

文章编号:1000-582X(2012)01-018-06

## 湿式离合器磨合过程的多重分形谱预测

张志刚<sup>1</sup>, 石晓辉<sup>1</sup>, 邹喜红<sup>1</sup>, 安丕孚<sup>2</sup>

(1. 重庆理工大学汽车学院, 重庆 400054; 2. 重庆青山工业技术中心, 重庆 402761)

**摘要:**针对湿式离合器试验过程中磨合状态的预测问题, 结合试验过程中摩擦转矩信号的几何结构特征, 提出利用多重分形谱及其参数来预测磨合状态的新方法。阐述了基于盒计数法计算多重分形谱的方法; 给出了多重分形谱参数的定义及其与摩擦转矩信号之间的内在联系; 利用多重分形谱及其参数对某型号湿式离合器磨合过程的摩擦转矩信号进行分形表征。分析结果表明: 多重分形谱及其参数能够定量地刻画试验过程中摩擦转矩信号的几何特征, 并且随着磨合过程的进行, 谱宽、最大最小概率子集分形维数差及谱偏斜度都呈现逐渐减小趋势, 而最小奇异指数则呈现逐渐增大趋势。因此, 利用试验中摩擦转矩信号的多重分形谱能够有效地预测湿式离合器的磨合状态。

**关键词:**湿式离合器; 磨合过程; 转矩; 多重分形谱; 预测

**中图分类号:**U270.7

**文献标志码:**A

### Multifractal spectrum prediction of the running-in process of wet clutch

ZHANG Zhi-gang<sup>1</sup>, SHI Xiao-hui<sup>1</sup>, ZOU Xi-hong<sup>1</sup>, AN Pi-fu<sup>2</sup>

(1. Automobile College, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, P. R. China;

2. Chongqing Tsingshan Industrial Technology Center, Chongqing 402761, P. R. China)

**Abstract:** For predicting the running-in process of wet clutch test, a method based on multifractal spectrum and its parameters are proposed to predict the running-in state, combining with the geometry features of friction torque signal in test. Firstly, the concept of multifractal spectrum based on the box-counting method is introduced; and then the inherent relationship between the multifractal parameters and friction torque is discussed; finally, friction torque signals from a certain type wet clutch running-in test are analyzed and depicted by the multifractal spectrum and its parameters. The analytical results show that the geometry features of friction torque signals can be quantitatively described through multifractal spectrum and its parameters, and the breadth and fractal dimension difference of maximum-minimum probability subset of multifractal spectrum gradually decrease with the running-in process, while the minimum singularity exponent increases gradually with the running-in process. Therefore the running-in state of wet clutch can be effectively predicted by the multifractal spectrum of friction torque in test.

**Key words:** wet clutch; running-in process; torque; multifractal spectrum; prediction

收稿日期: 2011-08-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51005104); 重庆市教委科学技术资助项目(KJ110823)

作者简介: 张志刚(1979-), 男, 重庆理工大学副教授, 博士, 主要从事车辆传动系统状态监测与诊断技术研究,  
(E-mail) zhzhg1225@yahoo.com.cn.

湿式离合器以其性能稳定、转矩容量大、操控方便等优点,已经被广泛应用于重型工程车辆和大型船舶传动系<sup>[1]</sup>。在新型湿式离合器摩擦副性能测定试验阶段,其磨合试验作为整个性能测定试验的第一环节,其磨合质量直接影响着后续性能参数测定和评价的有效性和可靠性。为了确保湿式离合器性能参数测定可靠性,通过对湿式离合器摩擦副表面有控磨损,使其摩擦副表面达到相互适应、良好润滑的低滑磨功工作状态,因此掌握其磨合过程的变化规律,了解磨合进程状态是控制磨合进程、有效评价磨合质量的关键问题。由于相关技术封锁,国外对湿式离合器磨合研究的相关资料很难检索到,在国内湿式离合器磨合试验现场主要采用开箱拆检定性分析法对其磨合质量和状态进行评价,不仅增加了试验人员的工作量,且存在比较大的主观性。针对这一问题,王立勇等<sup>[2]</sup>提出采用油液分析法研究综合传动磨合期磨损的变化规律与特征,有效解决了综合传动不开箱条件下评价磨合质量的试验方法。孙涛等<sup>[3]</sup>采用光谱分析法预测综合传动磨合过程的试验方法,并进行了初步探讨,提出综合传动磨合状态评价的新试验方法。

