

文章编号:1000-582X(2011)08-031-05

# 一类故障六角形蜂窝环的容错哈密尔顿性

董 强<sup>1,2</sup>, 杨小帆<sup>1</sup>, 张春明<sup>1</sup>

(1. 重庆大学 计算机学院, 重庆 400044; 2. 电子科技大学 国家级计算机实验教学示范中心, 四川 成都 611731)

**摘 要:** 并行与分布式系统的性能很大程度上取决于底层互连网络的有效性, 蜂窝网络是并行与分布式应用中很有前景的互连网络。该文研究了一类含有 2 个故障结点的六角形蜂窝环的容错哈密尔顿性, 这 2 个故障结点落在任意长度为 6 的圈的对角处。通过长度为 6 的圈上的边交换操作, 把故障六角形蜂窝环上的 3 个不相交的无故障圈合并为 1 个容错哈密尔顿圈, 从而证明这类故障六角形蜂窝环是哈密尔顿图。该结果揭示了六角形蜂窝环的另 1 个重要的容错性质。

**关键词:** 互连网络; 蜂窝结构; 六角形蜂窝环; 容错; 哈密尔顿圈

**中图分类号:** TP393.03

**文献标志码:** A

## Fault-tolerant hamiltonicity of a class of faulty hexagonal honeycomb tori

DONG Qiang<sup>1,2</sup>, YANG Xiao-fan<sup>1</sup>, ZHANG Chun-ming<sup>1</sup>

(1. College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China;

2. National Computer Experimental Teaching Demonstration Center, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, Sichuan, P. R. China)

**Abstract:** The performance of a parallel and distributed system heavily depends on the effectiveness of the underlying interconnection network. Honeycomb networks are promising candidates for interconnection networks in parallel and distributed applications. This paper addresses the hamiltonicity of a hexagonal honeycomb torus (HHT) with a pair of faulty nodes lying diagonally on a cycle of length 6. We show that such a faulty HHT is hamiltonian by presenting a systematic method for constructing a fault-free hamiltonian cycle. This result reveals another appealing fault-tolerant feature of HHTs.

**Key words:** interconnection networks; honeycomb structures; hexagonal honeycomb torus; fault-tolerance; hamiltonian cycles

并行与分布式系统的性能很大程度上取决于底层互连网络的有效性。与传统的 mesh 和 torus 网络相比, 蜂窝网络具有更小的结点度和更低的实现成本, 所以它被认为是很有前景的互连网络<sup>[1-2]</sup>, 并且得到了广泛的研究<sup>[1-15]</sup>。在各种蜂窝网络中, 高度对称的六角形蜂窝环吸引了较多的研究兴趣。

在评价 1 个互连网络的性能时, 哈密尔顿圈的存在性是 1 个重要的考虑因素, 因为它能够把 1 个

圈结构并行算法有效地映射到这个网络上<sup>[16]</sup>。Megson 等<sup>[8]</sup>证明了六角形蜂窝环含有哈密尔顿圈。

随着互连网络规模的增长, 在 1 个互连网络中存在故障处理器(结点)的可能性也随之增加。因此, 非常有必要去评估 1 个互连网络的容错能力, 也就是这个网络在有故障发生的情况下的运行状况。其中, 故障互连网络的哈密尔顿性是 1 个尤为重要问题。Megson 等<sup>[7]</sup>发现含有 2 个相邻故障结点

收稿日期: 2011-02-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771227); 教育部新世纪优秀人才资助计划(NCET-05-0759)

作者简介: 董强(1984-), 男, 重庆大学博士研究生, 主要从事并行计算机互连网络及其容错研究, (Tel)13637958301; (E-mail)qdong1984@yahoo.com.cn。

的六角形蜂窝环仍然含有哈密顿圈。

研究一类含有 2 个故障结点的六角形蜂窝环的哈密顿性,这 2 个故障结点落在任意长度为 6 的圈的对角处。通过给出在这类故障六角形蜂窝环中构造无故障哈密顿圈的系统的方法,从而证明它们是哈密顿图。结果揭示了六角形蜂窝环的另一个重要的容错性质。

