

文章编号:1000-582X(2012)02-092-06

测量仪器校准间隔的滚动灰色自助融合预测

孙 群^a, 赵 颖^a, 潘全科^b

(聊城大学 a. 汽车与交通工程学院; b. 计算机学院, 山东 聊城 252059)

摘 要:针对测量仪器校准间隔的预测问题,在小样本条件下,采用滚动灰色自助融合模型进行校准间隔预测。滚动灰色自助融合模型综合灰色预测方法和自助再抽样方法,在灰微分方程建模时,通过自助再抽样,充分挖掘出系统信息。采用滚动灰色自助融合模型进行测量校准间隔预测,不仅能较准确地预测瞬时值,而且能够预测置信区间,克服了其他校准间隔预测模型仅仅预测瞬时值的缺点,降低了预测风险。实验表明,与其他校准间隔预测模型相比,滚动灰色自助融合模型的预测瞬时值、预测上限值和下限值都较好地描述出历史校准数据的波动趋势,预测可靠性更高,适合用于测量仪器校准间隔的预测。

关键词:测量仪器;校准;校准间隔;预测;滚动灰色自助融合模型

中图分类号:TH701

文献标志码:A

Prediction of calibration interval for a measuring instrument using rolling grey bootstrap fusion model

SUN Qun^a, ZHAO Ying^a, PAN Quan-ke^b

(a. School of Automobile and Transportation Engineering;

b. School of Computer Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, Shandong, P. R. China)

Abstract: A rolling grey bootstrap fusion model (RGBFM(1,1)) is proposed to predict calibration interval of a measuring instrument under small sample. The model combines GM(1,1) model with bootstrap method. Bootstrap re-sampling is used in the process of modeling the grey differential coefficient function to mine more information about systems. Both the instantaneous value and interval assessment values can be predicted using RGBFM(1,1), which can reduce prediction risk of calibration interval. In contrast, other prediction models only predict the instantaneous value. Experiments show that the RGBFM(1,1) can exactly describe the random wave of original sample data in prediction of instantaneous value, interval upper limit and lower limit, and has higher prediction reliability. Therefore, the RGBFM(1,1) is suitable for the prediction of calibration interval for a measuring instrument.

Key words: measuring instrument; calibration; calibration interval; prediction; rolling grey bootstrap fusion model

为保证测量仪器的精度,通常按照规定的校准间隔对其进行校准。校准间隔一般由大量同类仪器

经过统计分析确定,由生产厂家推荐使用。然而,由于生产工艺、使用频率、使用环境和使用状况的差

收稿日期:2011-08-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60874075)

作者简介:孙群(1979-),男,博士,主要从事测试计量技术及仪器方面的研究,(Tel)0635-8239272,
(E-mail)sunxiaoqun97@163.com。

别,采用固定校准间隔的校准方式,导致发生不足校准或过剩校准的概率增加。根据测量仪器的实际状态,进行校准间隔的预测,可有效地解决这一问题^[1-2]。当前,校准间隔的主要预测方法是对历史校准数据建立相应的预测模型,一般分为统计模型和非统计模型两类。统计模型不仅需要大量的历史校准数据,而且必须保证校准过程服从正态分布或其他附加条件,才能得到比较理想的结果^[3-6]。然而,实际校准过程中,特别是在校准初期,却很难满足这些条件。因此,小样本条件下,基于灰色理论的非统计模型得到了广泛的应用^[7-10]。

一般来讲,灰色预测 GM(1,1)模型更关心瞬时预测值的大小,而难以有效预测与检验置信区间。在小样本条件下,倘若仅仅以瞬时预测值作为调整校准间隔的唯一依据,会导致预测风险增大。灰色自助融合模型有机地将自助原理和灰色预测 GM(1,1)建模原理结合起来,进行系统的区间估计与预测^[11],可有效地降低预测风险。为此,本文将灰色自助融合模型引入校准间隔的预测,通过新老数据的交替,实现校准间隔区间的滚动估计,提高预测的可靠性,并完善测量仪器校准间隔预测与优化理论。

