

文章编号:1000-582X(2011)06-001-08

电场计算的快速多极子预条件高阶边界元法

张占龙¹, 邓 军¹, 朱祯海¹, 肖冬萍, 李德文¹, 胡 强², 何 为¹, 郭 伟³

(1. 重庆大学 输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室, 重庆 400044;

2. 重庆电力公司南坪供电局, 重庆 400060; 3. 山西省电力公司平顺供电局, 山西 太原 047400)

摘 要:针对多介质工频电场计算中低阶边界元法及预条件(GMRES)法的计算精度低及计算成本高的不足,在低阶边界元法基础上引入高阶边界元和快速多极子法,提出了一种用于求解三维电场分布的快速多极子预条件 GMRES 高阶边界元法。建立了三维电场计算高阶边界元模型,阐述了快速多极子预条件 GMRES 高阶边界元法基本原理和具体实现方法;通过双介质实验模型进行了方法验证,并基于 500 kV 变电站部分关键设备的三维电场计算,表明该方法在电场计算精度及在内存消耗和计算时间上均比预条件 GMRES 法有明显的优势。最后将计算结果与实际测量值进行了比较,该方法的计算结果与测量值最大相对误差为 8.65%,该方法更适合于分析变电站这种大尺度多介质环境下的工频电场分布。

关键词:高阶边界元;变电站;快速多极子;工频电场

中图分类号:TM151

文献标志码:A

Fast multi-pole preconditioned GMRES high order boundary element method for power frequency electric field of multi-medium

ZHANG Zhan-long¹, DENG Jun¹, ZHU Zhen-hai¹, XIAO Dong-ping¹,

LI De-wen¹, HU Qiang², HE Wei¹, GUO Wei³

(1. State Key Laboratory of Power Transmission Equipment & System Security and New Technology, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China;

2. Nanping Power Supply Bureau, Chongqing Power Company, Chongqing 400060, P. R. China;

3. Pingshun Power Supply Bureau, Shanxi Power Company, Taiyuan 047400, Shanxi, P. R. China)

Abstract: In order to improve the computational accuracy and cost for multi-medium power frequency electric field (PFEF) solved by low order boundary element method (BEM) and preconditioned generalized minimal residual (GMRES), a hybrid technique combining the high order BEM and fast multi-pole (FM) method has been introduced to low order BEM. The FM preconditioned GMRES high order BEM is proposed to solve three dimension electric field distribution. The high order BEM model for three dimension electric field distribution is built, and the basic principles and implementation steps of the FM preconditioned GMRES high order BEM are given. The higher accuracy has verified in two medium test models. Part key

收稿日期:2010-12-02

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50877082);输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室自主研究课题(2007DA10512708304);输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室访问学者基金项目(2007DA10512709408)

作者简介:张占龙(1971-),男,重庆大学副教授,博士,研究方向为电磁兼容与故障检测、数字仪器设备、计算机测量与控制,(E-mail)zhangzl@cqu.edu.cn。

devices in 500 kV substation is carried out to demonstrate that FM preconditioned GMRES high order BEM is much faster and more efficient than the preconditioned GMRES BEM in the computational cost and the storage of computer. The simulation values of this method are compared with measured values in 500 kV substation. It is found that the max relative error is 8.65%, so this method is suggested for use in large-scale and multi-medium PFEF problems.

Key words: boundary element; substation; fast multi-pole; power frequency electric field

由于变电站内多种关键电气设备的存在,变电站工频电场的求解是一个在无限区域中由多种介质共同作用的复杂问题,边界元法具有降低问题的维数和计算精度较高等显著特点,其中常数边界元法因计算方便而应用于电场计算^[1-3],但由于该方法中电场分布间断,为取得收敛结果需要加密网格导致内存消耗巨大。高阶边界元法采用在单元上假定电场以二次或更高阶方式分布,从而可以用较少单元精确地描述边界几何形状和未知量分布,得到收敛的结果,离散后生成的边界元电位系数矩阵为满阵,使得存储量大、迭代收敛速度慢。虽然预条件 GMRES 法是提高求解该类稠密的边界元法方程组速度的有效算法,目前已应用到许多领域,如可以提高电磁散射问题的计算效率^[4-5];可加速解决微带电路、分岔检测和终端的图像匹配等方面的问题,缩短求解时间^[6-8]。但是预条件 GMRES 法在计算矩阵与向量的乘积上需要花费大量的计算成本,相应的快速多极子方法可以提高矩阵于向量乘积的计算效率和降低计算内存消耗。如快速多极子边界元计算方法可以在几个小时内求解上百万的二维电场计算^[9-10];可加速边界元解决三维静态和动态的裂痕问题,缩短求解时间^[11-15];在模拟计算复合材料刚性夹杂问题,几小时可求解未知量上千万的问题^[16-17]。