自 Mandelbrot 提出分形几何理论以来,分形理论被广泛应用于自然科学、社会科学和工程技术等各学科技术领域<sup>[4-6]</sup>。一些学者从定量的角度,将分形理论应用于内燃机磨合方法的研究领域,并取得了一定成果<sup>[7-8]</sup>。笔者将多重分形理论引入湿式离合器磨合过程预测研究,通过分析湿式离合器磨合过程中摩擦转矩的多重分形谱变化规律,进一步提出采用摩擦转矩的多重分形谱作为湿式离合器磨合试验的磨合质量预测方法,为湿式离合器磨合状态的预测提供一种量化研究方法。

## 1 多重分形谱及其参数

### 1.1 多重分形谱算法

采用盒计数法计算湿式离合器磨合过程中摩擦转矩信号的多重分形谱,其算法<sup>[9-10]</sup>如下。

首先将磨合过程离合器接合段的摩擦转矩信号沿时间轴划分成多个尺度为  $\lambda$  的盒子,  $S_i(\lambda)$  为盒子尺度为  $\lambda$  时第  $i$  个盒子段摩擦转矩信号的幅值和,则整个摩擦转矩信号幅值和为  $\sum S_i(\lambda)$ ,从而尺度为  $\lambda$  的第  $i$  个盒子内幅值和的概率测度  $P_i(\lambda)$  为

$$P_i(\lambda) = \frac{S_i(\lambda)}{\sum S_i(\lambda)}. \quad (1)$$

根据式(1)可得摩擦转矩信号在尺度  $\lambda$  上概率

测度  $P_i(\lambda)$  的分布。

将所有概率测度  $P_i(\lambda)$  组成的集分为一系列子集,依据  $P_i(\lambda)$  的大小分为满足式(2)幂函数关系的子集

$$P_i(\lambda) \propto \lambda^\alpha, \quad (2)$$

其中  $\alpha$  为奇异指数,其反映分形体各尺度  $\lambda$  下物理量概率分布随尺度的变化规律。指数  $\alpha$  越小,其概率测度在第  $i$  个盒子内奇异性越强。奇异指数  $\alpha$  是有界的,则  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ ,  $\alpha_{\min}$  对应最大概率的子集,具有最强奇异性,  $\alpha_{\max}$  对应最小概率的子集,具有最弱奇异性。

对于具有相同奇异指数  $\alpha$  的盒子数  $N_\alpha(\lambda)$  与尺度  $\lambda$  存在如下关系

$$N_\alpha(\lambda) \propto \lambda^{-f(\alpha)} (\lambda \rightarrow 0). \quad (3)$$

因此,  $f(\alpha)$  表示具有相同奇异指数  $\alpha$  的子集的分形维数,由  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  可知多重分形谱  $f(\alpha)$  一般表现为光滑单峰函数,反映了奇异指数  $\alpha$  的分布情况。

通过求概率测度  $P_i(\lambda)$  的  $q$  次方加权,定义配分函数

$$\chi_q(\lambda) \equiv \sum P_i(\lambda)^q = \lambda^{\tau(q)}, \quad (4)$$

式中:  $\tau(q)$  为质量指数;  $q$  为权重因子。

当  $q > 1$  时,  $P_i(\lambda)$  中高值主导配分函数  $\chi_q(\lambda)$ ; 当  $q < 1$  时  $P_i(\lambda)$  中低值主导配分函数  $\chi_q(\lambda)$ 。

