

文章编号: 1000-582X(2011)12-072-06

## 偏微分方程在轴心轨迹提纯中的应用

尹爱军, 孙丽萍, 王 见

(重庆大学 a. 机械传动国家重点实验室; b. 机械工程学院, 重庆 400044)

**摘 要:** 转子轴心轨迹包含了丰富的故障征兆信息, 但因噪声的干扰, 实测的轴心轨迹往往非常混乱。针对传统轴心轨迹提纯方法存在的问题, 提出了偏微分方程 (partial differential equation) 轴心轨迹提纯新方法。分析了 PDE 滤波的基本原理、PDE 滤波器的参数设计及其数值化过程, 指出了 PDE 滤波与传统滤波器的相关性, 实现了基于 PDE 的轴心轨迹提纯。实验表明, PDE 方法可有效滤除信号中的噪声, 且适应性强; 去噪之后信号畸变少, 保证了滤波前后信号固有结构不变。

**关键词:** 偏微分方程; 提纯; 轴心轨迹

**中图分类号:** TN911

**文献标志码:** A

## Purification of the shaft centerline orbit with partial differential equation

YIN Ai-jun, SUN Li-ping, WANG Jian

(a. State Key Laboratory of Mechanical Transmission; b. College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** The shaft centerline orbit contains abundant information about fault symptoms, but the measured orbit is often confused by the interference of noise. Based on partial differential equation (PDE), this paper proposes a method for purification of the shaft centerline orbit to overcome the shortcomings of the traditional method. We analyze the principle of filtering based on PDE, PDE filter parameter design and its numerical process. Its correlativity is discussed with the traditional filter and realized the purification of the shaft centerline orbit. Experiment results show that the method is a flexible method of denoise, can effectively eliminate the noise disturbing, also avoid signal distortions after denoise, and at the same time keep the property of signal.

**Key words:** partial differential equation; purification; shaft centerline orbit

在旋转机械故障诊断中, 轴心轨迹作为转子振动信号的一类重要图形征兆, 包含了大量的故障信息, 它能够形象、直观地反映了转子瞬时运动状态, 其形状和动态特性包含了丰富的故障征兆信息。对轴心轨迹的识别研究一般在两个方向展开: 轴心轨迹提纯研究、识别方法研究。实际测量的振动信号得到一般都受到噪声污染, 由此得到的轴心轨迹很复杂, 不易获得清晰的特征。轴心轨迹提纯就是剔

除噪声, 还原出干净的轴心轨迹。轴心轨迹的辨识主要研究轴心轨迹图象的特征提取和识别问题, 其前提也需要有清晰的轴心轨迹图作为依据<sup>[1]</sup>。

国内外许多科研人员对轴心轨迹提纯作了大量研究。如相关分析法提纯、数字(模拟)低通滤波提纯、谐波小波提纯<sup>[2-4]</sup>、小波变换降噪提纯<sup>[5]</sup>、数字形态学滤波提纯等等<sup>[6-10]</sup>。实际上, 所谓提纯都是对原始信号进行降噪处理然后合成轴心轨迹, 笔者在

**收稿日期:** 2011-07-20

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51105396, 50905192); 重庆大学 211 建设资助项目(509106)

**作者简介:** 尹爱军(1978-), 男, 重庆大学副教授, 博士, 主要研究方向为智能测试与虚拟仪器、信号分析与处理, (Tel)023-65106973; (E-mail)yinaijun2001@yahoo.com.cn.

科研过程中,发现上述这些降噪方法一般都存在频带选择不明确、降噪畸变大、初相位影响严重等问题。根据前期研究成果,研究了偏微分方程(partial differential equation, PDE)降噪及其在轴心轨迹提纯中的应用。PDE 降噪方法借助扩散演化方程,实现自适应降噪,且降噪的同时对信号畸变少,同时保证了信号的内部连续性和边缘特性(初相位)。