1 校准数据分析

假设某测量仪器经过 n 次校准后,得到的历史校准数据序列为

$$\mathbf{Y}^{(0)} = \{y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n)\}。 \quad (1)$$

某校准时间为 t 时,校准数据的数学模型可表示为:

$$y^{(0)}(t) = [\mu + b + \delta_1(t)] + [\alpha(t) + \beta(t) + \lambda(t) + e(t) + \delta_2(t)]。 \quad (2)$$

式中, $y^{(0)}(t)$ 为校准值; μ 为标称值; b 为测量仪器的系统偏差; $\delta_1(t)$ 为测量仪器的老化趋势项; $\alpha(t)$ 为计量标准引入的随机误差; $\beta(t)$ 为测量条件引入的随机误差; $\lambda(t)$ 为重复性检验引入的随机误差; $e(t)$ 为其它因素引入的随机误差; $\delta_2(t)$ 为随机波动趋势项。

简化模型(2)后,得到

$$y^{(0)}(t) = T(t) + R(t)。 \quad (3)$$

式中, $T(t) = \mu + b + \delta_1(t)$ 为 t 时刻校准数据的趋势项; $R(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \lambda(t) + e(t) + \delta_2(t)$ 为 t 时刻校准数据的随机项。

测量仪器的校准结果表现为动态发展趋势,趋势项 $T(t)$ 反映了测量仪器随自身惯性、使用时间、环境等因素影响引起的长期确定性变化趋势,代表趋势性成分;随机项 $R(t)$ 则反映了由于随机因素影响导致的随机波动,代表随机性成分。一般来讲,测量仪器校

准周期相对较长,历史校准数据样本数量较小,具备小样本数据特征,在校准初期尤为如此。而且,受各种因素影响,校准数据序列呈非线性的特点。

2 滚动灰色自助 RGBFM(1,1) 预测模型

2.1 滚动灰色自助法的基本思想

在小样本数据预测研究中,灰色 GM(1,1)模型和自助原理(Bootstrap)^[12-13]得到了广泛的关注。由于样本数据过少,灰色预测模型 GM(1,1)更关心瞬时预测值的大小,灰色微分方程的预测机制很完善,但难以有效地预测与检验置信区间。自助原理(Bootstrap)虽然为预测及检验提供了独特的再抽样方法,可以估计置信区间,但因缺乏有效的预测机制而使置信区间变小,从而预测的准确性降低和误差增大。为此,将二者有机地结合起来,互补这两种方法的优缺点,通过新信息与老信息的新陈代谢,可有效地解决小样本数据下测量仪器校准间隔的动态区间估计与预测问题。

2.2 滚动灰色自助法预测校准间隔的基本步骤

对式(1)表示的历史校准数据序列,采用滚动灰色自助融合预测模型的基本步骤如下^[11,14]:

1)从 $\mathbf{Y}^{(0)}$ 中取与时刻 t 紧邻时刻的前 m 个数据,构成时刻 t 的滚动融合子序列向量为

$$\mathbf{Y}_m = \{y_m(u)\} (u = t - m + 1, t - m + 2, \dots, t; t \geq m)。 \quad (4)$$

式中, u 表示 u 时刻; m 为滚动因子,表示与时刻 t 紧邻的前 m 个数据(包括时刻 t 的数据)。

2)在时刻 t ,用 t 时刻以前的 \mathbf{Y}_m 评估时刻 t 的属性状态,从 \mathbf{Y}_m 中等概率可放回地随机抽取 1 个数据,抽取 m 次,得到一个自助样本,它有 m 个数据。连续重复 B 次,得到 B 个自助再抽样样本,用向量表示为:

$$\mathbf{X}_{\text{Bootstrap}} = (X_1, X_2, \dots, X_b, \dots, X_B)。 \quad (5)$$