当式(4)成立时,则配分函数  $\chi_q(\lambda)$  与尺度  $\lambda$  为幂函数关系,从而质量指数  $\tau(q)$  为

$$\tau(q) = \frac{\ln \chi_q(\lambda)}{\ln \lambda}. \quad (5)$$

根据质量指数  $\tau(q) - q$  的变化特点可判断信号分形特性。当  $\tau(q) - q$  为直线时,则信号具有单重分形特性;当  $\tau(q) - q$  表现为非线性特性时,则信号具有多重分形特性。所以质量指数形状呈凸形是信号具有多重分形特性的重要标志。

根据式(5)求得质量指数  $\tau(q)$ , 并进行 Legendre 变换,可得多重分形谱

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}, \quad (6a)$$

$$f(\alpha) = q \cdot \alpha(q) - \tau(q). \quad (6b)$$

式(6)描述了分形结构对象的 3 个标度  $\alpha(q)$ 、 $\tau(q)$  和  $f(\alpha)$  的内在关系,根据这一关系可通过分别计算概率测度  $P_i(\lambda)$ 、配分函数  $\chi_q(\lambda)$ 、质量指数  $\tau(q)$  进而求出其多重分形谱  $f(\alpha)$ 。

### 1.2 多重分形谱的参数

根据式(6)可得到表征多重分形谱特征的 5 个重要参数:

1) 谱极大值  $f_{\max}$ 。多重分形谱极大值  $f_{\max}$  反映了相同概率的单元数随尺度  $\lambda$  的变化快慢, 即分形信号极大、极小峰值的变化速度。当分形信号处处奇异时, 其多重分形谱的  $f_{\max}$  为 1<sup>[11-12]</sup>。因此多重分形谱的极大值  $f_{\max}$  能够度量分形信号的局部奇异性特征。

2) 谱带宽  $\Delta\alpha$ 。

$$\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min} \quad (7)$$

带宽  $\Delta\alpha$  反映分形结构概率测度分布的均匀程度, 即表征信号的多重分形特性强弱<sup>[13-14]</sup>。 $\Delta\alpha$  越大, 其分形结构上概率测度的分布越不均匀, 信号多重分形特性越强; 反之, 信号多重分形特性越弱。因此, 可用  $\Delta\alpha$  描述信号的多重分形特征。

3) 谱偏斜度  $K$ , 记  $f_{\max}$  对应的奇异指数为  $\alpha_0$ , 则

$$K = (\alpha_0 - \alpha_{\min}) / (\alpha_{\max} - \alpha_0) \quad (8)$$

谱偏斜度刻画了多重分形谱顶点的左右偏斜程度。当  $K > 1$  时, 谱图右偏, 其值越大, 右偏越强, 即位于  $f_{\max}$  左边的谱线越多, 信号的局部奇异性越强; 当  $K < 1$  时, 谱图左偏, 其值越小, 左偏越强, 即位于  $f_{\max}$  右边的谱线越多, 信号的局部奇异性越弱; 当  $K = 1$  时, 谱图左右对称, 信号的局部奇异性介于两者之间。因此, 谱偏斜度  $K$  能够反映信号的局部奇异性。

4) 分形维数差  $\Delta f$ 。

$$\Delta f = f(\alpha_{\min}) - f(\alpha_{\max}) \quad (9)$$

$\Delta f$  表征概率测度构成的子集在最大、最小概率处其元素个数之比<sup>[14-15]</sup>。当  $\Delta f > 0$  时, 表示最大概率子集数大于最小概率子集数; 当  $\Delta f < 0$  时, 表示最大概率子集数小于最小概率子集数。因此,  $\Delta f$  也可以度量信号中波动最平稳子集数与波动最剧烈子集数之比。当  $\Delta f > 0$  时, 信号奇异性较强, 正则性较弱; 当  $\Delta f < 0$  时, 信号奇异性较弱, 正则性较强。

5) 最小奇异指数  $\alpha_{\min}$ 。最小奇异指数同样能够表征信号的局部奇异性 and 正则性强弱。 $\alpha_{\min}$  越小, 信号的局部奇异性越强, 即其局部波动越剧烈; 反之亦然。因此,  $\alpha_{\min}$  也能够反映信号的局部波动剧烈程度。

