

文章编号:1000-582X(2011)08-055-05

## 数控机床小样本类型子系统的可靠性建模

申桂香,陈炳锐,张英芝,邵娜,谷东伟,王志琼

(吉林大学机械科学与工程学院,吉林长春 130025)

**摘要:**数控机床中很多子系统故障数很少,属于小样本的类型,使用传统经典可靠性建模方法进行建模往往会有较大的误差。对于小样本类型的故障数据,首先使用极大似然估计方法估计出各子系统故障间隔时间威布尔分布模型的参数,再采用参数偏差修正方法对各威布尔分布的模型进行修正。最后使用  $D$  检验法和误差面积比检验法检验参数偏差修正的效果,检验结果证明了修正后的模型更优。

**关键词:**机床;小样本;可靠性;威布尔分布;参数偏差修正

**中图分类号:** TG659

**文献标志码:** A

### Reliability model for Subsystems of CNC machine tool with small samples

SHEN Gui-xiang, CHEN Bing-kun, ZHANG Ying-zhi, SHAO Na, GU Dong-wei, WANG Zhi-qiong

(College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, Jilin, P. R. China)

**Abstract:** Many subsystems in CNC machine tool have only a few failures, so they are small samples. In this case, classical reliability modeling method often has large errors. For the failure data of small sample, maximum likelihood estimation method is used to estimate the Weibull distribution model parameters of time between failures of the subsystems. Then, the Weibull distribution model parameters are modified by parameter bias correction method. Finally, the effect of bias correction parameters is tested by the  $D$  test and the error area ratio test method. The test results show that the modified models are better.

**Key words:** machine tool; small sample; reliability; Weibull distribution; parameter bias correction

数控机床是生产农业机械、航空航天、汽车等产品的工作母机,其水平将直接影响国内主要行业的发展<sup>[1-2]</sup>。随着市场对高品质数控机床需求的增长,制造商也被要求对产品的可靠性进行验证<sup>[3-4]</sup>。然而,由于近几年来数控机床可靠性的飞速发展,故障的发生越来越少,加上试验条件和时间的限制,使得采集到的样本数逐渐减小。传统的可靠性分析方法都是建立在大量的试验样本数据的基础上的,如果用来分析小样本条件下的故障数据就可能得到误差较大的分析结果<sup>[5-9]</sup>。因此,如何在小样本情况下

对可靠性给出合理、准确的评估,是目前可靠性研究工作的热点问题之一。

威布尔分布对产品寿命数据有很好的拟合性,且它能描述具有不同类型失效率的产品寿命分布,因此得到了十分广泛的应用<sup>[10-15]</sup>。本文在传统经典可靠性建模的基础上,对分布模型的参数进行偏差修正,最终建立更为接近真实情况的可靠性模型。

### 1 计算故障间隔时间

在某数控机床厂和机床用户的大力配合下,对

收稿日期:2011-03-01

基金项目:国家自然科学基金项目(50875110);“高档数控机床与基础制造装备”科技重大专项(2010ZX04014-011)。

作者简介:申桂香(1957-),女,吉林大学教授,博士生导师,主要研究方向为面向生命周期的数控装备可靠性研究,  
(E-mail)shengx@jlu.edu.cn。

张英芝(通信联系人),女,吉林大学副教授,(E-mail)zhangyz@jlu.edu.cn。

该厂 2007 年出厂的某型号数控机床抽取了 10 台在用户的使用过程中进行现场跟踪试验,每台的试验期均为一年以上。试验采集了真实的数控机床故障数据。

对于多发故障的子系统的可靠性建模研究可以继续采用传统经典的可靠性研究方法,本文仅对故障数小的子系统的可靠性建模做重点研究。通过对数控机床子系统故障的初步分析,统计出故障数小于 10 并大于 3 的子系统,主要有:横梁(B)、电气系统(V)、工作台(T)、伺服控制单元(F)、润滑系统(L)。

建立可靠性模型首先需要计算故障间隔时间。故障间隔时间通常是指相邻两次故障之间的正常工作的时间。由于小样本下的子系统故障数据少,所以其截尾时间所占的比例比较大,由此带来的误差是很严重的,因此本文将采用故障总时间法<sup>[16]</sup>计算出各个子系统的故障间隔时间,见表 1,该方法可以减少截尾时间的数量。

