-Carman 方程还可以表示成[6]

$$K = \frac{\phi^3}{36c(1-\phi)^2}d^2。 \tag{19}$$

将渗透率的分形解(方程(18))和 Kozeny-Carman 方程(方程(19))相对比可得 KC 常数:

$$c = \frac{8T(4-D_f)}{9(2-D_f)}\phi。 \tag{20}$$

方程(20)给出了 KC 常数的解析形式,很明显,KC 常数并不是一个常数,而是和多孔介质的微结构有直接的关联。需要指出的是,分形维数 D_f 和孔隙率 ϕ 并不是两个完全独立的参数,二者有着紧密的联系(方程(10))。

3 结果和讨论

方程(13)给出了分形多孔介质有效渗透率的解析形式,而且渗透率决定于多孔介质的几何微结构。有效渗透率和分形维数 D_f 和孔隙率 ϕ 以及最大孔隙尺寸 $\lambda_{\max}$ 有关。值得注意的是三者并不是完全独立的参数,而是通过方程(10)有机地联系起来。在实际应用过程中,孔隙率和最大孔隙尺寸可以直接测得,而分形维数可以通过图像处理根据计盒法计算而知。从表 1 可知,相比较 Kozeny-Carman 方程的预测值,分形方法的预测值和实验数据更为符合[24]。在计算有效渗透率的过程中,首先确定 ξ 值。实践中,通常多孔介质[22-23]中 $\xi<10^{-2}$,因此以下讨论分别以 $\xi=0.01$ 和 $\xi=0.001$ 为例,然后根据方程(10)可以计算相应的分形维数。迂曲度没有较为统一的解析形式,其取值范围一般在 1.56～3.2 之间[6],因此将迂曲度假设为常数[4] $\tau=2.0$。进而可以根据方程(14)计算无量纲有效渗透率。图 3 显示了分形维数和无量纲有效渗透率与孔隙率之间的定量关系。如图所示,分形维数随着孔隙率的增加而增大,而且当孔隙率接近 1 时分形维数趋近于 2。无量纲有效渗透率也是随孔隙率的增加而增大,这是和实际渗流过程相符合的。这是因为分形维数反映了孔隙在二维空间的填充情况,随着分形维数趋近于整数 2 孔隙几乎填充整个空间(孔隙率接近 1),此时多孔介质的渗透率取极大值。此外,在双对数坐标系,无量纲有效渗透率和孔隙率存在线性标度律,拟合标度指数为 0.72 和 0.69。

表 1 有效渗透率的预测值和实验结果的对比

孔隙率	渗透率×10^{-10}/m^2		
	实验	Kozeny-Carman 方程	分形模型
0.46	0.267	0.119	0.211
0.52	2.235	1.356	1.810
0.54	3.078	6.615	4.206

图 4 总结归纳了 KC 常数的各种模型和预测

http://qks.cqu.edu.cn

值。很明显，大量的研究结果都显示 KC 常数并非常数，而且和孔隙率存在密切的关联，但是二者的定量关系却因人而异。除了研究方法和手段的差异外，介质属性是造成结果巨大差异的主要原因。换言之，目前的大部分研究结果只适用于某种特定的材料(介质)。在孔隙率较小时($0.1<\phi<0.2$)，分形预测结果和 Sullivan 的实验结果[25]较为符合；在 $0.2<\phi<0.3$，分形预测结果和 Sparrow 等人[12]和 Devies 等人[13]以及 Happel 等人[14]的理论结果十分接近；而当孔隙率在 0.4 附近时，分形预测值接近于经典 KC 常数值；当孔隙率在 0.5 附近时，分形模型预测值和 Kyan 等人[9]以及 Sahraoui 等人[17]的预测值较为接近，但变化趋势相反；当孔隙率较大时，各模型相差较大，分形预测结果显示，此时，KC 常数随孔隙的增加而快速增大。