## 1 轴心轨迹检测的意义及其提纯

### 1.1 轴心轨迹故障诊断

理想轴心轨迹为圆形,但由于实际上不平衡总是存在,因此一般情况下轴心轨迹往往是椭圆形。不同类型的转子故障,将呈现出不同特征的轴心轨迹,如由转动部件不平衡或主轴轴线不直引起的摆度过大,轴心轨迹为椭圆形;动静件碰磨故障会使轴心轨迹呈现为规则或不规则的花瓣形;由油膜涡动引起的轴心轨迹为内“8”字形;不对中引起的轴心轨迹为香蕉形或外“8”字形等。图 1 是典型故障的轴心轨迹形状<sup>[6]</sup>。

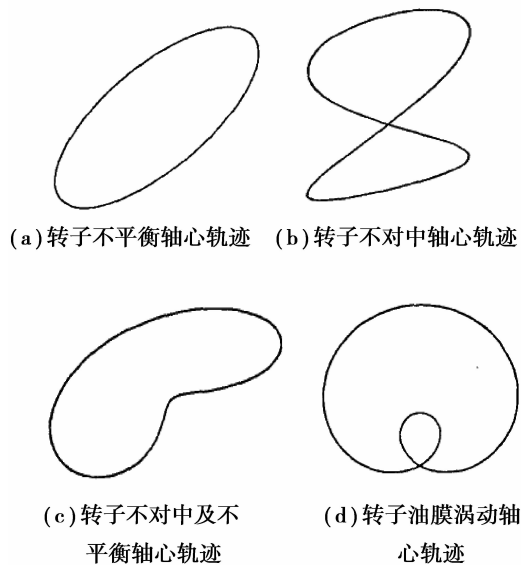


图 1 典型故障轴心轨迹形状

### 1.2 轴心轨迹提纯

用实测振动信号得到的轴心轨迹一般都受到噪声的污染,使原始轴心轨迹很复杂,难于直接用于识别处理。如何剔除噪声,还原出干净的轴心轨迹,就是轴心轨迹提纯研究的主要内容。图 2 表示轴心轨迹提纯。图 2(a)为原始信号轴心轨迹,图 2(b)为提纯之后的轴心轨迹。

轴心轨迹的提纯最终即为剔除信号中的噪声干扰,如谐波小波提纯方法<sup>[2-4]</sup>。

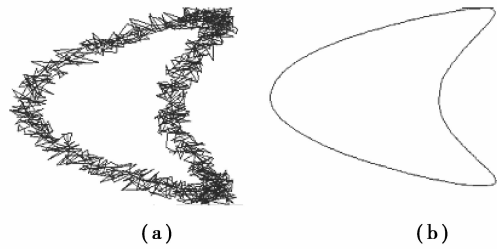


图 2 轴心轨迹提纯

定义谐波小波

$$\Psi_{m,n}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(n-m)}, & \omega \in [2\pi m, 2\pi n]; \\ 0, & \omega \notin [2\pi m, 2\pi n]. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $m, n$  决定了谐波小波变换的尺度( $j$ ),且  $n > m$ 。谐波小波实际上是一个完全理想的带通滤波器,具有良好的滤波特性。

则  $x(t)$  相对于尺寸  $j$  的谐波小波  $\psi_{m,n}(t)$  的小波变换为

$$W_x(m, n, t) = \int x(\tau) \psi_{m,n}(\tau - t) d\tau. \quad (2)$$

其频域表示为

$$\hat{W}_x(m, n, \omega) = X(\omega) \Psi_{m,n}(\omega). \quad (3)$$

其中  $\hat{W}_x(m, n, \omega)$  为  $W_x(m, n, t)$  的傅里叶变换;  $X(\omega)$  为  $x(t)$  的傅里叶变换;  $\Psi_{m,n}(\omega)$  为  $\psi_{m,n}(t)$  的傅里叶变换。

对信号的谐波小波分解进行重构时,只保留感兴趣频段的小波系数。由于谐波小波的正交性,重构得到的信号只保留了能够反映转子故障时的振动特征成分,而滤除了高频成分以及白噪声等,从而达到了提纯轴心轨迹的目的。事实上,小波提纯、小波包提纯的原理与过程也大致相同。