表 1 各子系统故障间隔时间

子系统	故障间隔时间/h
横梁 B	863.1, 2 235.6, 3 353.6, 4 808.0, 8 620.4, 1 4807.3
电气系统 V	517.8, 1 271.2, 2 552.2, 4 105.6, 5 621.9, 16 794.8
工作台 T	986.3, 2 712.3, 3 069.9, 5 671. 2, 30 060.6
伺服控制单元 F	1 060.3, 4 362.8, 8 001.8, 13 650.7, 19 196.4
润滑系统 L	1 775.8, 7 582.0, 15 004.6, 17 978.1

## 2 样本的经验分布函数

故障间隔时间的累积频率分布用函数表示则称作经验分布函数,记为  $F_n(t)$ 。

在小样本情况下,为减少误差,本文采用近似中位秩公式计算,这种计算方式可使得经验分布函数与总体的分布函数之间只有很小的差别。

近似中位秩公式

$$F_{(n)}(t_i) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4},$$

式中,  $F_{(n)}(t_i)$ —故障时间的累积频率,  $t_i$ —故障间隔时间,  $n$ —样本容量。

以子系统横梁为例,其经验分布函数散点图见图 1。该图反映的即是子系统横梁故障发生的实际

情况,图上的点是观测值。本文的主要内容是根据这些观测值拟合出更为准确的分布模型。

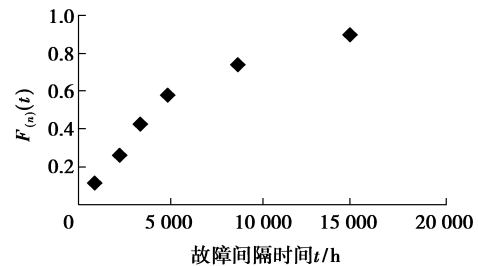


图 1 子系统横梁的经验分布函数散点图

## 3 估计威布尔分布模型的参数

威布尔分布在可靠性分析中具有较好的工程适用性,通常认为数控机床各个子系统的故障间隔时间服从威布尔分布。

威布尔分布参数估计常用的主要有极大似然估计、最小二乘法估计和图估计等几种。在这诸多的参数估计方法中,极大似然估计方法的精度相对较高,因此本文将使用极大似然估计方法对参数进行估计。

两参数威布尔分布的密度函数和累积故障分布函数为

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right], \quad (1)$$

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right]. \quad (2)$$

其中,  $t \geq 0, \eta > 0, m > 0, m$  称为形状参数,  $\eta$  称为尺度参数。

设  $t_1, t_2, \dots, t_n$  为一组故障间隔时间的顺序统计量,使用极大似然估计方法进行参数估计,则  $m$  和  $\eta$  的极大似然估计  $\hat{m}$  和  $\hat{\eta}$  满足方程

$$\frac{1}{\hat{m}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{m}} \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{m}}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i, \quad (3)$$

$$\hat{\eta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{m}}\right)^{1/\hat{m}}. \quad (4)$$

文献[17]证明了方程(3)有唯一正解,并给出了求解  $\hat{m}$  的一个迭代算法:

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_{k+1} &= \frac{1}{2} \hat{m}_k + \frac{1}{2} [h(\hat{m}_k) - \bar{X}]^{-1}, \\ \hat{m}_0 &= 1.0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由式(5)给出的迭代算法是单调收敛的。一般在 5 次迭代左右就能获得足够精确的近似解,因此本文参数估计计算时都将迭代 5 次,结果见表 2。

表 2 各子系统威布尔分布参数的极大似然估计结果

子系统	$\hat{\eta}$	$\hat{m}$	分布模型 $F(t)$
B	6 227.2	1.248 8	$F_B(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{6\ 227.2}\right)^{1.248\ 8}\right]$
V	5 098.7	0.980 9	$F_V(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{5\ 098.7}\right)^{0.980\ 9}\right]$
T	7 708.8	0.852 3	$F_T(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{7\ 708.8}\right)^{0.852\ 3}\right]$
F	10 404.1	1.320 6	$F_F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{10\ 404.1}\right)^{1.320\ 6}\right]$
L	11 708.5	1.575	$F_L(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{11\ 708.5}\right)^{1.575}\right]$