## 2 摩擦转矩信号提取及分析

### 2.1 试验方法

笔者基于湿式离合器综合性能试验台对某型湿式离合器的摩擦副进行了磨合磨损试验。被试摩擦副规格: 外径 522 mm, 内径 471 mm, 摩擦材料为铜

基粉末冶金, 对偶钢片材料为 65Mn, 被试摩擦副数 2 副; 试验润滑油为柴油机油 15W-40CD, 并设置主动端转动惯量为 5.81 kg/m<sup>2</sup>。试验过程中采用精度为 0.05% FS, 量程为  $\pm 1\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}$  的德国 GIF F1i 型转矩传感器测定摩擦转矩; 并用 PCI 型 A/D 卡转换记录各次接合过程的摩擦转矩信号, 采样频率 2 kHz。根据离合器摩擦副滑磨特点, 试验等效采用制动方式对被试湿式摩擦副进行磨合试验, 试验流程: 固定连接对偶钢片的输出端, 接合主离合器, 调节电机转速至试验条件, 主电机动力经过增速箱、主离合器和飞轮箱传递至湿式离合器输入端摩擦片, 当摩擦片转速达到设定值后主离合器自动分离, 同时接合被测湿式离合器摩擦副, 直至湿式离合器摩擦副转速差为零, 分离被测湿式离合器摩擦副, 一次磨合结束, 整个试验过程中试验润滑油温度和流量通过冷却控制系统保持恒定, 试验台原理如图 1 所示。

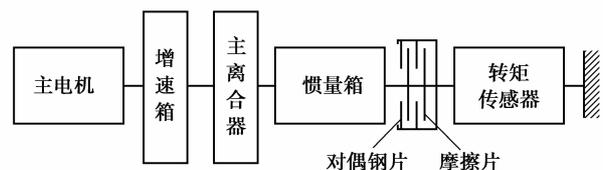


图 1 试验台原理框图

湿式离合器摩擦副整个磨合过程依照表 1 中工况设置循环连续磨合, 直到所有试验工况完成。

表 1 磨合试验工况

工况	接合比压 /MPa	转速差 /(r·min <sup>-1</sup> )	接合次数
1	0.4	500	50
2	0.6	800	150
3	0.6	1 200	100

### 2.2 摩擦转矩自相相似分析

由于湿式离合器接合过程压紧段的摩擦转矩主要由摩擦副表面机械摩擦产生, 因此, 摩擦副表面形貌特征直接影响该阶段摩擦转矩的变化特点, 所以笔者仅对压紧段摩擦转矩进行分析。图 2 给出了磨合试验中某次接合过程的摩擦转矩变化曲线及其压紧段曲线。