而数学形态滤波提纯则以腐蚀、膨胀两种基本的形态学运算及其它综合算法,平滑信号,从而达到滤波去噪的目的。

## 2 PDE 的基本概念

PDE 是一个含有多元未知数函数及其偏导数的方程。二阶线性 PDE 是偏微分方程理论中较为成熟的部分,并成为其他分支借鉴的典范。

一般二阶线性 PDE 具有如下形式

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x). \quad (4)$$

其中  $a_{ij}, b_i, c (i, j = 1, \dots, n)$  都是常数,  $f(x)$  为已知函数。设系数矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则可根据  $A$  的特征

根的符号将式(4)分为椭圆型、双曲型、抛物型等类。

二阶线性 PDE 中有三类方程可描述很大部分物理现象:波动方程、热传导方程、位势方程。其中热传导方程是最简单、最基础的抛物型 PDE,其基本形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (5)$$

可用于描述热传导、扩散等物理现象,并在图像滤波等领域的研究最为成熟。

### 3 基于 PDE 的振动信号降噪

偏微分方程(PDE)是众多描述物理、化学和生物现象的数学模型的基础。PDE 在图像处理等领域已得到了深入研究和发展<sup>[11-15]</sup>。这里主要探讨基于抛物型方程(热传导方程为例)的 PDE 线性滤波降噪。

#### 3.1 PDE 降噪的原理

因热传导方程具有典型性,在图像降噪等方面应用也非常成功;同时可以认为热传导方程的物理过程与输入信号通过滤波器的过程具有相似,因此考虑如下的热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, t \in R, \tau > 0; \\ u(t, 0) = \varphi(t), t \in R. \end{cases} \quad (6)$$

其中  $a$  为正常数。 $t$  表示信号自变量, $\tau$  表示偏微分方程的演化时间。

利用傅立叶积分法可得式(6)的解为

$$u(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}} \int \varphi(\xi) e^{-\frac{(t-\xi)^2}{4a^2\tau}} d\xi = \varphi(t) * k(t, \tau), \quad (7)$$

其中

$$k(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{t^2}{4a^2\tau}}, \quad (8)$$

为一个高斯函数。其傅立叶变换为

$$K(f, \tau) = e^{-a^2 f^2 \tau}. \quad (9)$$

从上述分析可以看出,若以  $\varphi(t)$  表示实际振动信号,则对热传导方程(6)的求解过程即为对原始信号进行高斯滤波,其滤波结果即为  $u(t, \tau)$ 。

从上述分析可知,基于 PDE 的滤波方法可以很容易的扩展到多维信号滤波处理中。同样,也可以借助其他形式的偏微分方程实现滤波降噪。

#### 3.2 PDE 滤波器的参数设计

显然热传导方程的滤波效果取决于高斯函数的两个参数  $a$  和演化时间  $\tau$ 。演化时间  $\tau$  越大,滤波越平滑,当  $\tau$  趋向无穷大时,滤波后的输出为直流信号,这与热扩散过程是一致的(当演化时间趋向无穷

大时,出于热平衡状态)。从滤波器的角度考虑,设 PDE 滤波器(式(9))的截止频率为  $f_n$ ,则有

$$20 \lg \left( \frac{1}{e^{-a^2 f_n^2 \tau}} \right) = 3. \quad (10)$$

则

$$\tau = \frac{0.3467}{a^2 f_n^2}. \quad (11)$$

显然,演化时间  $\tau$  与滤波器的截止频率  $f_n$  对等。截止频率越低, $\tau$  越大;截止频率趋于 0 时,即输出直流信号,此时  $\tau$  趋向无穷大;当全通时(截止频率为 0,没有滤波),演化时间为 0,即为原始信号。

#### 3.3 PDE 降噪的数字化

偏微分方程的数值解法有很多,包括有限差分法、变分法、有限元离散法等。差分法有很多种差分格式,如显式格式、隐式格式等等。

差分法中的显示格式容易理解和掌握,且实现简单,笔者以显示格式介绍热传导方程的数值化求解<sup>[9]</sup>。

设  $Q = \{(t, \tau) | 0 < t < T_x, 0 < \tau < T_t\}$ ,  $h, l$  分别为  $t, \tau$  方向的网格间隔,即

$$\begin{cases} h = T_x/n, l = T_t/m, \\ t = jh, j = 1, 2, \dots, n-1; \\ \tau = kl, k = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