式中, \mathbf{X}_b 为第 b 个自助样本。

$$\mathbf{X}_b = \{x_b(u)\} (b = 1, 2, \dots, B)。 \quad (6)$$

式中, $x_b(u)$ 表示 \mathbf{X}_b 中第 u 个自助再抽样数据。

3)根据灰色 GM(1,1)模型,假设 X_b 的一次累加生成序列向量为

$$\mathbf{X}_b^* = \{x_b^*(u)\} = \left\{ \sum_{j=t-m+1}^u x_b(j) \right\}。 \quad (7)$$

再设均值生成序列向量为:

$$\mathbf{Z}_b = \{z_b(u)\} = \{0.5x_b^*(u) + 0.5x_b^*(u-1)\}, \\ (u = t - m + 2, t - m + 3, \dots, t)。 \quad (8)$$

4)在初始条件 $x_b^*(t-m+1) = x_b(-m+1)$ 下,

根据灰微分方程,估计问题的最小二乘解为

$$\begin{aligned} \hat{x}_b^*(j+1) = [x_b(t-m+1) - c_2/c_1]e^{-c_1j} + \\ c_2/c_1, (j = t-1, t). \end{aligned} \quad (9)$$

式中, c_1 和 c_2 为

$$(c_2, c_1)^T = (D^T D)^{-1} D^T (Y_b)^T, (u = t-m+2, \\ t-m+3, \dots, t-1, t). \quad (10)$$

式中, $D = (-Z_b, I)^T, I = (1, 1, \dots, 1)$ 。

5)由累减生成,时刻 $\omega = t+1$ 的预测值可以表示为

$$\hat{x}_b(\omega) = \hat{x}_b^*(\omega) - \hat{x}_b^*(\omega-1), \omega = t+1.$$

6)在时刻 ω ,有 B 个数据,可构成如下序列向量 $\mathbf{X}_\omega = \{x_b(\omega)\}, (b = 1, 2, \dots, B); \omega = t+1\}$ 。

$$(11)$$

由于 B 很大,故可以用 \mathbf{X}_ω 建立 t 时刻关于属性 y_m 的灰色自助频率函数 F_ω 。

$$F_\omega = F_\omega(y_m). \quad (12)$$

2.3 滚动灰色自助法评估的参数指标

目前,对动态数据序列的实时评估,仍然没有固定的参数指标来全面评价,选取瞬时加权值等 11 个参数作为校准间隔评估的参数指标^[14-15]。

2.3.1 瞬时加权值

在 t 时刻校准间隔的估计真值用加权均值表示为

$$X_0 = X_0(\omega) = \sum_{q=1}^Q F_{\omega q} x_{mq}. \quad (13)$$

式中, X_0 为用加权均值表示的 t 时刻的估计值; Q 为将 \mathbf{X}_ω 分为 Q 组; q 为第 q 组, $q=1, 2, \dots, Q$; x_{mq} 为第 q 组中值; $F_{\omega q}$ 为对应于 x_{mq} 的灰自助频数。

2.3.2 瞬时刻最大率值

可表示为

$$X_0 = x_{mq} \mid F_{\omega q} \rightarrow \max_{i=1}^Q F_{\omega i}. \quad (14)$$

式中, X_0 为用最大率值表示的 t 时刻的估计值; Q 为将 \mathbf{X}_ω 分为 Q 组; q 为第 q 组, $q=1, 2, \dots, Q$; x_{mq} 为第 q 组中值; $F_{\omega q}$ 为对应于 x_{mq} 的灰自助频数。

2.3.3 估计平均值

估计平均真值可从整体上评估属性参数的量值大小,可表示为

$$X_{0\text{mean}} = \frac{1}{T-m+1} \sum_{k=m}^T X_0(k). \quad (15)$$

式中, T 为数据序列 X 的数据个数; m 为滚动因子。

2.3.4 动态估计区间

假设显著性水平为 $\alpha \in [0, 1]$, 则置信水平

$$P = (1 - \alpha) \times 100\%. \quad (16)$$

在 t 时刻,在置信水平 P 下,对属性参数真值的估计区间

$$[X_L, X_U] = [X_L(\omega), X_U(\omega)] = [X_{\alpha/2}, X_{(1-\alpha)/2}]. \quad (17)$$