笔者基于高阶边界元提高计算精度的优点及引入快速多极子方法提高预条件 GMRES 中矩阵与向量乘积速度提出了快速多极子预条件 GMRES 高阶边界元法,用于解决求解变电站关键设备工频电场时由运算量所引起的瓶颈现象以及进一步改善预条件 GMRES 法的计算效率和计算成本。文中阐述了变电站电场分布计算的高阶边界元原理,引入快速多极子法提高计算边界元法的系数矩阵与未知向量的效率,并给出了快速多极子高阶边界元法的具体实现;通过快速多极子提高预条件 GMRES 法中矩阵与向量的乘积从而进一步改善计算效率;最后通过球形电容模型的验证和计算实例,表明该新方法对于求解变电站工频电场分布具有很大的优势和前景。

1 多介质工频电场计算的高阶边界元原理

变电站内包含有很多的关键设备,例如绝缘支柱、避雷器、开关等设备,以及水泥或者金属支柱、金属框架等支撑物,当有一定工频电压作用在变电站内导体上,这些关键设备将产生变电站内空间工频电场。因此变电站关键设备工频电场的计算将是多介质共存的电场问题。除了加强边界 Γ_u 与自然边界 Γ_q 之外,还有由介质 i 与介质 j 相互接触而产生的交界面,记作介质交界面 Γ_{ij} ,统称为 Γ_p ,因此描述变电站关键设备工频电场问题的拉普拉斯方程及其边界条件为

$$\epsilon_k \nabla \varphi^2 = 0, \text{ 在 } \Omega_k (k = 1, \dots, m) \text{ 中}; \quad (1)$$

$$\varphi = \varphi_c, \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上}; \quad (2)$$

$$q = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = q_c, \text{ 在 } \Gamma_q \text{ 上}; \quad (3)$$

$$\varphi_i = \varphi_j, \text{ 在 } \Gamma_{ij} \text{ 上}; \quad (4)$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_i} = \epsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_j}, \text{ 在 } \Gamma_{ij} \text{ 上}. \quad (5)$$

其中: φ 为电势; ϵ_k 为区域 Ω_k 的介电常数; n_i 为介质交界面处由 Ω_i 指向 Ω_j 的单位法向,式(4)和(5)统称为连续性条件。应用格林公式及拉普拉斯方程基本解的性质,带混合边界条件的拉普拉斯方程可转化为如式(6)的积分方程。

$$C(x)\varphi(x) + \int_{\partial\Omega} F(x,y)\varphi(y)dS(y) = \int_{\partial\Omega} G(x,y)q(y)dS(y). \quad (6)$$

当源点 x 位于 Ω 边界内时,系数 $C(x)$ 等于 1;当源点 x 位于 Ω 边界上时,系数 $C(x)$ 等于 1/2;当源点 x 位于 Ω 边界外时,系数 $C(x)$ 等于 0。 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 分别是 x 和 y 点的电势; $q(y) = \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n(y)}$; $n(y)$ 表示在场点 y 的外法线方向; $G(x,y)$ 是三维空间电场 Laplace 方程的基本解; Ω_k 是包围第 k 种介质的边界; $F(x,y) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)}$; m 为介质的总数。

利用常用的高阶单元方法对电场计算区域的边

界离散成 N_E 个二次三角形 6 节点等参单元得到 N 个节点,根据等参单元定义,通过单元节点的形状函数 $N_i(\xi, \eta)$ 能够将单元内任一点 (ξ, η) 的几何坐标 x_m 、电位 φ 和电位导数 q 等物理量表达为单元结点值 $(x_{mi}, \varphi_i$ 和 $q_i)$ 的函数,如式(7)所示

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta) \varphi_i, \\ q(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta) q_i, \\ x_m(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta) x_{mi}, m = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} (7)$$