记  $u(t, \tau)$  在节点  $(t_j, \tau_k)$  的值为  $u(j, k)$ ,则式(6)的显格式的数值解迭代计算式为

$$u(j, k+1) = u(j, k) + r(u(j+1, k) - 2u(j, k) + u(j-1, k)). \quad (12)$$

其中  $r = \frac{a^2 l}{h^2}$ ,称为网格比。根据热传导方程的显格式的稳定性条件,要求  $r \leq 0.5$ 。

对于高阶 PDE 滤波,可以用同样的方法建立数值解迭代式。

上面只是讨论了基本 PDE 的滤波原理和方法,在实际信号的处理过程中,还应该考虑相应的边初值条件等因素。

### 4 基于 PDE 的轴心轨迹提纯

基于 PDE 的轴心轨迹提纯方法其实质就是利用 PDE 完成振动信号的降噪,然后得到其轨迹图。因谐波小波提纯方法被认为是一种较好的提纯方法,因此对 PDE 提纯和谐波小波提纯方法进行了比较。

图 3 是仿真信号的原始轴心轨迹图和提纯轨迹图。仿真信号  $x, y$  方向均为频率为 5 Hz、幅值为 30

的单频信号,然后在  $x$ 、 $y$  上叠加幅值为 100、均值为 0 的随机噪声信号,其波形图如图 3(a)所示,原始轴心轨迹如图 3(b)所示。图 3(c)为谐波小波提纯后的轴心轨迹,滤波带宽为 0~10 Hz,滤波后幅值最大值为 5.6 左右(为便于观察,已将图形放大)。图 3(d)为 PDE 提纯后轴心轨迹图,网格比 0.02,迭代次数 4 000 次。从图 3 可以看出,就仿真信号而言,2 种方法都可有效提纯。

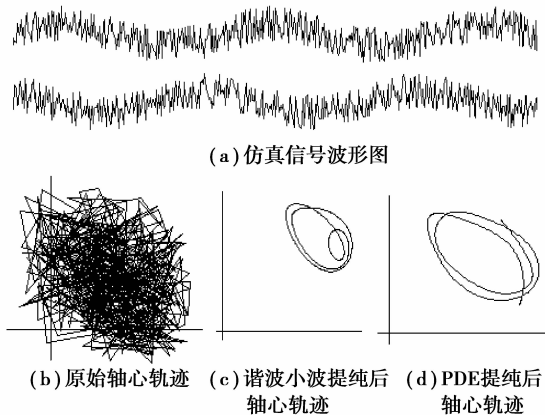


图 3 仿真信号轴心轨迹及其提纯

图 4 是利用提出的方法对一直流电机转子进行的现场实验。其中直流电机型号 Z4-132-1,额定功率 11 kW,额定转速 1 500 r/min,额定电压 400 V,采样频率为 4 000 Hz,传感器电涡流位移传感器。

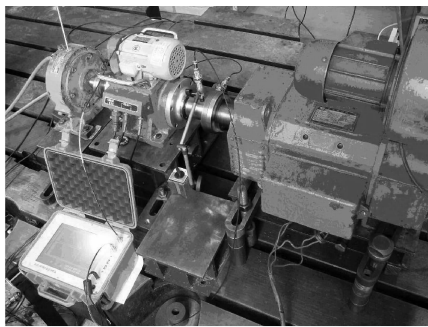


图 4 试验现场

图 5 为原始信号及其轴心轨迹图。其中图 5(a)为  $x$  方向振动信号,图 5(b)为  $y$  方向振动信号,振动最大幅值为 615  $\mu\text{m}$ 。

图 6 为利用谐波小波对图 4 所示信号提纯滤波及其轴心轨迹图。其中,谐波小波通带范围为 10~50 Hz,滤波后振动峰值为 235  $\mu\text{m}$ (为便于观察,已将图形放大)。由图 4 可以看出,该方法滤除了噪声,但对信号本身影响大,如振动幅值产生了大的改变,信号初相位发生偏移,轴心轨迹圆心位置错