式中: $X_{\alpha/2}$ 为对应频数为 $\alpha/2$ 的属性参数值 x_m ; $X_{(1-\alpha)/2}$ 为对应频数为 $(1-\alpha)/2$ 的属性参数值 x_m ; X_L 为估计区间的下边界值; X_U 为估计区间的上边界值。

2.3.5 预测可靠度

假设研究的总时间单位数为 T ,如果有 h 个实际的属性参数值位于估计区间 $[X_L, X_U]$ 之外,则对真值估计的可靠性定义为

$$P_B = \left(1 - \frac{h}{t-m+1}\right) \times 100\%. \quad (18)$$

2.3.6 估计值变动量

可表示为

$$dX_0 = \max_{k=m}^T X_0(k) - \min_{k=m}^T X_0(k). \quad (19)$$

式中, dX_0 为估计真值变动量; T 为数据序列 X 的数据个数; m 为滚动因子。

2.3.7 动态不确定度

可表示为

$$U = U(\omega) = X_U - X_L. \quad (20)$$

式中, U 为 ω 时刻在置信水平 P 下的估计不确定度; X_L 为估计区间的下边界值; X_U 为估计区间的上边界值。

2.3.8 最小不确定度

可表示为

$$U_{\min} = \min_{t=m}^T U(t). \quad (21)$$

式中, T 为数据序列 X 的数据个数; m 为滚动因子。

2.3.9 最大不确定度

可表示为

$$U_{\max} = \max_{t=m}^T U(t). \quad (22)$$

式中, T 为数据序列 X 的数据个数; m 为滚动因子。

2.3.10 平均不确定度

可表示为

$$U_{\text{mean}} = \frac{1}{T-m+1} \sum_{k=m}^T U(k) \mid P_B = 100\%. \quad (23)$$

式中, T —数据序列 X 的数据个数; m —滚动因子。

2.3.11 平均标准差

可表示为

$$S_{\text{mean}} = \frac{1}{T-m+1} \sum_{k=m}^T \sqrt{\sum_{q=1}^Q F_{\omega q} (x_{mq} - X_0)^2}. \quad (24)$$

式中: T 为数据序列 X 的数据个数; m 为滚动因子; Q 为将 X_w 分为 Q 组; q 为第 q 组, $q=1, 2, \dots, Q$; X_0 为用加权均值表示的 t 时刻的估计值; x_{mq} 为第 q 组中值; F_{wq} 为对应于 x_{mq} 的灰自助频数。

上述指标中, 估计平均真值、估计真值变动量、估计可靠度、平均不确定度、最小不确定度、最大不确定度和平均标准差, 可作为属性参数的整体评价指标。

3 实 验

实验采用文献[7]提供的数据, 用数字万用表 AgilentE1412A 对多产品校准器 FLUKE5500A 进行长期校准监控, 在 10 V 标称量值下, 要求测量不确定度小于 0.01%, 得到 12 个数据, 如表 1 所示。

表 1 原始样本数据

| 序号 | 时间 | 不确定度/% |
|----|---------|---------|
| 1 | 07/2003 | 0.006 2 |
| 2 | 08/2003 | 0.006 6 |
| 3 | 09/2003 | 0.006 3 |
| 4 | 10/2003 | 0.007 0 |
| 5 | 11/2003 | 0.006 8 |
| 6 | 12/2003 | 0.007 1 |
| 7 | 01/2004 | 0.008 1 |
| 8 | 02/2004 | 0.007 4 |
| 9 | 03/2004 | 0.008 0 |
| 10 | 04/2004 | 0.008 1 |
| 11 | 05/2004 | 0.007 9 |
| 12 | 06/2004 | 0.008 3 |