## 1 预备知识

互连网络可以用图  $G = (V, E)$  表示,图中的结点和边分别代表处理器和处理器之间的连接。哈密顿圈就是经过图中每个结点刚好 1 次的圈。含有哈密顿圈的图称为哈密顿图。关于图论中的其他术语和标记,请读者参见文献[17]。

$t$  阶六角形蜂窝环(HHT)是按如下方法构造的图:在平面内把  $1 + 6 + 2 \times 6 + \dots + (t - 1) \times 6$  个六角形紧凑的摆放成一个大的六角形形状,把所有六角形的顶点和边看作是图的结点和边,然后添加  $3t$  条环绕边。图 1 给出了 3 个六角形蜂窝环的示例。一个六角形蜂窝环包含很多长度为 6 的圈(简称“6-圈”),而且它关于每一个 6-圈都是对称的。关于六角形蜂窝环更正式的定义请读者参见文献正文。

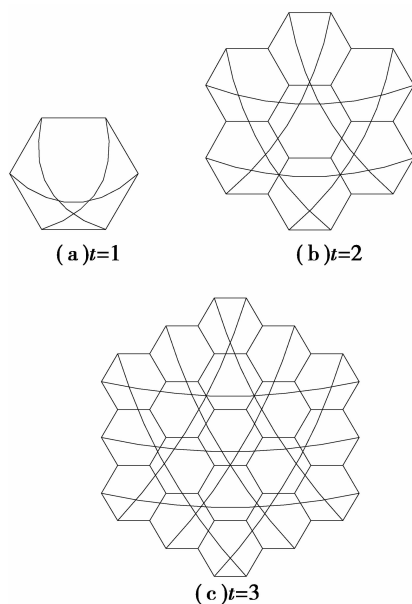


图 1 3 个 HHT 示例

研究含有一对落在任意 6-圈对角处的故障结点的六角形蜂窝环。称这对故障结点所在的 6-圈为故障 6-圈。任务就是在这样的故障六角形蜂窝环中构造无故障哈密顿圈。由于前文提到的对称性,可以根据讨论的需要,任意假定故障 6-圈所在位置。

## 2 哈密顿圈的构造

根据六角形蜂窝环的阶数  $t$  的不同分 3 种情况

进行讨论: $1 \leq t \leq 3, t \geq 4$  并且  $t$  是偶数,  $t \geq 5$  并且  $t$  是奇数。

**情形 1**  $1 \leq t \leq 3$ 。

对于  $1 \leq t \leq 3$  的故障 HHT,假设故障 6-圈在 HHT 的中心位置,并且 2 个故障结点落在同一水平线上。图 2 描绘了它们的容错哈密顿圈。

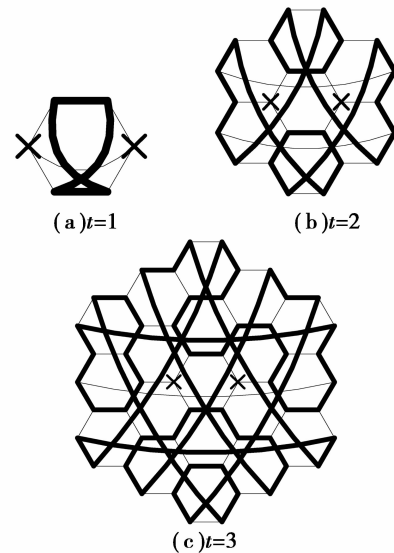


图 2 当  $1 \leq t \leq 3$  时故障 HHT 上的无故障哈密顿圈

**情形 2**  $t \geq 4$  且  $t$  是偶数。

假设故障 6-圈在 HHT 的中心位置,并且 2 个故障结点落在同一水平线上(见图 3c)。给出 1 个构造无故障哈密顿圈边的集合的程序。

程序 EVEN\_HC

输入:偶数  $t \geq 4$ 。

输出:阶为  $t$  的故障 HHT 上无故障哈密顿圈的边的集合  $E$ 。

开始

步骤 1:将集合  $E$  置为空集。

步骤 2:画一条水平辅助线  $H$ ,使得它与  $2t$  条短斜边相交并且最接近于 HHT 的顶部;再画一条水平辅助线  $L$ ,使得它与  $2t$  条短斜边相交并且次接近于 HHT 的底部。