式(7)中 x_{mi} —等参单元内第 i 个节点在 m 方向上的坐标 (m 取 1、2、3 分别为该节点在直角坐标系下 x 、 y 、 z 方向的分量); φ_i —等参单元内第 i 个节点电位; q_i —等参单元内第 i 个节点电位法向导数; k —高阶单元的节点数。利用离散的节点和单元信息并将式(7)代入式(6)得到式(8)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x_j)}{2} + \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x_j, y) \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta) \times \\ \varphi_i |J_i(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \\ \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(x_j, y) \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta) \times \\ q_i |J_i(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $|J_i(\xi, \eta)|$ 为 Jacobian 行列式, j 的取值范围是 $1 \sim N$ 。在已知电位 φ 的单元上,变量是电位导数 q ; 在已知电位导数 q 的单元上,变量是电位 φ 。则整理得到离散高阶边界元的线性方程组如式(9)

$$\mathbf{A}_{N \times N} \mathbf{x}_N = \mathbf{b}_N. \quad (9)$$

其中 N 为该求解问题节点总数。

变电站关键设备工频电场给定的边界条件为:

- 1) 变电站内母线距离地面很高,母线上的电位等于相电压值;
- 2) 支柱绝缘子和绝缘子片表面假设电通连续;
- 3) 金属和混凝土支柱表面电通连续,其与大地直接连接,电位为零;
- 4) 变电站内的大地电位的大小为零。

根据以上边界条件可求出边界上所有未知的电位和电位法向导数,将求解结果代入式(9),即可求出电场内所有点的电位。

2 多介质工频电场计算的快速多极子高阶边界元法

对于变电站这种多介质共存大规模计算模型时,利用积分式(8)求解变电站关键设备工频电场分布将是低效率和高存储量的。然而快速多极子法是

通过立方体转移场点、源点之间的相互作用和不必生成系数电位矩阵,从而提高了计算效率和节约了存储量,其基本思想如下。

将求解区域边界按传统的高阶边界元法离散化成二次三角形 6 节点单元,然后将离散单元分到若干树形结构的立方体内,并通过计算三角形单元重心是否处于立方体内来确定单元的归属,若位于立方体表面,则该单元可归属相邻立方体中任意一个所有。对于树结构中同层某 2 个立方体的关系被分为近亲立方体和远亲立方体。如果 2 个立方体表面的交点多于一个则为近亲立方体;反之,为远亲立方体。较少近亲立方体单元间的相互作用仍采用直接法计算,而大量远亲立方体单元间的相互作用通过快速多极子法进行计算,如图 1 以二维为例。首先聚合树结构中最高层立方体内所有单元在各自体中心的贡献;然后逐层向上聚合各立方体中心的贡献到上一层立方体中心;接着逐层向下转移远亲立方体贡献和发散低层立方体中心贡献到高层立方体中心。该算法用立方体转移场点、源点间相互作用的处理方法提高了计算效率;不必生成系数矩阵从而降低了内存消耗;积分时还是用传统边界元法解决,与传统边界元法相比并未增加计算复杂度。最后采用迭代法获得离散化后积分方程的解。快速多极子加速高阶边界元的具体执行是从式(6)格林函数的多极展开开始。

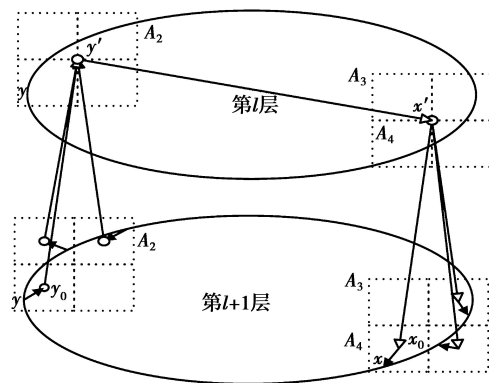


图 1 快速多极子法原理

2.1 树结构最高层的多极子展开

以式(6)格林函数 $G(x, y)$ (三维空间电场 Laplace 方程的基本解)在球坐标系下的复数域的泰勒级数展开式(10)为基础^[18]。

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|} \cong \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^p \sum_{m=-l}^l R_{lm}(y, y_0) \times S_{lm}(x, y_0) |yy_0| < |xy_0|. \quad (10)$$

p 和 y_0 是多极子级数展开的阶数和中心, R_{lm}

和 S_{lm} 分别定义为球面调和函数如式(11)

$$R_{lm}(y) = \frac{1}{(l+|m|)!} \rho_y^l P_{lm}(\cos\alpha_y) e^{-im\beta_y},$$

$$S_{lm}(x) = (l-|m|)! \frac{1}{\rho_x^{l+1}} P_{lm}(\cos\alpha_x) e^{-im\beta_x}. \quad (11)$$