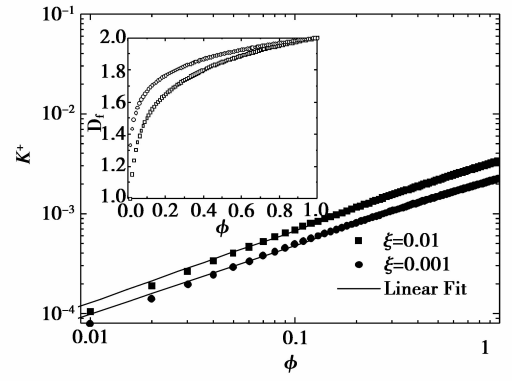

图 3　无量纲有效渗透率和孔隙率的定量关联(小图为分形维数和孔隙率的关系)。

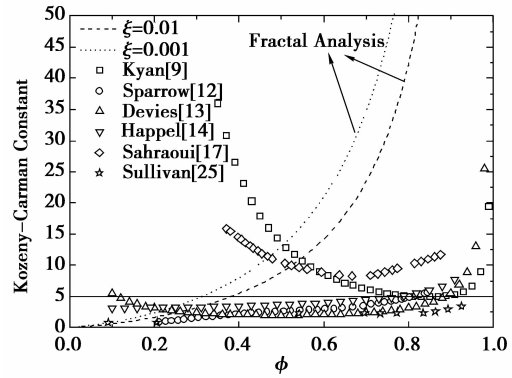

图 4　Kozeny-Carman 常数值的比较。

4　结　论

采用分形几何理论推导了各向同性多孔介质的有效渗透率并在此基础上得到了 Kozeny-Carman 常数的解析表达式。结果显示分形维数随着孔隙率的增加而增大，各向同性多孔介质的无量纲有效渗透率和有效孔隙率之间存在线性标度关系，且标度指数取决于多孔介质的微结构。KC 常数值并非一个常数，而是和多孔介质的几何微结构有着密切的关联。KC 常数的值随着孔隙率的增加而增大，在孔隙率为 0.4 附近时，分形预测值接近于经典值。尽管本文给出了有效渗透率以及 KC 常数的解析形式，但是该结果是在忽略迂曲度以及其它非线性因素的前提下得到，为了进一步深入研究 KC 方程和 KC 常数，需要将迂曲度和流体以及流动的非线性因素(比如湍流情况、非牛顿流体等等)考虑到模型中。

参考文献：

[1] SEELHEIM F. Methoden zur Bestimmung der Durchlassigkeit des Bodens [J]. Zeitschrift für analytische Chemie, 1880, 19(1): 387-402.

[2] KOZENY J. üeber kapillare Leitung des Wassers im Boden[J]. Sitzungsber. Wien, Akad. Wiss., 1927, 136(2a): 271-306.

[3] CARMAN P C. Fluid flow through granular beds[J]. Transactions of the Institution of Chemical Engineers, 1937, 15: 150-167.

[4] CARMAN P C. Flow of gases through porous media [M]. London: Butterworths, 1956.

[5] CHOA S H, COLINC F, SARDINB M, et al. Settling velocity model of activated sludge[J]. Water Research, 1993, 27(7): 1237-1242.

[6] BEAR J. Dynamics of fluid in porous media[M]. New York: Elsevier, 1972.

[7] KAVIANY M. Principles of heat transfer in porous media[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[8] XU P, YU B M. Developing a new form of permeability and Kozeny-Carman constant for homogeneous porous media by means of fractal geometry[J]. Advances in Water Resources, 2008, 34(1): 74-81.

[9] KYAN C P, WASAN D T, KINTNER R C. Flow of single-phase fluids through fibrous beds[J]. Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, 1970(4): 596-603.

[10] MATHAVAN G N, VIRARAGHAVAN T. Coalescence/filtration of an oil-in-water emulsion in a peat bed[J]. Water Research, 1992(1), 26: 91-98.

[11] RAHLI O, TADRIST L, MISCEYIC M, et al. Fluid flow through randomly packed monodisperse fibers: the Kozeny-Carman parameter analysis [J]. Journal of Fluids Engineering, 1997, 119(1): 188-192.

[12] SPARROW E M, LOEFFLER A L. Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in regular array[J]. AIChE Journal, 1959, 5(3): 325-330.

[13] DAVIES L, DOLLIMORE D. Theoretical and experimental values for the parameter k of the Kozeny-Carman equation as applied to sedimenting suspensions [J]. Journal of Physics D, 1980, 13(11): 2013-2020.

[14] HAPPEL J, BRENNER H. Low Reynolds number

http://qks.cqu.edu.cn

hydrodynamics: with special applications to particulate media[M]. Vol 1. The Hague: Nijhoff, 1986.

[15] COSTA A. Permeability-porosity relationship: A reexamination of the Kozeny-Carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption [J]. Geophysical research letters, 2006, 33: L02318.

[16] EIDSATH A, CARBONELL R G, WHITAKER S, et al. Dispersion in pulsed systems-III, comparison between theory and experiments in packed beds[J]. Chemical Engineering Science, 1983, 38 (11): 1803-1816.

[17] SAHRAOUI M, KAVIANY M. Slip and no-slip boundary condition at interface of porous plain media [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1992, 35(4): 927-943.