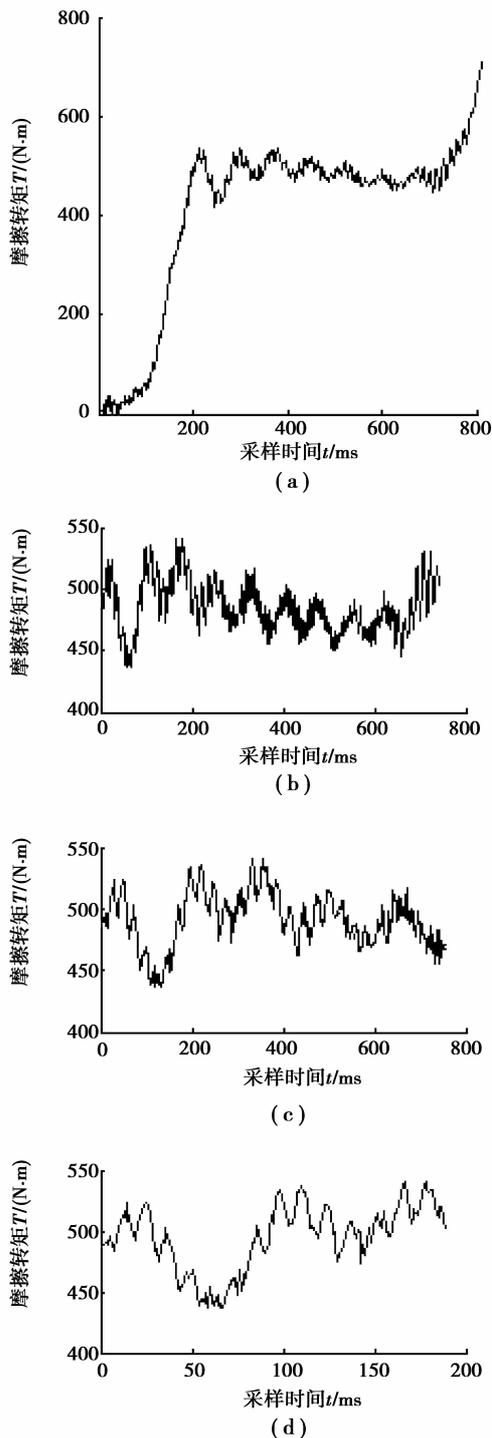


图 2 摩擦转矩信号自相似性

图 2(a) 是湿式离合器接合全过程摩擦转矩曲线,图 2(c)、(d) 的数据是图 2(b) 中数据的局部放大,比较图 2(b)、(c) 和 (d) 曲线特征可知,三者只在高频特征的疏密程度不同,而其低频波动近乎相同。因此,湿式离合器磨合过程中接合压紧段摩擦转矩信号具有典型自相似性,这一特性为应用分形方法研究摩擦转矩信号提供了理论应用基础。

### 2.3 摩擦转矩多重分形分析

由上述分析可知,湿式离合器磨合过程中压紧段的摩擦转矩具有典型分形特征,而多重分形谱能够全面精细地对分形结构上几何特征和局部尺度行为进行描述和度量,所以本节运用多重分形谱对湿式离合器磨合试验的摩擦转矩信号进行分形表征。

由于磨合试验工况 1 的 50 次磨合是为了预磨合湿式离合器摩擦副,所以对前 50 次接合过程的摩擦转矩信号不予分析。依据湿式离合器磨合试验的经验可知,湿式离合器磨合一般需要完成工况 3 的部分接合才能达到磨合要求。由于文章篇幅限制,笔者仅给出磨合试验工况 3 中部分接合过程中摩擦转矩信号质量指数  $\tau(q)$  与多重分形谱  $f(\alpha)$  结果,如图 3、4 所示。图 5 给出了工况 3 的多重分形谱参数随总接合次数的变化规律。表 2 给出了工况 2 的多重分形谱参数的计算结果。