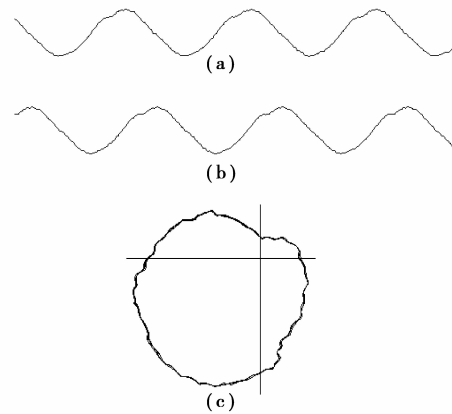


图 5 原始信号及其轴心轨迹

位等。

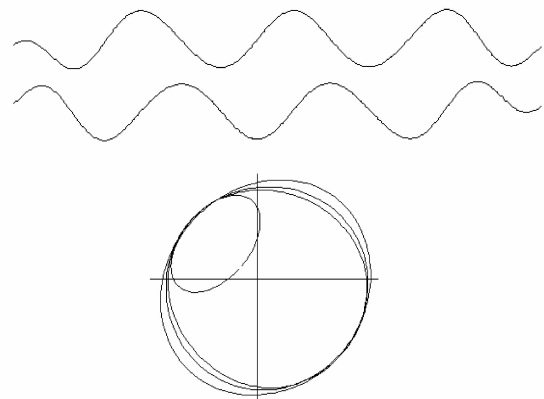


图 6 谐波小波提纯

图 7 为对图 5 所示的原始信号进行 PDE 提纯。其中 PDE 迭代次数为 1 000,网格比为 0.02,提纯后最大振动幅值为 590  $\mu\text{m}$ 。由图可以看出,该方法有效的滤除了噪声,对信号本身影响小,保持了原始信号轴心轨迹图的结构特点。

图 8 是在重庆大学机械传动国家重点实验室的一传动试验台上测得的轴  $x$ 、 $y$  方向振动实际数据。其中轴转速为 750 r/min,采样频率为 4 096 Hz,其最大振动幅值为 120  $\mu\text{m}$ 。

图 9 为原始轴心轨迹图、谐波小波提纯轨迹图和 PDE 提纯轨迹图。图 9(a)为原始信号轴心轨迹图,因信号含有噪声,其轨迹图较混乱。图 9(b)为谐波小波提纯轴心轨迹图,谐波小波通带范围为 10~50 Hz,滤波后振动峰值为 3.5  $\mu\text{m}$  左右(为便于观察,本文已将图形放大)。图 9(c)为 PDE 提纯轴心轨迹图,PDE 迭代次数为 1 000,网格比为 0.02,滤波后振动峰值为 105  $\mu\text{m}$  左右。由图可以看出,该轴系有轻微的不对中。此时谐波小波提纯后的轴心