式(11)中 $(\rho_i, \alpha_i, \beta_i)$ 为坐标点 i 在球坐标系下的坐标分量, P_{lm} 的定义如式(12)

$$P_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (12)$$

式(12)中 $P_l(x)$ 是 l 阶拉格朗日多项式。因此将式(10)代入式(8)右端积分式计算以 y_0 为展开中心计算 A_1 内所有单元 N_c 在其中心 y_0 的贡献如式(13)

$$\sum_{i=1}^{N_c} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(x_j, y) \sum_{l=1}^k N_l(\xi, \eta) q_l |J_i(\xi, \eta)| d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\beta} \sum_{m=-l}^l M_{lm}(y_0) S_{lm}(x_j, y_0). \quad (13)$$

式(13)中 $M_{lm}(y_0)$ 是以 y_0 为中心的立方体的多极子展开, 其计算方法如式(14)

$$M_{lm}(y_0) = \sum_{i=1}^{N_c} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R_{lm}(y, y_0) \times \sum_{l=1}^k N_l(\xi, \eta) \times q_l |J_i(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (14)$$

2.2 多极聚合

利用式(14)将子层以 y_0 为中心的立方体多极子展开聚合到以 y' 为展开中心的父层, 如式(15)

$$M_{lm}(y') = \sum_{l'=0}^l \sum_{m'=-l'}^{l'} (-1)^n R_{l'm'}(y_0, y') \times M_{(l-l')(m-m')}(y_0). \quad (15)$$

2.3 多极转移

利用式(15)将以 y' 为中心的立方体多极子展开转移到以 x' 为中心的远亲立方体, 如式(16)

$$L_{lm}(x') \cong \sum_{l'=0}^l \sum_{m'=-l'}^{l'} (-1)^n \overline{S_{(l+l')(m+m')}}(x', y') \times M_{l', m'}(y'). \quad (16)$$

2.4 多极配置

利用式(16)将父层以 x' 为中心的立方体多极子展开转移到子层以 x_0 为中心的立方体, 如式(17)

$$L_{lm}(x_0) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} L_{l'm'}(x') R_{(l-l')(m-m')}(x_0, x'). \quad (17)$$

式(14)–(17)中 R_{lm} 和 S_{lm} 的计算方法参见式(11)和(12)中的定义。积分式(8)左端积分项的远亲立方体贡献类似式(13)–(17)的推导方法; 近亲贡献采用常规高阶边界元积分方法计算, 这样式(9)左端矩阵与向量的乘积可重写为式(18)所示。

$$\mathbf{A}_{N \times N} \mathbf{x}_N = \sum_q \sum_{i \in W_q} q_i \mathbf{E}_{ji} + \sum_q \sum_{i \in W_q} \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \times$$

$$R_{n,m}(x, x_0) \times L_{n,m}(x_0). \quad (18)$$

式(18)右端第1项为近亲立方体贡献, 通过直接积分式(8)计算获得; 右端第2项为运用快速多极子算法计算的远亲立方体贡献, 其通过逐层聚合、逐层转移和发散几个典型步骤而获得。这种立方体间转移因子替代各场点、源点间转移因子的处理方法加速了矩阵与矢量的相乘运算, 从而提高了计算效率; 另外根据式(18), 计算中不需预先存储系数矩阵的各单元量, 从而存储需求也大大降低。

3 多介质工频电场计算的快速多极子高阶边界元方法的实现

3.1 模型离散和树结构的形成

类似传统高阶边界元法一样对模型进行网格剖分, 获得各单元和节点信息。用一个大正方体包含整个边界, 这个大正方体称为树结构的零层; 将大正方体分解为8个子正方体, 称为树结构的第一层。这样不断分解, 直到每个正方体中含有的单元数小于预先规定数 N , 此立方体称为叶子结点(图2以二维树结构为例)。树结构中每个立方体将形成如下4个集合。

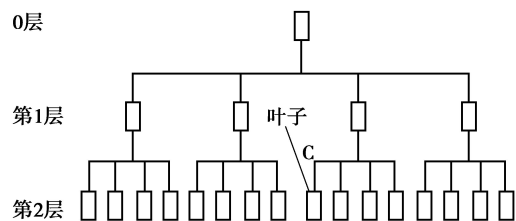


图2 二维树结构

近亲无子集: 第 k 层 C 周围所有的近亲无子立方体。

远亲交互集: 第 k 层与 C 大小一样是远亲立方体, 但是在 $k-1$ 层中与 C 所属的立方体的关系是近亲立方体。

子层无子集: 第 k 层与 C 是近亲立方体, 和大于 k 层中与 C 的子立方体是远亲立方体的无子立方体。

父层无子集: 第 k 层与 C 大小不一样是远亲立方体, 但在 $k-1$ 层中集合4与 C 所在的立方体属于近亲立方体。

3.2 逐层聚合

逐层聚合是指从树结构的叶子结点开始, 逐层向上聚合。首先对于边界上的每一个单元, 以该单元所属的叶子结点的中点作为展开点, 由式(14)计算该单元在叶子节点中心的多极子展开, 并将叶子节点内其他单元在叶子节点中的多极子展开进行累