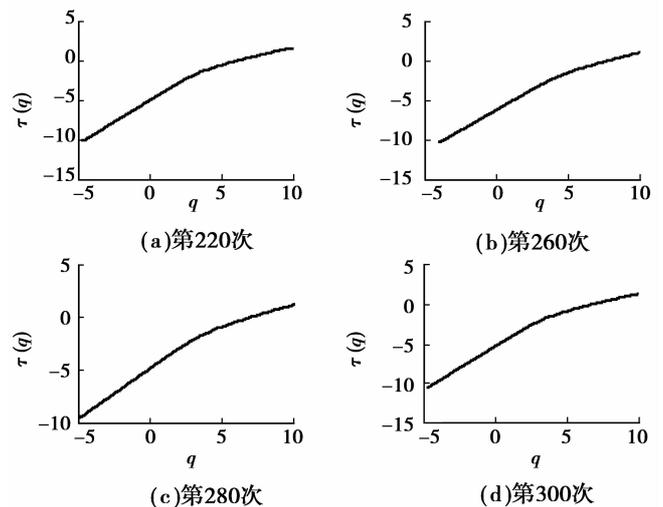


图 3 工况 3 不同接合过程的摩擦转矩质量指数

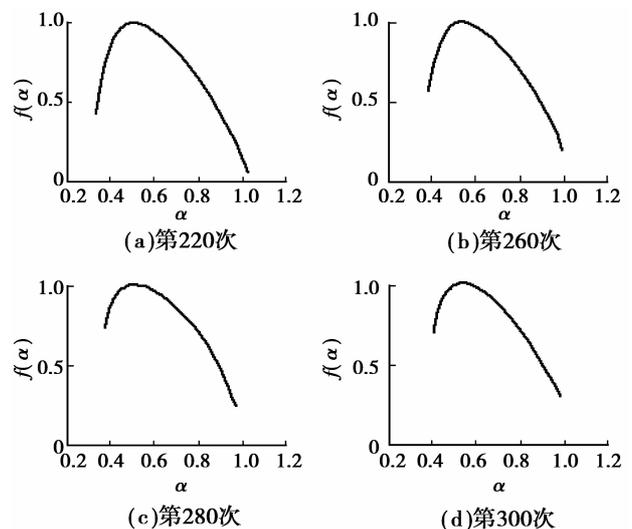


图 4 工况 3 不同接合过程的摩擦转矩多重分形谱

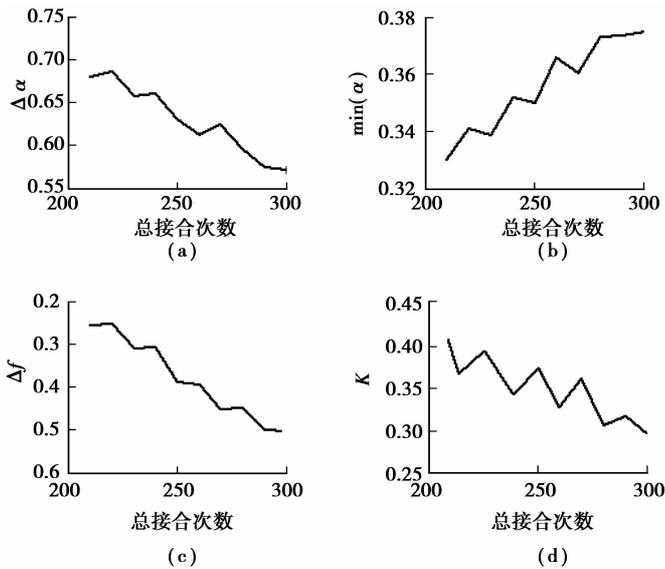


图 5 工况 3 多重分形谱参数随接合次数变化曲线

表 2 工况 2 不同接合过程的多重分形谱参数

总接合次数	$\Delta\alpha$	$\alpha_{\min}$	$\Delta f$	$K$	$f_{\max}$
60	0.719 2	0.294 5	-0.129 7	0.290 4	1.000 0
80	0.749 8	0.308 7	-0.135 6	0.296 8	1.000 0
100	0.731 6	0.312 5	-0.147 8	0.301 9	1.000 0
120	0.709 3	0.299 1	-0.152 3	0.293 6	1.000 0
140	0.727 4	0.301 6	-0.184 5	0.289 4	0.999 7
160	0.689 6	0.318 3	-0.175 2	0.312 8	1.000 0
180	0.717 8	0.302 2	-0.196 7	0.334 6	0.999 4
200	0.695 1	0.319 5	-0.210 8	0.302 9	1.000 0

由图 3 可知,各次接合过程的质量指数  $\tau(q)$  均为上凸函数,即  $\tau(q)$  与  $q$  之间存在非线性关系,表明磨合过程中摩擦转矩信号具有多重分形特性。

从图 4(a)–(d) 曲线特征可知,随磨合过程的进行,摩擦转矩信号多重分形谱的左钩部分谱线逐渐减小,且当减小至某一值后将不再有明显变化,即图 4(c) 和图(d) 的谱图十分相似,这表明在湿式离合器磨合后期,其接合过程中摩擦转矩信号的多重分形特性逐渐趋于稳定。