步骤 3:把所有既不与  $H$  相交也不与  $L$  相交的短斜边添加到集合  $E$ 。

步骤 4:把所有的斜环绕边添加到集合  $E$ 。

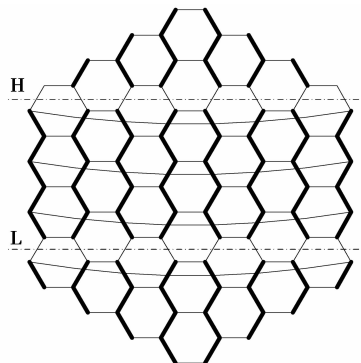
步骤 5:把所有与  $H$  或  $L$  相邻的水平短边和在刚好在  $H$  或  $L$  下方的长环绕边添加到集合  $E$ 。

步骤 6:发现在故障 6-圈上,有 4 条边属于集合  $E$ 。从集合  $E$  中去掉这 4 条边,把另外 2 条边添加到集合  $E$ 。

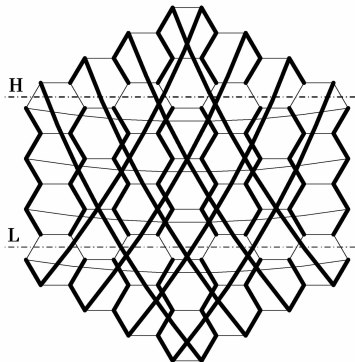
步骤 7:在 HHT 的竖直对称轴左侧并且有 2 条边与  $H$  相交的 6-圈(见图 3d)上,有 3 条边属于集合  $E$ 。从集合  $E$  中去掉这 3 条边,把另外 3 条边添加到集合  $E$ 。

结束

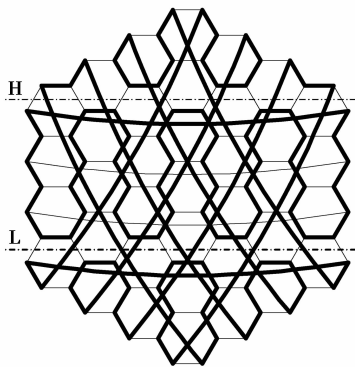
图 3 说明了当  $t = 4$  时程序 EVEN\_HC 的执行过程,图 4 给出了当  $t = 6$  时程序 EVEN\_HC 构造的哈密顿圈。