[18] KATZ A J, THOMPSON A H. Fractal sandstone pores: implications for conductivity and pore formation [J]. Physical Review Letters, 1985, 54(12): 1325.

[19] MAJUMDAR A. Role of fractal geometry in the study of thermal phenomena[J]. Annul Reviews of Heat Transfer, 1992, IV: 51-110.

[20] 张新铭,彭鹏,王金灿. 基于分形理论的石墨泡沫新材料导热系数[J]. 重庆大学学报,2004,27(9): 109-111.
ZHANG XIN-MING, PENG PENG, WANG JIN-CAN. E ffective EF thermal conductivity of a new material of graghite foam based on fractal theory[J]. Journal of Chongqing University, 2004, 27 (9): 109-111.

[21] ADLER P M, THOVERT J F. Real porous media: Local geometry and macroscopic properties[J]. Applied Mechanics Reviews, 1998, 51(9): 537-585.

[22] YU B M, LI J H. Some fractal characters of porous media[J]. Fractals, 2001, 9(3): 365-372.

[23] YU B M, CHENG P. A fractal permeability model for bi-dispersed porous media[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, 45(14): 2983-2993.

[24] CHEN Z Q, CHENG P, ZHAO T S. An experimental study of two phase flow and boiling heat transfer in bi-dispersed porous channels [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2000, 27 (3): 293-302.

[25] SULLIVAN R R. Specific surface measurement on compact bundles of parallel fibers [J]. Journal of Applied Physics, 1942, 13(11): 725-730.

(编辑 张小强)

(上接第 77 页)

[5] 吴世跃,张美红,郭勇义.单井间歇注气开采煤层气生产过程分析[J]. 太原理工大学学报,2008,38(2): 148-150.
WU SHI-YUE, ZHANG MEI-HONG, GUO YONG-YI. Production procession analysis of coalbed methane by intermittent gas injection into single-well [J]. . Chinese Joural of Taiyuan University of Scicence and Technology, 2008,38(2):148-150.

[6] 张力,郭勇义,吴世跃,等. 煤层气渗流方程数值分析[J]. 煤炭科学技术,2001,29(10):40-42.
ZHANG LI, GUO YONG-YI, WU SHI-YUE, et,al. Numerical value analysis of coal bed methane influent equation[J]. 2001,29(10):40-42.

[7] 孙可明. 低渗透煤层气开采与注气增产流固耦合理论及其应用[D]. 辽宁:辽宁工程技术大学,2003. 12.

[8] 孙可明. 煤层气注气开采多组分流体扩散模型数值模拟[J]. 辽宁工程技术大学学报,2005,24(3):305-308.
SUN KE-MING. Model and numerical simulation about multispecies fluic diffusion and seepage in exploitation methane by gas jnjection [J]. Journal of Liaoning Technical University, 2005,24(3):305-308.

[9] 孙可明,梁冰,潘一山. 流固耦合作用下注气开采煤层气增产规律研究[J]. 科学技术与工程,2006,6(7): 802-813
SUN KE-MING. LIANG BIN, PAN YI-SAN. Study of exploitation coalbed methane by gas injection in fluid-solid couping flow [J], Science Technology and Engineering, 2006,6(7):802-813.

[10] 张宛君,邰英楼. 煤层气注井开采数值模拟[J]. 辽宁工程技术大学学报,2009,28(9):289-291.
ZHANG WAN-JUN, TAI YING-LOU. Numerical simulation of coal-bed methane note well exploitation [J]. Journal of Liaoning Technical University, 2009,28 (9):289-291.

[11] 高远文,姚艳斌,郭广山. 注气提高煤层气采收率研究进展[J]. 资源与矿业,2007,9(6):105-108.
GAO YUAN-WEN, YAO YAN-BIN, GUO GUANG SHAN. Study advances on coalbed methane recovery viagas injection[J]. Resources indestries, 2007,9(6): 105-108.

[12] 叶建平,冯三利,范志强,等. 沁水盆地南部注二氧化碳提高煤层气微型先导性试验研究[J]. 石油学报,2007, 28(4):77-80.
YE JIAN-PING FENG SAN-LI, FAN ZHI-QIANG, et, al. Micro-pilot test for enhanced coalbed methane recovery by injecting carbon dioxide in south part of Qinshui basin[J]. Acta Petroei Sinica, 2007, 28(4): 77-80.

[13] K. C. 巴斯宁耶夫,A. M. 费拉索夫,B. M. 马克西莫夫. 地下流体力学[M]. 北京:石油工业出版社,1992.

(编辑 张小强)