表 3 威布尔分布偏差修正

子系统	$\eta^*$	$m^*$	参数偏差修正后的模型 $F^*(t)$
B	6 204.5	0.958 5	$F_B^*(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{6\ 204.5}\right)^{0.958\ 5}\right]$
V	4 924.6	0.752 8	$F_V^*(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{4\ 924.6}\right)^{0.752\ 8}\right]$
T	6 985.7	0.608 2	$F_T^*(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{6\ 985.7}\right)^{0.608\ 2}\right]$
F	10 339.4	0.942 5	$F_F^*(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{10\ 339.4}\right)^{0.942\ 5}\right]$
L	11 689.5	0.986 8	$F_L^*(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{11\ 689.5}\right)^{0.986\ 8}\right]$

### 4 威布尔分布模型参数的偏差修正

威布尔分布参数的极大似然估计在小样本情况下是有偏的。因此,为得到更精确的可靠性模型,还需对各个威布尔分布模型的参数进行偏差修正。

对  $m$  的基于极大似然估计的无偏估计公式<sup>[18]</sup>为:

$$m^* = \gamma_m(n)\hat{m} \quad (6)$$

式中: $\gamma_m(n)$ 称为 $\hat{m}$ 的修偏系数,可用如下公式计算:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_m(n) &= \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}; n \geq 4, \\ \gamma_m(3) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}; n = 3. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

当  $n$  为  $n \geq 4$  的偶数时,有

$$\gamma_m(n) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \times \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-3)}{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n}{2} - 2\right)!} \quad (8)$$

当  $n$  为  $n \geq 5$  的奇数时,有

$$\gamma_m(n) = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{n\pi}} \times \frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-4)} \quad (9)$$

对于任意  $n \geq 3$ ,有  $\gamma_m(n) < 1$ ,且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_m(n) = 1$ ,所以  $m^* < \hat{m}$ ,用公式(6)对形状参数  $m$  进行偏差修正。

$\eta$  的基于极大似然估计的偏差修正公式为

$$\eta^* = \gamma_\eta(n, m^*)\hat{\eta} \quad (10)$$

式中: $\gamma_\eta(n, m^*) = \frac{n^{\frac{1}{m^*}}(n-1)!}{\Gamma\left(n + \frac{1}{m^*}\right)}$  (11)

利用上述公式对子系统威布尔分布的参数进行偏差修正,修正结果见表 3。

### 5 偏差修正前后模型的拟合优度对比

首先使用  $D$  检验法对模型进行拟合检验。再根据  $D$  检验结果和误差面积比的检验方法对比修正前后模型的拟合效果。

$D$  检验的基本思想是计算样本数据的观测值与拟和模型的计算值之间的差异,这种差异越小,所拟和的模型是越恰当的。 $D$  检验公式为

$$D_n = \sup_{t \leq T_0} |F_n(t) - F(t)| = \max\{d_i\} \leq D_{n,\alpha}$$

式中: $F(t)$ ——样本数据的拟合模型;

$F_n(t)$ ——样本数据的观测值,也就是样本大小为  $n$  的经验分布函数值,本文中采用

$$\text{中位秩估计为: } \hat{F}_n(t_i) \approx \frac{i-0.3}{n+0.4};$$

$$d_i = \max\{F(t_i) - F_n(t_i)\};$$

$D_{n,\alpha}$ ——临界值。

由公式可看出, $D$  检验是将  $n$  个试验数据对应的函数值  $F(t_i)$ ,将其与经验分布函数  $F_{(n)}(t_i)$  进行比较,其中差值的最大绝对值即检验统计量  $D_n$  的观测值。 $D_n$  需小于临界值  $D_{n,\alpha}$  才能认为模型通过拟合检验, $D$  检验的结果见表 4。