采用滚动灰色自助融合模型时, 首先需要确定滚动因子 m 和抽样样本个数 B 。 m 和 B 的选择直接影响到模型的预测精度, 目前, 对于这两个参数的选取仍然没有成熟的理论依据, 只能通过试验结合经验而确定。 一般来讲, 参数 m 的取值为 4 到 8, 参数 B 的取值为 500 到 10 000^[11,14]。 根据预测试验比较, 综合考虑原始样本个数、预测精度、预测速度等问题, 在本例中确定参数为: $m=4, B=1000$ 。

采用滚动灰色自助融合模型预测第 5 至 12 个数据, 得到整体统计指标如下: ① 估计平均值(%): $X_{mean}=0.007 336$; ② 预测可靠度: $P_B=100\%$; ③ 估计值变动量(%): $dX=0.001 560$; ④ 最小不确定度(%): $U_{min}=0.001 168$; ⑤ 最大不确定度(%): $U_{max}=0.003 792$; ⑥ 平均不确定度(%): $U_{mean}=0.002 495 5$; ⑦ 平均标准差(%): $s_{mean}=0.000 573$ 。 滚动灰色自助融合模型的估计区间如图 1 所示。

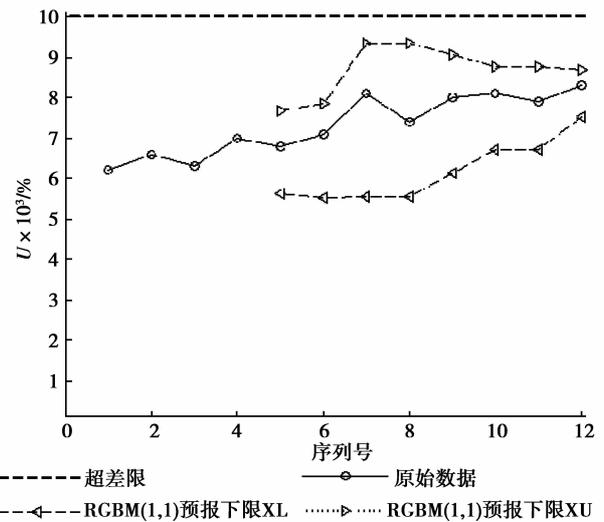


图 1 滚动灰色自助模型的预测区间

图 1 中, 滚动灰色自助融合模型的预测上限值和下限值的波动趋势较好地跟随了原始样本数据波动趋势, 第 7 和第 8 个数据的预测上下限较宽, 不确定度稍大。 其余数据的预测上下限适中, 不确定度较小。 这是因为, 第 7 个数据为 0.0081%, 不仅远远大于前 6 个数据, 而且大于或等于之后的第 9 至 11 个数据, 说明该数据受随机因素影响较大。

在原始数据中, 取第 5 至第 11 个数据作为拟合数据、第 12 个数据作为预测数据, 采用滚动灰色自助法进行最大概率估计和均值估计。 为了便于比较, 采用传统灰色 GM(1,1) 模型进行拟合与预测, 并且, 在第 9 到 12 个数据引入灰色马尔可夫模型^[7]和灰色组合模型^[8]。 各个模型的拟合与预测曲线如图 2 所示。

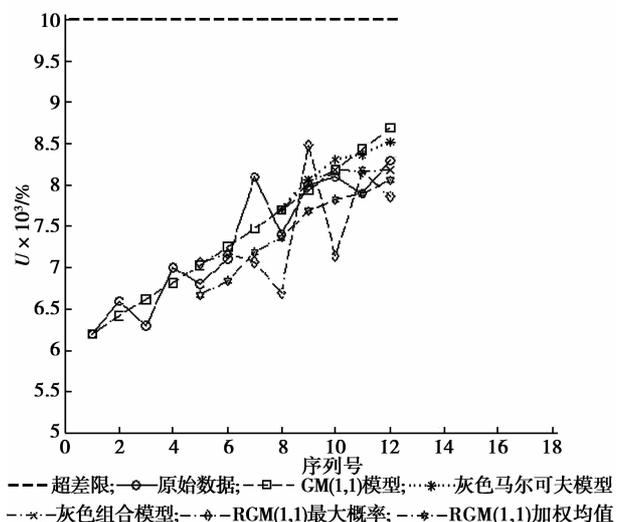


图 2 各个模型的拟合与预测曲线

预测模型的误差指标选用最小均方差 MSE (Mean Squared Error), 定义如下

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{x}^{(i)} - x^{(i)})^2. \quad (25)$$