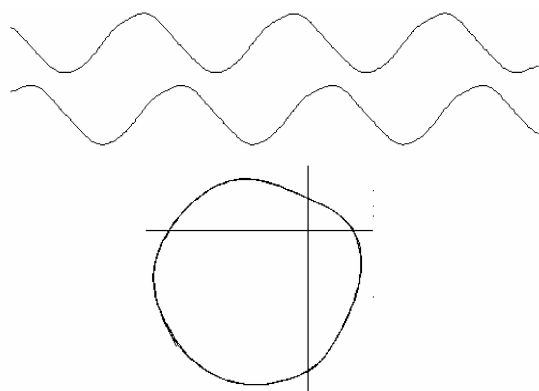


图7 PDE提纯

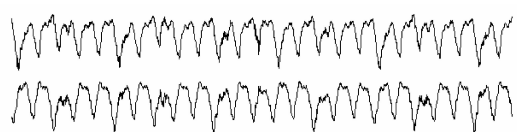


图8 传动试验台原始振动信号

轨迹图已完全丧失了作用。改变谐波小波的通带范围,仍然无法获得较好的效果。同时,在试验过程中发现,谐波小波处理数据量的不同,其轴心轨迹也不同。

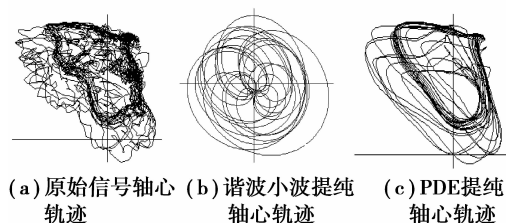


图9 轴心轨迹图

## 5 结论

轴心轨迹作为转子振动信号的一类重要图形征兆,形象、直观地反映了转子瞬时运动状态。实际测量的振动信号得到一般都受到噪声污染,由此得到的轴心轨迹很复杂,不易获得清晰的特征。如何对轴心轨迹提纯成为有效应用轴心轨迹图的关键之一。众多科研人员也对此进行了深入的研究。然而,在提出的这些方法中,总是存在这样那样的问题,如频带选择不明确、降噪畸变大、初相位影响严重等

偏微分方程(PDE)是众多描述物理、化学和生物现象的数学模型的基础。PDE在图像处理等领域已得到了深入研究和发展。笔者分析了PDE滤

波去噪原理及数值化方法。并将其成功的用于轴心轨迹的提纯。大量实验表明,该方法可有效地消除信号中的噪声干扰,同时保留了信号结构特性,对信号特征破坏少。

PDE滤波方法,其滤波频带范围与迭代次数有关,迭代次数越大,截止频率越小。试验表明,该方法鲁棒性好,可适用多分量,成份复杂的非平稳信号滤波去噪。

## 参考文献:

- [1] 陈豫. 轴心轨迹提纯与自动识别的研究[J]. 武汉理工大学学报, 2003, 27(6): 878-881.  
CHEN YU. Rotor orbit purification and its automatic identification [J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2003, 27(6): 878-881.
- [2] 李方, 李友荣, 王志刚. 应用广义谐波小波提纯转子轴心轨迹[J]. 振动测试诊断, 2008, 28(1): 55-57.  
LI FANG, LI YOU-RONG, WANG ZHI-GANG. Purification of axis orbit of rotor with generalized harmonic wavelet [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2008, 28(1): 55-57.
- [3] 李舜酩, 李国志, 许庆余. 转子轴心软迹的谐波小波提纯[J]. 西北工业大学学报, 2001, 19(2): 220-224.  
LI SHUN-MING, LI GUO-ZHI, XU QING-YU. On obtaining accurate rotor sub-frequency signal with harmonic wavelet [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2001, 19(2): 220-224.
- [4] 张文斌, 周晓军, 杨先勇, 等. 基于谐波窗方法的转子轴心轨迹提纯[J]. 振动与冲击, 2009, 28(8): 74-82.  
ZHANG WEN-BIN, ZHOU XIAO-JUN, YANG XIAN-YONG, et al. Harmonic window method for purification of axis trace [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(8): 74-82.
- [5] 段吉安, 张小栋. 基于小波变换的轴心轨迹特征提取[J]. 振动测试与诊断, 1997, 17(1): 29-32.  
DUAN JI-AN, ZHANG XIAO-DONG. Feature extraction from the orbit of the center of a rotor based on wavelet transform [J]. Journal of Vibration Measurement & Diagnosis, 1997, 17(1): 29-32.
- [6] 安连锁, 胡爱军, 唐贵基, 等. 采用数学形态滤波器的轴心轨迹提纯[J]. 动力工程, 2005, 25(4): 550-553.  
AN LIAN-SUO, HU AI-JUN, TANG GUI-JI, et al. Purification of rotor center's orbit with mathematical morphology filters [J]. Power Engineering, 2005, 25(4): 550-553.
- [7] MARAGOS P, SCHAFER R W. Morphological filters-part I: their set theoretic analysis and relation to linear shift invariant filters [J]. Signal Processing, 1987, 35