从图 5 和表 2 中谱带宽  $\Delta\alpha$  变化可知,在磨合过程前期(工况 2),谱带宽  $\Delta\alpha$  值较大且波动范围较宽,这是因为磨合前期摩擦副的表面比较粗糙,表面粗糙峰间匹配性较差,从而加剧了摩擦副之间摩擦转矩的变化,导致前期摩擦转矩信号的局部波动较大。然而,随着摩擦副磨合的深入,摩擦副表面粗糙度和形貌逐渐匹配,有效减小了摩擦副表面间摩擦转矩的变化量,从而使接合过程中摩擦转矩信号的

波动逐渐降低。因此,在磨合过程后期多重分形谱的谱宽  $\Delta\alpha$  及其波动也逐渐减小。根据以上分析可知,磨合过程前期摩擦转矩信号的多重分形性相对较强;磨合过程后期摩擦转矩信号的多重分形性相对较弱,所以依据谱带宽  $\Delta\alpha$  变化规律可以有效预测湿式离合器的磨合过程。

随着磨合过程最小奇异指数  $\alpha_{\min}$  从 0.294 5 逐渐增大至 0.375 0,这进一步表明磨合前期摩擦转矩信号的奇异性强、正则性弱;磨合后期其奇异性逐渐减弱,正则性增强,最终趋于某一范围内,这与谱带宽的预测结论一致。

由分形维数差  $\Delta f < 0$  可知,湿式离合器磨合过程中摩擦转矩信号最大概率子集数始终小于最小概率子集数。随着磨合过程进行,其分形维数差  $\Delta f$  逐渐减小,并收敛于 -0.505,如图 5(c) 所示。这表明磨合过程的摩擦转矩信号中波动最平稳子集数逐渐增多,波动最剧烈子集数逐渐减少,当湿式离合器达到磨合状态时两个子集数差达到稳定值。因此,  $\Delta f$  的变化也可用于预测湿式离合器磨合过程。

由谱偏斜度  $K < 1$  可知,磨合过程中摩擦转矩信号的多重分形谱始终处于左偏,并且随磨合过程其偏斜度逐渐减弱。这进一步表明随着磨合过程进行,其摩擦转矩信号奇异性渐弱,正则性渐强。这与其他参数的预测结论相吻合。因此,谱偏斜度  $K$  亦能用于磨合过程预测。

综上所述可知,湿式离合器磨合过程的摩擦转矩信号几何结构复杂,几乎处处奇异,具有典型的多重分形特性。利用其多重分形谱及其参数可以从不同尺度对摩擦转矩信号进行敏感地刻画和反映。因此,利用多重分形谱及其参数可以有效地预测湿式离合器的磨合过程。

### 3 结 论

1) 针对湿式离合器磨合过程中摩擦转矩信号的结构特点,提出了利用多重分形谱及其参数表征和度量湿式离合器的磨合状态,为不开箱情况下预测湿式离合器磨合状态提供了新方法。

2) 通过对磨合试验过程中压紧段摩擦转矩信号的自相似性分析可知,压紧段摩擦转矩信号具有典型的分形特征。

3) 多重分形谱及其参数能够很好地反映出湿式离合器磨合过程中摩擦转矩信号的几何结构特征,运用谱参数  $\Delta\alpha$ 、 $\alpha_{\min}$ 、 $\Delta f$  及  $K$  可以定量地表征摩擦转矩信号的局部奇异性 and 正则性,并预测湿式离合器的磨合状态。