表 4  $D$  检验结果

子系统	$D_{n,\alpha}$	$D_n$	$D_n^*$
B	0.498 1	0.062 9	0.047 7
V	0.498 1	0.069 4	0.065 6
T	0.545 6	0.148 3	0.132 5
F	0.545 6	0.081 8	0.044 1
L	0.61	0.158 2	0.108 2

由表4可看出所有子系统均能通过 $D$ 检验,并且经过偏差修正的模型的检验结果都略小于原模型的检验结果。

进行误差面积比检验时,由于本文采集的故障数据属于离散型数据,因此选取拟合误差面积比指数 $R$ 为

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n |F(t_i) - F_n(t_i)|}{\sum_{i=1}^n F_n(t_i)},$$

式中: $F(t)$ —分布函数; $F_n(t)$ —样本大小为 $n$ 的经验分布函数;

对于修正偏差后的模型则有

$$R^* = \frac{\sum_{i=1}^n |F^*(t_i) - F_n(t_i)|}{\sum_{i=1}^n F_n(t_i)}.$$

式中: $F^*(t)$ —修正偏差后的分布函数。

由公式可看出误差面积比检验是将 $n$ 个试验数据对应的 $F(t_i)$ 与经验分布函数 $F_n(t_i)$ 之间差值的绝对值累积相加,将这个和值与 $\sum_{i=1}^n F_n(t_i)$ 做比值。由公式可看出 $R$ 值是远远小于1的,其值越小,说明理论模型每个数据点的拟合效果越好。误差面积比检验结果见表5。

表5 误差面积比检验结果

子系统	$R$	$R^*$
B	0.088 5	0.046 1
V	0.077 5	0.076 1
T	0.168 7	0.173 7
F	0.092 5	0.074 4
L	0.148 0	0.136 7

由表5可看出,经偏差修正后的模型的误差面积比检验结果比原模型的小。

以子系统横梁为例,将经验分布函数散点图和偏差修正前后的分布模型同时绘制在一个图中,对比拟合的效果,见图2。

根据图2,可看出经偏差修正后的模型与经验分布函数的观测点更为接近。由于篇幅有限,其他子系统的曲线对比图省略。

$D$ 检验验证的是最大差值,误差面积比检验的是所有差值总和,这两种检验方法同时使用,可以使检验结果更完善。

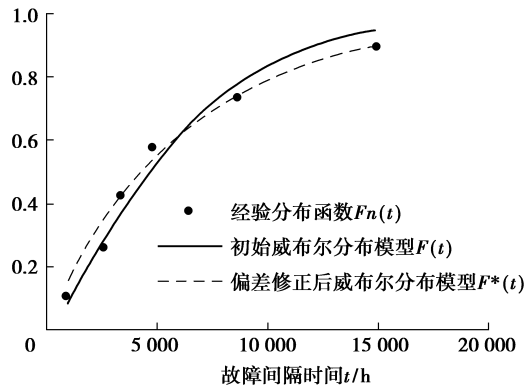


图2 子系统横梁的分布模型曲线对比图

从表4和表5可看出, $D$ 检验或是误差面积比检验的结果都表明经偏差修正的模型的拟合效果更好。因此对于数控机床的几个小样本类型的子系统来说,对模型进行偏差修正的效果是显著的。

## 6 结 论

数控机床可靠性研究工作中,出现小样本类型数据的情况越来越多,不容被忽视,众多可靠性研究课题组对小样本类型数据的可靠性研究工作越来越重视。本文基于传统经典可靠性理论,对数控机床小样本类型的子系统建立可靠性模型,在此基础上对其参数进行了偏差修正。最后通过 $D$ 检验和误差面积比检验证明了修正后的模型较原模型更加接近真实数据,由此可见本文采用的偏差修正方法是有效的。

### 参考文献:

- [1] 贾亚洲. 提高数控机床可靠性 加快振兴装备制造业的关键[J]. 中国制造业信息化, 2006(3): 42-43.  
JIA YA-ZHOU. It is important to improve the reliability of NC machine tools and accelerate equipment manufacturing [J]. Manufacture Information Engineering of China, 2006(3): 42-53.
- [2] 童海滨. 数控机床在国民经济发展中的地位和作用[J]. 装备机械, 2005(2): 13.  
TONG HAI-BIN. The status and role of CNC machine tools in national economic development [J]. The Magazine on Equipment Machinery, 2005(2): 13.
- [3] 秦大同, 邢子坤, 王建宏, 等. 基于动力学的风力发电齿轮传动系统可靠性评估[J]. 重庆大学学报, 2007, 30(12): 1-6.  
QIN DA-TONG, XING ZI-KUN, WANG JIAN-HONG. Reliability evaluation of the gear transmission system for the wind-driven generator based on dynamic