- (8):1153-1169.
- [ 8 ] MARAGOS P, SCHAFER R W. Morphological filters-part II: their relation to median, order-statistic, and stack filters [J]. *Signal Processing*, 1987, 35 (8): 1170-1184.
- [ 9 ] 赵林度,盛昭瀚. 离散余弦变换在轴心轨迹自动识别中的应用[J]. *振动测试诊断*, 1999, 19(1):35-38.  
ZHAO LIN-DU, SHENG ZHAO-HAN. Application of discrete cosine transform to automatic identification of shaft centerline orbit [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 1999, 19(1):35-38.
- [10] 王海,郑莉媛. 水轮发电机组轴心轨迹自动识别方法研究[J]. *水力发电学报*, 2002, 78(3):73-79.  
WANG HAI, ZHENG LI-YUAN. Automatic identification of shaft orbit of hydraulic power sets[J]. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2002, 78 (3): 73-79.
- [11] DAVID T, RACHID D. Vector-valued image regularization with PDE's: a common framework for different applications[J]. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(4):1-12.
- [12] YOU Y-L, KAVEH M. Fourth-order partial differential equations for noise removal [J]. *Image Processing*, 2000, 7(10):1723-1730.
- [13] 吴宏钢,尹爱军,秦树人. 基于 PDE 的振动信号去噪研究[J]. *机械工程学报*, 2009, 45(5):91-94.  
WU HONG-GANG, YIN AI-JUN, QIN SHU-REN. Vibration signal denoising based on partial differential equation[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(5):91-94.
- [14] AHMED N U, RADAIDEH S M. A powerful numerical techniques solving zakai equation for nonlinear filtering[J]. *Dynamics and Control*, 1997, 7 (3):293-308.
- [15] RADAIDEH S M, ROUSAN M A. A new numerical technique for solving the nonlinear filtering problem[J]. *International Journal of Electronics*, 2002, 89 (7): 561-573.

(编辑 张小强)

(上接第 47 页)

- [ 6 ] CHEN R, MILOVANOVIC N. A computational study into the effect of exhaust gas recycling on homogeneous charge compression ignition combustion in internal combustion engines fuelled with methane[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2002, 41(9):805-813.
- [ 7 ] BROMLY J H, BAMES F J, MURIS S. Kinetic and thermodynamic sensitivity analysis of the NO-sensitized oxidation of methane [J]. *Combustion science and technology*, 1996, 115: 259-271.
- [ 8 ] BENDTSEN A B, GLARGORG P. Low temperature oxidation of methane: the influence of nitrogen oxides[J]. *Combustion science and technology*, 2000, 151:31-71.
- [ 9 ] DUBREUIL A, FOUCHER F, CHRISTINE M R. HCCI combustion: effect of NO in EGR [J]. *Proceedings of the Combustion Institute*, 2007, 31(2): 2879-2886.
- [10] FARAVELLI T, FRASSOLDATI A, RANZI E. Kinetic modeling of the interactions between NO and hydrocarbons in the oxidation of hydrocarbons at low temperatures[J]. *Combustion and Flame*, 2003, 132(1-2):188-207.
- [11] FARAVELLI T, FRASSOLDATI A, RANZI E. Kinetic modeling of the interactions between NO and hydrocarbons at high temperatures[J]. *Combustion and Flame*, 2003, 135(1-2):97-112.
- [12] ALZUETA M U, GLARBORG P, JOHANSEN K D. Low temperature interactions between hydrocarbons and nitric oxide: an experimental study[J]. *Combustion and Flame*, 1997, 109(1-2):25-36.
- [13] ANDREW L, ROBERT K, JAMES M. SENKIN: a fortran program for predicting Homogenous gas chemical kinetics with sensitivity analysis[R]. Sandia: Sandia National Laboratories Report, 1991.
- [14] FRENKLACH M, BOWMAN T, Smith G, et al. GRI-Mech [EB/OL]. (2000-02-01) [2010-09-18]. [http://www.me.berkeley.edu/gri\\_mech/](http://www.me.berkeley.edu/gri_mech/).
- [15] 蒋德明,陈长佑,杨嘉林,等. 高等车用内燃机原理[M]. 下册. 西安:西安交通大学出版社, 2006.

(编辑 陈移峰)