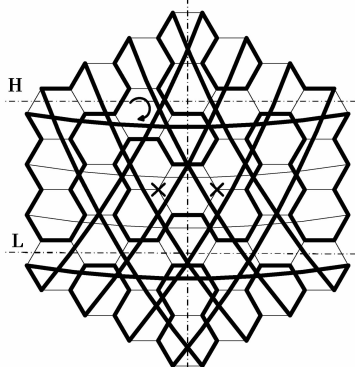
(a)步骤1-3



(b)步骤4



(c)步骤5



(d)步骤6-7

图 3 当  $t = 4$  时程序 EVEN\_HC 的执行过程

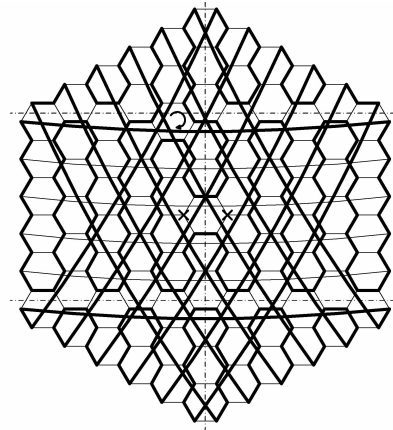


图 4 当  $t = 6$  时程序 EVEN\_HC 构造的哈密顿圈

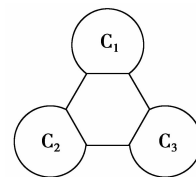


图 5 通过在共享 6-圈上的边交换把 3 个不相交的圈合并为 1 个圈

定理 1 程序 EVEN\_HC 构造了一个无故障哈密顿圈。

证明:令  $E^*$  代表程序的前 5 步完成之后得到的边的集合。令  $E^* = E_1^* \cup E_2^*$ , 其中  $E_1^* = \{e \in E^* : e \text{ 落在 H 和 L 之间}\}$ ,  $E_2^* = E^* - E_1^*$ 。  $E_1^*$  中的边构成了圈  $C_0$ ,  $E_2^*$  中的边构成了圈  $C_1$ 。显然,这两个圈是不相交的,并且它们的并集经过了 HHT 的所有结点。

程序 EVEN\_HC 的步骤 6 把圈  $C_0$  分解成了 2 个不相交的圈  $C_2$  和  $C_3$ 。现在共有 3 个不相交的圈  $C_1, C_2$  和  $C_3$ (它们的并集经过了 HHT 的所有无故障结点),它们以图 5 所示的方式共享 1 个 6-圈(见程序 EVEN\_HC 的步骤 7)。最后,步骤 7 通过边交换操作把这 3 个圈合并成 1 个圈,这个圈就是故障 HHT 中的无故障哈密顿圈。证明完毕。

情形 3  $t \geq 5$  且  $t$  是奇数。

为方便起见,假设故障 6-圈刚好在中心 6-圈左上方与其相邻,并且 2 个故障结点落在同一水平线上(见图 6c)。下面给出一个构造无故障哈密顿圈边的集合的程序。

程序 ODD\_HC

输入:奇数  $t \geq 5$ 。

输出:阶为  $t$  的故障 HHT 上的无故障哈密顿圈的边的集合  $E$ 。

开始

步骤 1-5:前 5 步与程序 EVEN\_HC 的前 5 步类似。

步骤 6:在有 2 条短斜边与 L 相交的左数第 3, 7, 11, ..., 直到第  $(2t - 3)$  个 6-圈的每一个 6-圈上,有 3 条边属于集合 E。对于每一个这样的 6-圈,从集合 E 中去掉这 3 条边,把另外 3 条边添加到集合 E。

步骤 7:在故障 6-圈上,有 4 条边属于集合 E。从集合 E 中去掉这 4 条边,把另外 2 条边添加到集合 E。

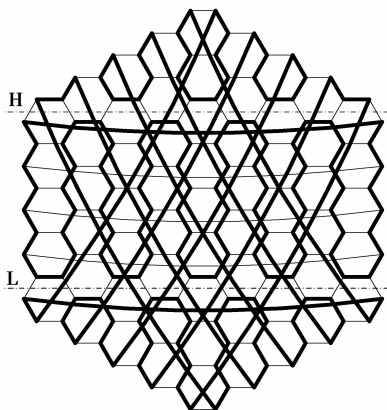
步骤 8:在有 2 条边与 HHT 的竖直对称轴相交并且有 2 条边与 H 相交的 6-圈上,有 3 条边属于集合 E。从集合 E 中去掉这 3 条边,把另外 3 条边添加到集合 E。

结束

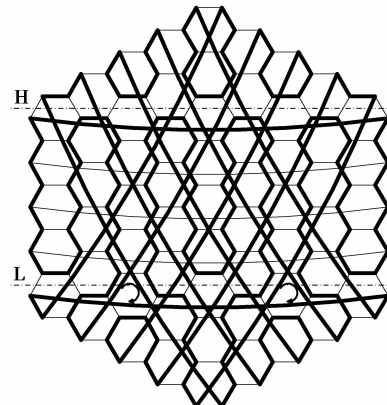
图 6 说明了当  $t = 5$  时程序 ODD\_HC 的执行过程,图 7 给出了当  $t = 7$  时程序 EVEN\_HC 构造的哈密尔顿圈。