加,得到该叶子结点内所有单元在叶子中心的多极子展开;然后利用多极聚合关系式(15),从叶子结点开始,将每个结点的多极子展开传递到其父结点中心的多极子展开,直到树结构第二层结点的多极子展开计算完毕为止。

3.3 逐层转移和发散

逐层转移和发散是指从树结构的第二层开始,逐层进行转移和发散。利用多极转移式(16)将该结点的远亲交互集中所有结点的多极子展开转移到该结点中心;然后用多极配置关系式(17)将父结点的多极子展开配置并累加到该结点的多极子展开。

3.4 模型中节点电位的计算

首先利用直接严格积分的关系式计算叶子的近亲无子集对叶子内节点的贡献;然后将叶子中心局部泰勒展开平移到单元内所有的节点上,从而将叶子中心的贡献发散到叶子内节点;最后计算父层无子集对叶子内节点的贡献。分两种情况处理,当父层无子集中的节点数少于 p^2 (p 为多极子展开的阶数)时,利用直接积分计算,否则将父层无子集中先进行聚合,再转移到叶子中心,进行配置而获得。在边界元法迭代求解的每一迭代步中,利用迭代前已经生成的树结构,按照 3.2~3.4 的步骤,更新矩阵与向量的乘积,采用预条件 GMRES(m) 迭代法进行求解。

4 多介质工频电场计算的快速多极子预条件 GMRES(m) 高阶边界元法

对于快速多极子边界元法求解变电站关键设备工频电场时,需要由式(8)计算近亲立方体贡献的电位系数并用矩阵 B 存储,但随着求解问题规模的扩大,近亲立方体贡献的电位系数 B 逐渐呈现病态,导致迭代的收敛速度变慢,甚至发生中断。这样对于边界元求解变电站关键设备工频电场达到一定的计算精度时所需的迭代次数也随之增大,造成 GMRES(m) 迭代法的优势减弱以及快速多极子计算矩阵向量乘积的效率降低。因此,在运用 GMRES(m) 迭代法求解的过程中必须对近亲立方体贡献的电位系数 B 进行有效的预条件处理。

4.1 近亲立方体贡献电位系数 B 的不完全 LU 分解预条件处理

近亲立方体贡献电位系数 B 的不完全 LU 分解预条件处理是基于矩阵 B 的不完全 LU 分解。如果原电位系数矩阵 B 的零元素位置在进行因子分解后成为非零元素,则称为填充元素;如果忽略某些填充元素,则该分解方法称为不完全因子分解,预条件的

效果依赖与矩阵 M^{-1} 和 A^{-1} 的相似程度。一种简单的电位系数矩阵的 ILU 分解是 D-ILU 分解,需要的存储空间少。它不需要进行元素的填充,仅仅改变对角线元素即可。这样,将原矩阵 B 分裂为 $B = DB + LB + UB$ (DB 、 LB 、 UB 分别是 B 对角部分、下三角部分和上三角部分),预条件算子可写成 $M = (D + LB)D^{-1}(D + UB)$, D 为由主元生成的对角矩阵^[20]。

4.2 GMRES(m) 算法实现

采用广义极小残值算法求解线性电位方程组式(8)的重要特点是可以不形成电位系数总矩阵而只用行矩阵求解方程,从而提高了计算速度。其计算步骤如下:

1) 任意取初始值 x_0 , 从 $Mr_0 = b - Ax_0$ 式中求解 r_0 和 $v_1 = r_0 / \|r_0\|$ 。其中 Ax_0 计算如式(18)。

2) 迭代: 取 $j = 1, 2, \dots, m$;

从 $M\omega_j = Av_j$ 式中求解 ω_j ;

$h_{ij} = (\omega_j, v_j) \quad i = 1, 2, \dots, j$;

$$\omega_{j+1} = \omega_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} v_i;$$

$$v_{j+1} = \frac{\omega_{j+1}}{\|\omega_{j+1}\|};$$

其中 Av_j 计算如式(18)。

3) 构造近似解 $x_m = x_0 + V_m y_m$, y_m 使得残值 $J(y)$ ($J(y) = \|\beta x_1 - H_m y_m\|$) 取最小值;