计算得到第 9 到 12 个数据中, 各个模型拟合与预测的最小均方差(MSE), 如表 2 所示。

表 2 各个模型的预测误差

| 预测模型 | 拟合 MSE | 预测 MSE |
|------------------|-------------------------|----------------------------|
| 灰色 GM(1,1)模型 | $9.743\ 21 \times 10^0$ | $1.512\ 20 \times 10^1$ |
| 灰色马尔可夫模型 | $8.954\ 36 \times 10^0$ | $1.442\ 33 \times 10^0$ |
| 灰色组合模型 | $2.663\ 34 \times 10^0$ | $6.402\ 43 \times 10^{-1}$ |
| 滚动灰色自助融合模型最大概率估计 | $4.065\ 19 \times 10^1$ | $1.835\ 60 \times 10^1$ |
| 滚动灰色自助融合模型加权均值估计 | $5.785\ 20 \times 10^0$ | $5.953\ 60 \times 10^0$ |

图 2 中, 灰色 GM(1,1)模型的预测曲线接近于一条直线, 拟合与预测误差均较大, 不能很好地跟随原始样本的波动。后 4 个数据引入灰色马尔可夫模型和灰色组合模型后, 得到了一定的改善, 一定程度上, 提高了拟合与预测精度。但是, 灰色马尔可夫模型中状态的划分直接影响到预测精度, 目前并没有统一的依据和标准, 随机性较大。灰色组合模型中的显性模型求解一时间序列自回归模型和 BP 神经网络模型, 需要较大的样本, 待累积到一定的数据后, 才能提高精度。在小样本下, 预测结果随机性较大。滚动灰色自助融合模型中, 虽然最大概率估计值在拟合与预测误差方面相对稍处于劣势, 然而, 其加权均值估计值拟合与预测精度相对较高。更难能可贵的是, 最大概率估计和加权均值估计的拟合与预测曲线均较好地跟随了原始样本的波动趋势, 更能反映原始样本的变化规律, 具有更高的可靠性。

对于测量仪器的校准间隔预测来讲, 更注重的是预测样本的随机波动和上下限估计值。据此, 预测校准数据是否超差, 从而适当地调整校准间隔。在此方面, 滚动灰色自助融合模型优势明显, 可靠性更高。该实验中, 由于测量仪器的精度要求较高, 综合考虑测量仪器的操作环境、使用频率、使用状况等因素, 为避免随机因素导致的预测风险, 采用滚动灰色自助融合模型一步预测。预测得到第 12 个校准数据不确定度的加权均值估计值为 0.008 063%, 最

大概率估计值为 0.007 866%, 估计区间为 [0.007 517%, 0.008 684%]。预测值和预测区间上下限值, 均远远小于规定不确定度值 0.01%, 故在今后 1 个月内可以不采用校准监控。第 12 个预测数据的实际值为 0.008 3%, 落在估计区间内, 验证了预测模型的可靠性。

4 结 论

将滚动灰色自助融合模型引入测量仪器的校准间隔预测, 在小样本条件下, 不仅能得到瞬时值估计, 而且能得到区间估计。从而, 预测测量仪器的校准不确定度是否超差, 进而优化和调整校准间隔。理论分析和实际实验均表明, 滚动灰色自助融合模型的预测曲线较好地跟随了原始样本的波动趋势, 与其他预测模型相比, 优势更明显, 可靠性更高, 适用于校准间隔的预测。

5 致 谢

论文写作过程中, 得到了河南科技大学夏新涛教授的精心指导和帮助, 在此表示诚挚的感谢!