定理 2 程序 ODD\_HC 构造了 1 个无故障哈密尔顿圈。

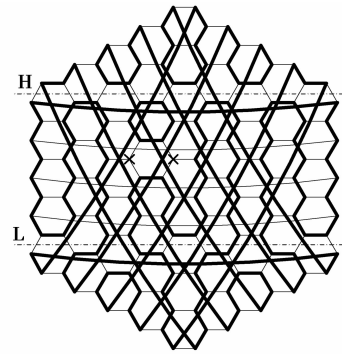
证明:令  $E^*$  表示程序的前 5 步完成之后得到的边的集合。令  $E^* = E_1^* \cup E_2^*$ , 其中  $E_1^* = \{e \in E^* : e \text{ 落在 H 和 L 之间}\}$ ,  $E_2^* = E^* - E_1^*$ 。  $E_1^*$  中的边构成了圈  $C_0$ ,  $E_2^*$  中的边构成  $t$  个圈,它们在 H 上方从左到右被标记为  $C_1, C_2, \dots, C_{(t-1)/2}, C'$ ,



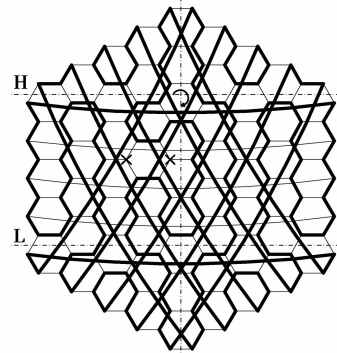
(a)步骤1-5



(b)步骤6



(c)步骤7



(c)步骤8

图 6 当  $t = 5$  时程序 ODD\_HC 的执行过程

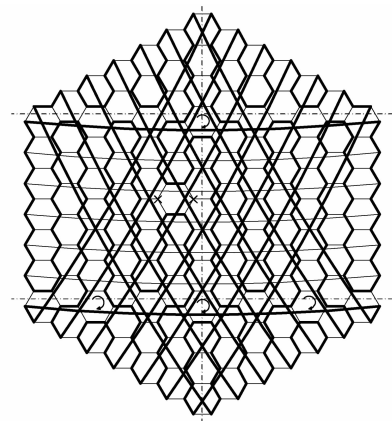


图 7 当  $t = 7$  时程序 ODD\_HC 构造的哈密尔顿圈

$C_{(t+1)/2}, \dots, C_{t-1}$ 。显然,这  $t + 1$  个圈是两两不相交的,并且它们的并集经过了 HHT 的所有结点。

圈  $C_0$  与  $C_1, C_2, \dots, C_{(t-1)/2}, C_{(t+1)/2}, \dots, C_{t-1}$  这  $t - 1$  个圈以图 8 所示的方式共享  $(t - 1)/2$  个 6-圈(见程序 ODD\_HC 的步骤 6)。这  $t$  个圈在步骤 6 中被合并为一个更长的圈  $C_{01}$ 。

步骤 7 把圈  $C_{01}$  分解成 2 个不相交的圈  $C_{02}$  和  $C_{03}$ 。现在共有 3 个两两不相交的圈  $C_{02}, C_{03}$  和  $C'$ , 它们的并集经过了 HHT 的所有无故障结点。这 3 个圈以图 9 所示的方式共享 1 个 6-圈。步骤 8 把这 3 个圈合并成 1 个圈,这个圈就是故障 HHT 中的无故障哈密尔顿圈。证明完毕。

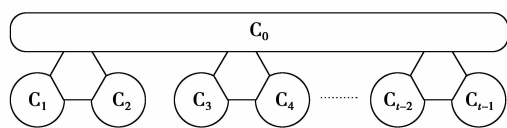
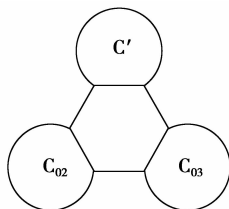
图 8 通过一系列的边交换把  $t$  个不相交的圈合并为 1 个圈