## 参考文献:

- [1] 林腾蛟,张世军,吕和生. 湿式摩擦离合器流道结构对油压分布的影响[J]. 重庆大学学报, 2010, 33(3): 13-18.  
LIN TENG-JIAO, ZHANG SHI-JUN, LV HE-SHENG. Analysis of oil pressure distribution influenced by channel flow structure of wet friction clutch [J]. Journal of Chongqing University, 2010, 33(3): 13-18.
- [2] 王立勇,马彪,郑长松,等. 基于油液检测的综合传动台架磨合期磨损规律研究[J]. 润滑与密封, 2008, 33(7): 35-38.  
WANG LI-YONG, MA BIAO, ZHENG CHANG-SONG, et al. A study on running-in wear of power-shift steering transmission based on oil monitoring [J]. Lubrication and Engineering, 2008, 33(7): 35-38.
- [3] 孙涛,马彪,王立勇,等. 基于光谱分析的综合传动台架磨合试验方法研究[J]. 机械设计, 2008, 25(6): 39-41.  
SUN TAO, MA BIAO, WANG LI-YONG, et al. Research on grinding-in testing method of synthetic transmission platform based on spectrum analysis [J]. Journal of Machine Design, 2008, 25(6): 39-41.
- [4] ZHU H, GE S R, HUANG X L, et al. Experimental study on the characterization of worn surface topography with characteristic roughness parameter [J]. Wear, 2003, 255(1/6): 309-314.
- [5] DU G X, NING X X. Multifractal properties of Chinese stock market in Shanghai[J]. Physica A, 2008, 387(1): 261-269.
- [6] CHAUDHARI A, SANDERS C C, LEE S L. Multifractal analysis of growing surfaces[J]. Applied Surface Science, 2004, 238(8): 513-517.
- [7] 朱华,葛世荣. 摩擦力和摩擦振动的分形行为研究[J]. 摩擦学学报, 2004, 24(5): 433-437.  
ZHU HUA, GE SHI-RONG. Study on the fractal behaviors of frictional forces and vibrations[J]. Tribology, 2004, 24(5): 433-437.
- [8] 李国宾,段树林,于洪亮,等. 发动机振动信号特征参数的多重分形研究[J]. 内燃机学报, 2008, 26(1): 87-91.  
LI GUO-BIN, DUAN SHU-LIN, YU HONG-LIANG, et al. Study on characteristic parameters of engine vibration signal based on multifractal[J]. Transactions of CSICE, 2008, 26(1): 87-91.
- [9] 李国宾,关德林. 振动信号多重分形分析改进算法[J]. 测试技术学报, 2006, 20(6): 543-548.  
LI GUO-BIN, GUAN DE-LIN. The improved multifractal analysis algorithm for vibration signal[J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2006, 20(6): 543-548.
- [10] GE S R, CHEN G A, ZHANG X Y. Fractal characterization of wear particle accumulation in the wear process[J]. Wear, 2001, 251(1/12): 1227-1233.
- [11] ARTDE D K. Multifractal spectra of INGaN/GaN self-Assembled quantum dots films [J]. Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine, 2010, 1(3): 1-7.
- [12] LIU C, JIANG X L, LIU T, et al. Multifractal analysis of the fracture surfaces of foamed polypropylene/polyethylene blends[J]. Applied Surface Science, 2009, 255(11): 4239-4245.
- [13] 钟明寿,龙源,谢全民,等. 基于分形盒维数和多重分形的爆破地震波信号分析[J]. 振动与冲击, 2010, 29(1): 7-11.  
ZHONG MING-SHOU, LONG YUAN, XIE QUAN-MIN, et al. Signal analysis for blasting seismic wave based on fractal box-dimension and multi-fractal[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(1): 7-11.
- [14] 彭志科,何永勇,卢青,等. 小波多重分形及其在振动信号分析中应用的研究[J]. 机械工程学报, 2002, 38(8): 59-63.  
PENG ZHI-KE, HE YONG-YONG, LU QING, et al. Wavelet multifractal spectrum: application to analysis vibration signals [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(8): 59-63.
- [15] 李平,胡可乐,汪秉洪. 多重分形谱在材料分析中的应用研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 34(1): 77-81.  
LI PING, HU KE-LE, WANG BING-HONG. Design and application about computing program of material multifractal spectrum [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2004, 34(1): 77-81.
- [16] YU H S, SUN X, LUO S F, et al. Multifractal spectra of atomic force microscope images of amorphous electroless Ni-Cu-P alloy[J]. Applied Surface Science, 2002, 191(3): 123-127.

(编辑 张 革)