- [J]. Journal of Chongqing University, 2007, 30(12): 1-6.
- [4] ZHANG Y Z, ZHENG R, SHEN G X, et al. Reliability analysis for CNC machine tool based on failure interaction [C] // Communications in Computer and Information Science, 2011, 134: 489-496.
- [5] 金标, 秦大同, 胡建军. 基于小子样的 Bayes 系统可靠性综合评估方法 [J]. 重庆大学学报, 2007, 30(9): 9-13.  
JIN BIAO, QIN DA-TONG, HU JIAN-JUN. A bayes method of reliability synthesis evaluation based on the small sample-system [J]. Journal of Chongqing University, 2007, 30(9): 9-13.
- [6] LUA Z, FEHNA U, TOMARUA H, et al. Reliability of 129I/I ratios produced from small sample masses [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, 2007, 259(1): 359-364.
- [7] CAMPBELL R J, RAJASHEKARA K. Evaluation of power devices for automotive hybrid and 42V based systems [C] // 2004 SAE World Congress, March 8-11, 2004, Detroit, Michigan. USA: SAE international, [2004]: 2004-01-1682.
- [8] NIE T. Application of small sample analysis in life estimation of aeroengine components [J]. Journal of Southwest Jiaotong University: English Edition, 2010, 18(4): 285-288.
- [9] ZHANG J, TU J X, CHEN Z NI, et al. Quasi-bayesian software reliability model with small samples [J]. Journal of Shanghai University: English Edition, 2009, 13(14): 301-304.
- [10] 池洁. 设备使用过程中的故障分布及可靠度变化分析 [J]. 重庆建筑大学学报, 2006, 28(5): 51-54.  
CHI JIE. Study on the failure distribution and reliability variation of the equipment in use [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2006, 28(5): 51-54.
- [11] 丁湛, 黄双华. 基于威布尔分布的可靠性寿命分布模型的建立 [J]. 电子测量技术, 2007, 30(3): 34-35.  
DING ZHAN, HUANG SHUANG-HUA. Establishment of reliability life model based on Weibull distribution [J]. Electronic Measurement Technology, 2007, 30(3): 34-35.
- [12] XIA Z P, YU J Y, LIU L F, et al. Studying the mechanical properties of Jute/Cotton blended yarns using the Weibull model [J]. Journal of Donghua University: English Edition, 2009, 26(4): 393-396.
- [13] GUPTA A, MUKHERJEE B, UPADHYAY S K. Weibull extension model: a Bayes study using Markov chain Monte Carlo simulation [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(10): 1434-1443.
- [14] GUO H T, WATSON S, TAVNER P, et al. Reliability analysis for wind turbines with incomplete failure data collected from after the data of initial installation [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2009, 94(6): 1057-1063.
- [15] ZHANG T L, XIE M. Failure data analysis with extended Weibull distribution [J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2007, 36(3): 579-592.
- [16] 张英芝, 申桂香, 薛玉霞, 等. 随机截尾数控机床刀架系统故障过程 [J]. 吉林大学学报: 工学版, 2008, 38(s2): 113-116.  
ZHANG YING-ZHI, SHEN GUI-XIANG, XUE YU-XIA, et al. Fault process for turret system of CNC lathes with random ending [J]. Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition, 2008, 38(s2): 113-116.
- [17] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论 [M]. 修订版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [18] 胡甫正. 威布尔分布参数极大似然估计的偏差修正 [J]. 电子产品可靠性与环境试验, 1992(1): 14-19.  
HU PU-ZHENG. Bias correction of Weibull distribution parameter maximum likelihood estimation [J]. Electronic Product Reliability and Environmental Testing, 1992(1): 14-19.

(编辑 张小强)