图 9 通过在共享 6-圈上的边交换把 3 个不相交的圈合并为 1 个圈

### 3 结 论

很多经典的并行算法都拥有线性阵列或者圈结构的任务图。为了在 1 个指定的并行计算系统上有效地执行 1 个线性阵列或者圈结构的并行算法,把并行算法的任务图映射到互连网络的结点上。因此,含有哈密顿圈或者是容错哈密顿圈的互连网络在这个方面是很有优势的。

笔者证明了含有一对落在某个 6-圈对角处的故障结点的六角形蜂窝环是哈密顿图。这意味着 1 个圈结构并行算法能够在这个故障六角形蜂窝环上高效的执行。这个结果揭示了六角形蜂窝环的另外一个重要性质。下一步的工作是研究含有其它类型故障结点的六角形蜂窝环的哈密顿性。

#### 参考文献:

- [1] MILUTINOVIC D, MILUTINOVIC V, SOUCEK B. The honeycomb architecture [J]. Computer, 1987, 20(4):81-83.
- [2] STOJMENOVIC I. Honeycomb network: topological properties and communication algorithms [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1997, 8(10):1036-1042.
- [3] BEIN D, BEIN W W, BRAJKOVSKA D, et al. Optimal embedding of honeycomb networks into hypercubes[J]. Parallel Processing Letters, 2004, 14(3/4):367-375.
- [4] CARLE J, MYOUPPO J F, SEME D. All-to-all broadcasting algorithms on honeycomb networks and applications [J]. Parallel Processing Letters, 1999, 9(4):539-550.
- [5] CARLE J, MYOUPPO J F, STOJMENOVIC I. Higher

- dimensional honeycomb networks [J]. Journal of Interconnection Networks, 2001, 2(4):391-420.
- [6] CHO H J, HSU L Y. Ring embedding in faulty honeycomb rectangular torus [J]. Information Processing Letters, 2002, 84(5):277-284.
- [7] MEGSON G M, LIU X, YANG X. Fault-tolerant ring embedding in a honeycomb torus with node failures[J]. Parallel Processing Letters, 1999, 9(4):551-562.
- [8] MEGSON G M, YANG X, LIU X. Honeycomb tori are Hamiltonian[J]. Information Processing Letters, 1999, 72(3/4):99-103.
- [9] PARHAMI B, KWAI D M. A unified formulation of honeycomb and diamond networks [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2001, 12(1):74-80.
- [10] YANG X. The diameter of honeycomb rhombic tori[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(2):167-172.
- [11] YANG X. Diameter of parallelogramic honeycomb torus [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 50(8/9):1477-1486.
- [12] YANG X, MEGSON G M, ZHANG S, et al. A solution to the three disjoint path problem on honeycomb meshes[J]. Parallel Processing Letters, 2004, 14(3/4):399-410.
- [13] YANG X, MEGSON G M, ZHANG S, et al. A solution to the three disjoint path problem on honeycomb tori [J]. Parallel Processing Letters, 2004, 14(3/4):411-422.
- [14] YANG X, TANG Y Y, CAO J, et al. Embedding even-length cycles in a hexagonal honeycomb mesh [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2008, 85(2):201-209.
- [15] YANG X, TANG Y Y, LU Q, et al. Optimal doublecast path in hexagonal honeycomb mesh [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(2):1267-1279.
- [16] PARHAMI B. An introduction to parallel processing: algorithms and architectures [M]. New York: Plenum Press, 1999.
- [17] DIESTEL R. Graph theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [18] CHO H J, HSU L Y. Generalized honeycomb torus[J]. Information Processing Letters, 2003, 86(4):185-190.
- [19] YANG X, EVANS D J, LAI H, et al. Generalized honeycomb torus is Hamiltonian [J]. Information Processing Letters, 2004, 92(1):31-37.