参考文献:

- [1] Standards Australia. AS/NZS ISO 10012:2004 Measurement management systems: Requirements for measurement processes and measuring equipments [S]. New Zealand; Standards Australia, 2004.
- [2] 中华人民共和国国家标准委员会. GB/T 19022.1. 测量设备的质量保证要求第 1 部分: 测量设备的计量确认体系[S]. 北京: 中国标准出版社, 1994.
- [3] NUNZI E, PANFILO G, TAVELLA P, et al. Stochastic and reactive methods for the determination of optimal calibration intervals [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2005, 54 (4): 1565-1569.
- [4] MACCII D, TAVELLA P, PERONE E, et al. Accuracy comparison between techniques for the establishment of calibration intervals: application to atomic clocks [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2004, 53 (4): 1167-1172.
- [5] CARBONE P. Performance of simple response method for the establishment and adjustment of calibration intervals [J]. Instrumentation and Measurement, 2004, 53(3): 730-735.

- [6] PANFILO G, TAVELLA P, NUNZI E, et al. Optimal calibration interval in case of integrated brownian behavior; the example of a rubidium frequency standard [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2006, 55 (5):1713-1719.
- [7] 赵瑞贤, 孟晓风, 王国华. 基于灰色马尔柯夫预测的测量仪器校准间隔动态优化[J]. 计量学报, 2007, 28(2): 184-187.
ZHAO RUI-XIAN, MENG XIAO-FENG, WANG GUO-HUA. Optimizing calibration interval of measuring instrument dynamically based on gray-markov forecasting model[J]. Acta Metrologica Sinica, 2007, 28(2): 184-187.
- [8] 孙群, 赵颖, 孟晓风. 基于灰色组合模型的校准间隔优化仿真[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(9): 2296-2299.
SUN QUN, ZHAO YING, MENG XIAO-FENG. Optimum simulation of calibration interval based on grey combined model [J]. Journal of System Simulation, 2008, 20(9): 2296-2299.
- [9] 田旭光, 蔡金燕. 基于灰色预测理论的测量仪器校准周期的确定[J]. 自动化仪表, 2007, 28(12): 12-14, 18.
TIAN XU-GUANG, CAI JIN-YAN. Determining calibration intervals of measuring instruments based on gray prediction theory [J]. Automation Instrument, 2007, 28(12): 12-14, 18.
- [10] LIN H K, LIU D B. A gray system modeling approach to the prediction of calibration intervals [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2005, 54 (1): 297-304.
- [11] 夏新涛, 陈晓阳, 张永振, 等. 制造误差的灰自助动态预测[J]. 四川大学学报:工程科学版, 2007, 39(3): 160-165.
XIA XIN-TAO, CHEN XIAO-YANG, ZHANG YONG-ZHEN, et al. Dynamic prediction for manufacturing errors using grey bootstrap[J]. Journal of Sichuan University: Engineering Edition, 2007, 39 (3): 160-165.
- [12] EFRON B, TIBSHIRANI R J. An introduction to the bootstrap[M]. London: Chapman and Hall, 1993.
- [13] REEVES J J. Bootstrap prediction intervals for ARCH models [J]. International Journal of Forecasting, 2005, 21: 237-248.
- [14] 夏新涛, 陈晓阳, 张永振, 等. 滚动轴承振动的灰自助动态评估与诊断[J]. 航空动力学报, 2007, 21(1): 156-162.
XIA XIN-TAO, CHEN XIAO-YANG, ZHANG YONG-ZHEN, et al. Dynamic assessment and diagnosis of vibration of rolling bearings using grey bootstrap [J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 21(1): 156-162.
- [15] 夏新涛, 陈晓阳, 张永振, 等. 多传感器滑坡时间序列的自助融合及其灰假设检验[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(9): 1904-1912.
XIA XIN-TAO, CHEN XIAO-YANG, ZHANG YONG-ZHEN, et al. Bootstarap fusion and its grey hypothesis testing for landslide time series of multi-sensor [J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(9): 1904-1912.

(编辑 张小强)