4) 计算 $r_m = b - Ax_m$, 如果满足精度就停止迭代。否则 $x_0 = x_m$, m 为每次迭代后的重新开始参数,这里采用动态变化的 m , $m = \alpha * GMRES(m_{\max}, m_{\min})$ ^[21], 转到 1)。其中 Ax_m 计算如式(18)。

其中 v 为 krylov 向量, H_m 是上 Hessenberg 矩阵, M 为预条件处理矩阵。GMRES(m) 迭代法中出现的矩阵与向量的乘积都用快速多极子计算远亲立方体贡献与预条件处理近亲贡献相加获得。

5 可行性分析

为验证上述方法的有效性,建立的双层介质模型如图 3 所示。

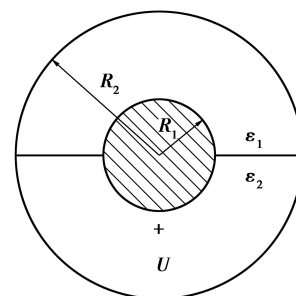


图 3 双介质静电场问题

计算区域是内半径为 $R_1 = 40\text{ m}$, 外半径 $R_2 = 200\text{ m}$ 的同心球组成球形电容器, 两种均匀介质中的电位函数分别满足 Laplace 方程。其介电常数分别是 $\epsilon_2 = 6$ 和 $\epsilon_1 = 3$, 在内、外导体间施加电压 $1\ 000\text{ V}$ 时, 两种介质的分界面满足电位相等和电通连续。其理论值可通过解析法求得如式(19)

$$\varphi(r) = 5\ 000 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{200} \right) \quad (19)$$

快速多极子法预条件 GMRES 高阶边界元与解析法的计算误差变化关系分析如图 4 所示。该方法求解双介质电场问题与解析法的最大相对误差为 3.5% 左右, 说明该算法有着足够的精度用于求解变电站关键设备的工频电场。

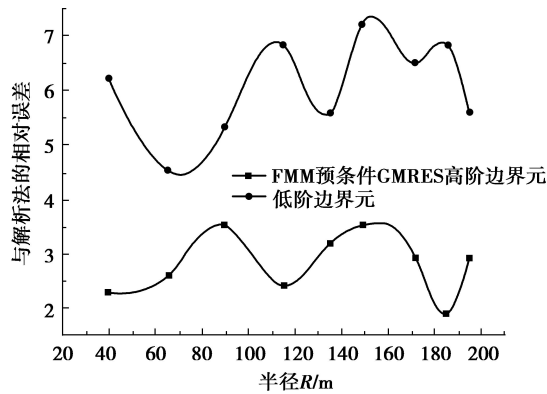


图 4 不同半径上边界元法与解析法的相对误差

6 实例计算与分析

如图 6 为 500 kV 变电站部分关键设备的几何模型。计算的部分关键设备周围空间电场等位线如图 7 所示。

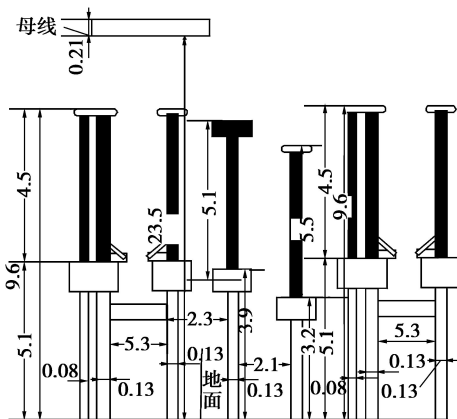


图 6 500 kV 变电站部分关键设备

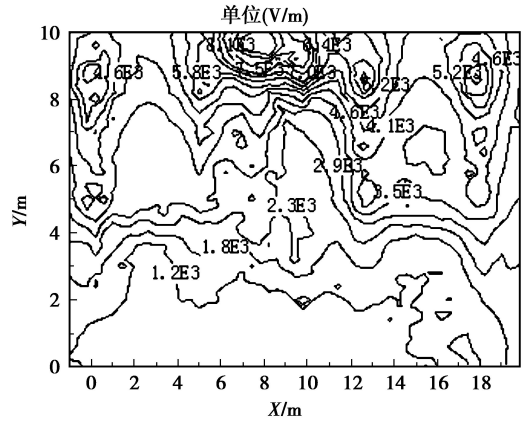


图 7 部分设备周围空间等位线分布

6.1 计算时间与单元数间的变化关系分析

计算时间与单元数间的变化关系分析如图 8 所示。

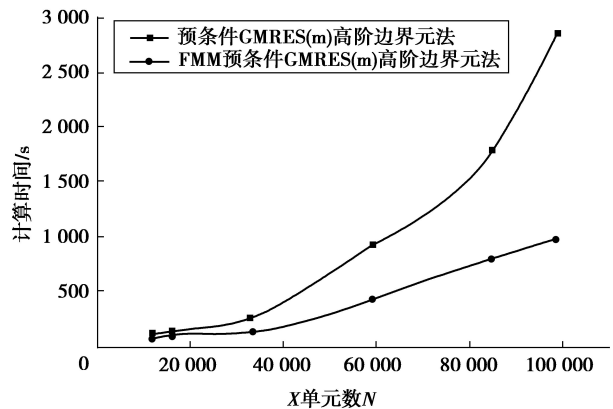


图 8 计算时间与单元数间的变化关系

从图 8 中可以看出, 快速多极子法预条件 GMRES 边界元与预条件 GMRES 边界元的计算时间相比, 其计算效率有很大提高。通过引入快速多极子法到预条件 GMRES 法可以进一步降低计算时间, 具有更好的计算效率。该方法求解大尺度、多介质共存的变电站模型, 有着相当好的计算前景。

6.2 存储量与单元数的关系分析

存储量与单元数的关系分析如图 9 所示。从图 9 中可以看出, 快速多极子法预条件 GMRES 边界元与预条件 GMRES 边界元的存储量相比, 其存储量要求有很大降低。因为在快速多极子计算矩阵向量乘积不需预先计算电位系数总矩阵, 只需形成树结构数据存储, 从而存储量大幅度降低, 结合图 8 发现, 该方法可以大幅度的降低计算成本。

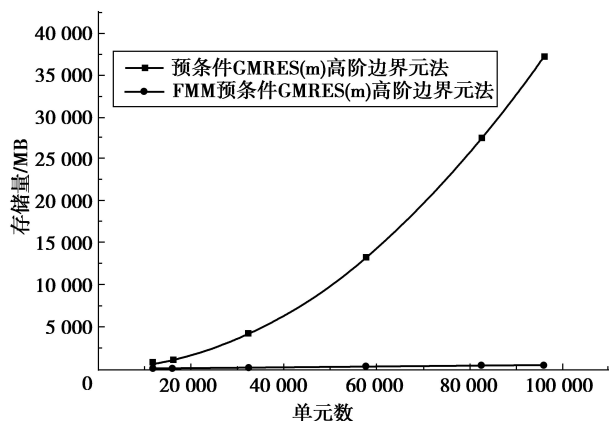


图9 存储量与单元数的变化关系

6.3 计算值与测量值的误差分析

为进一步验证该算法精度的可靠性,利用电场测量仪对500 kV变电站部分关键设备的计算区域内工作走廊上距离地面1.8 m的地方每间隔1.8 m取一个测点上,进行误差比较如表1。

表1 测量值与计算值比较

X 坐标/ m	测量值/ (kV · m ⁻¹)	仿真值/ (kV · m ⁻¹)	相对误差/ %
0.2	1.269	1.193	5.99
2.0	1.169	1.226	4.88
3.8	1.036	0.959	7.43
5.6	1.289	1.307	1.40
7.4	1.311	1.259	3.97
9.2	1.179	1.198	1.61
11	1.256	1.289	2.63
12.8	1.156	1.056	8.65
14.6	1.245	1.197	3.86
16.4	1.356	1.296	4.42
18.2	1.203	1.165	3.16
20	1.039	0.988	4.91

从表1中可知该改进方法与测量值的最大相对误差为8.65%,说明该算法对该区域的电场计算结果基本正确。

7 结论

就适用于求解变电站工频电场问题的快速多极子预条件GMRES高阶边界元法进行了分析,并就实验模型与算例计算进行了比较与分析,结果表明:

在实验模型中,该方法与解析法的计算结果最大相对误差为3.5%左右,说明该方法在变电站关键设备电场分布计算中有着足够的精度。在实际算例模型中,采用快速多极子预条件GMRES边界元法无论在内存消耗和计算时间方法都优越于预条件GMRES法;并将仿真值与测量值进行比较发现,其与测量值的最大相对误差为8.65%,其计算值满足工程误差要求,计算结果基本正确。因此在处理如变电站关键设备的工频电场分布这样大尺度、多未知量问题方面具有相当大优势,是一种很有发展潜力的快速算法。

参考文献:

- [1] LIU Y J. Dual BIE approaches for modeling electrostatic MEMS problems with thin beams and accelerated by the fast multi-pole method [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2006, 30(11):940-948.
- [2] LIU Y J, SHEN L. A dual BIE approach for large-scale modeling of 3-D electrostatic problems with the fast multipole boundary element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 71(7):837-855.
- [3] SHEN L, LIU Y J. An adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional potential problems [J]. *Computational Mechanics*, 2007, 39(6):681-691.
- [4] BUNSEGERSTNER A, GUTIERREZCANAS I. A preconditioned GMRES for complex dense linear systems from electromagnetic wave scattering problems [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2006, 416(1):135-147.
- [5] ZHAO H P, HU J, NIE Z P. Parallel Modified Electric Field Integral Equation with GMRES Solver for Efficient Solution of Scattering from Electrically Large Open Structures [C] // 2007 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference. October 29-November 1, 2007, Salvador, Brazil. [s. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers, [2007-12-26].
- [6] YANG Y, CHEN R S. Numerical simulation of microstrip circuits using unconditional stable CN-FDTD method combined with preconditioned GMRES [C] // International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology, 2008. April 21-21, 2008, Nanjing, China. [s. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers, [2008-06-13].
- [7] SPYROPOULOS A N, PALYVOS J A, BOUDOUVUS A G. Bifurcation detection with the (un)preconditioned

- GMRES(m) [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193 (42/44): 4707-4716.
- [8] BOTROS Y Y, MEMBER S, VOLAKIS J L. Preconditioned generalized minimal residual iterative scheme for perfectly matched layer terminated applications [J]. *IEEE Microwave And Guided Wave Letters*, 1999, 9(2): 45-47.
- [9] NISHIMURA N, LIU Y J. Thermal analysis of carbon-annotate composites using a rigid-line inclusion model by the boundary integral equation method [J]. *Computational Mechanics*, 2004, 35(1): 1-10.
- [10] LIU Y J, NISHIMURA N. The fast multi-pole boundary element method for potential problems—a tutorial [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005, 30(5): 371-381.
- [11] NISHIMURA N. Fast multi-pole accelerated boundary integral equation methods [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 55(4): 299-324.
- [12] YOSHIDA K, NISHIMURA N, KOBAYASHI S. Application of new fast multi-pole boundary integral equation method to crack problem in 3D [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2001, 25 (4/5): 239-247.
- [13] YOSHIDA K, NISHIMURA N, KOBAYASHI S. Application of new fast multipole boundary integral equation method to elastostatic crack problems in three dimensions [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2001, 47A(1): 169-179.
- [14] NISHIMURA N, YOSHIDA K, KOBAYASHI S. A fast multipole boundary integral equation method for crack problems in 3D [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, 23(1): 97-105.
- [15] CHEW W C, CHAO H Y, CUI T J. Fast integral equation solvers in computational electromagnetics of complex structures [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2003, 27(8): 803-823.
- [16] LIU Y J, NISHIMURA N, OTANI Y. Large-scale modeling of carbon-nanotube composites by the boundary element method based on a rigid-inclusion model [J]. *Computational Materials Science*, 2005, 34(2): 173-187.
- [17] LIU Y J, NISHIMURA N, OTANI Y, et al. A fast boundary element method for the analysis of fiber-reinforced composites based on a rigid-inclusion model [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2005, 72(1): 115-128.
- [18] YOSHIDA K. Applications of fast multipole method to boundary integral equation method [D]. Japan: Kyoto University, 2001.
- [19] ZHAO H P, HU J, NIE Z P. Parallel modified electric field integral equation with GMRES solver for efficient solution of scattering from electrically large open structures [C] // *Microwave and Optoelectronics Conference 2007*. October 29–November 1, 2007, Brazil. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers, [2007-12-26].
- [20] MITTAL R C, AL-KURDI AH. An efficient method for constructing an ILU preconditioner for solving large sparse nonsymmetric linear systems by the GMRES method [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, 45(10/11): 1757-1772.
- [21] SABERI NAJAFI H, GHAZVINI H. Weighted restarting method in the weighted Arnoldi algorithm for computing the eigenvalues of a nonsymmetric matrix [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 175(2): 1276-1287.

(编辑 张小强)