

文章编号: 1000-582X(2012)02-143-06

Her 变换的数字水印算法

王立鹏^{1,2}

(1. 重庆市公安局交管局, 重庆 400030; 2. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 兰州 730050)

摘要: 经对目前数字水印变换域算法的研究, 发现常用的变换大多都是正交变换(如 DCT 和 DWT 等)。作者通过对 Haar 函数系、Haar 类函数系和 Walsh 函数系这三大类正交函数系的研究, 找到了与之对应的三类性能优良的正交变换, Her 类正交变换就是其中的一种。由于 Her 函数系所对应的 Her 矩阵不是归一化的正交矩阵, 所以不能像 DCT 等矩阵一样直接应用于数字水印技术, 通过对 Her 连续函数的采样, 得出了其对应的离散矩阵, 然后通过一系列的实验数据和理论证明, 成功的将其应用于数字水印中。最后, 提出一种新颖的、鲁棒的 Her 域盲水印算法。实验结果表明该算法计算简单, 且具有良好的不可见性, 通过与传统 DCT 水印的对比表明, 该算法在抵抗噪声和滤波等方面具有较强的鲁棒性。

关键词: 数字水印; Her 变换; 算法

中图分类号: TP309.7

文献标志码: A

Watermarking algorithm based on Her transform

WANG Li-peng^{1,2}

(1. Chongqing Traffic Management Bureau, Chongqing 400054, P. R. China; 2. College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, Gansu, P. R. China)

Abstract: Most transformations used for digital watermarking in transformation domain are orthogonal transformations, such as DCT and DWT. Three types of orthogonal transformation with excellent performance are found by studying three systems of orthogonal functions: Haar function system, Haar type function system and Walsh function system. Her transformation is one of the three transformations. Her function system can not be used directly in digital watermarking as DCT matrix being used, since Her matrix of Her function system is not normalized orthogonal matrix. The corresponding discrete matrix is obtained by sampling Her continuous functions, and successfully used in digital watermarking with a series of experiments and theoretical analysis. A digital watermarking algorithm based on Her transformation is proposed. Experimental results show that the algorithm is simple and good at perceptual transparency as well as robustness of watermarking extraction. In addition, the experimental results of comparing with the traditional DCT watermarking show that this algorithm is of good robustness against noise and filtering.

Key words: digital watermarking; Her transform; algorithm

收稿日期: 2011-09-10

基金项目: 甘肃省自然科学基金资助项目(3ZS062-B25-037); “十一五”国家科技支撑计划资助项目(2006BAF01A21)。

作者简介: 王立鹏(1979-), 男, 兰州理工大学博士, 主要从事自动化控制方向研究, (Tel)13668089010; (E-mail)wlp_cn@hotmail.com。

变换域水印通过改变数据变换域中的一些系数来隐藏信息,典型的算法有:离散余弦变换(DCT)、离散傅立叶变换(DFT)和离散小波变换(DWT)等^[1-7],其中Cox等提出的“扩展频谱”算法,将水印信息嵌入在图像的DCT变换域中,满足了水印的不可感知性和鲁棒性要求^[8-11]。Barni在文献^[12]中提出将水印嵌入在DCT域固定的中频段,以便在没有原始图像时仍能确定水印的嵌入位置,从而将Cox的算法发展成盲水印算法。由于DCT域水印方案,本身计算量较小,且与国际数据压缩标准(JPEG, MPEG)兼容,有利于水印算法的标准化,故目前研究的比较多。通过对Her正交函数系的研究,从连续的Her函数中经过采样得出了离散的Her矩阵(非正交矩阵),而传统的变换(如DCT)都是正交变换,众所周知,正交变换不改变矩阵的能量,如果直接使用Her矩阵来对图像做变换,对图像能量的影响较大,也就是说图像失真比较严重。通过大量的实验数据和理论证明,论证了非正交矩阵的Her矩阵也可以应用于数字水印技术。最后结合传统的HVS模型和DCT域的经典算法,提出了一种基于Her变换的盲水印算法。该算法在水印检测时不需要某些假设或处理,同时通过对水印信息进行置乱加密及随机产生嵌入位置来保证水印的安全性,使嵌入的水印从根本上不可逆。

1 Her 变换矩阵的生成过程

Haar函数系是荷兰数学家A. Haar于1910年提出的一组周期的、完备的和正交的函数系^[13],一个连续的函数按照Haar函数系展开成傅立叶级数,能迅速的一致收敛^[14],这是Haar函数的重要优点。Falkowski等人利用矩阵分解的方法讨论过Haar函数系的生成问题^[15-16],卢力^[17]等人通过Haar类函数系的演化生成过程,总结出了Haar类函数系的一般表达式,第 (k, l) 类 $(k=0, 1, 2, \dots, l=0, 1, 2, \dots, k-1)$ 的Haar类函数系 $(wh(j, t))_{j=0}^{+\infty}$ 的一般表达

$$\mathbf{Her}^*(3) = \begin{bmatrix} her(0, t) \\ her(1, t) \\ her(2, t) \\ her(3, t) \\ her(4, t) \\ her(5, t) \\ her(6, t) \\ her(7, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

由此可以看出,Haar类函数继承了Haar函数和Walsh函数的优点。即包含了很多(随着阶数的

式)为

$$wh(j, t) = \omega(j, t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, K-1,$$

$$wh(KR^m + j, t) =$$

$$wh\left(KR^{m-1} + (j \bmod R^m D), Rt - \left\lfloor \frac{j}{R^m D} \right\rfloor\right).$$

$$m = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, 2, \dots, R^{m+1}D - 1.$$

$$K = 2^k; \quad L = 2^l; \quad R = 2^{k-1}; \quad D = K - L,$$

其中: $\lfloor x \rfloor$ 为取整函数符号;mod为模运算符;同时称 K 为演化初始函数的个数; R 为压缩倍数; D 为生成元的个数。

特别地,当 $k=1, l=0$ 时的Haar类函数系即为经典Haar函数系;当 $k=2, l=1$ 时的Haar类函数系即为Her函数系。

前8个Her函数的图形如下图所示

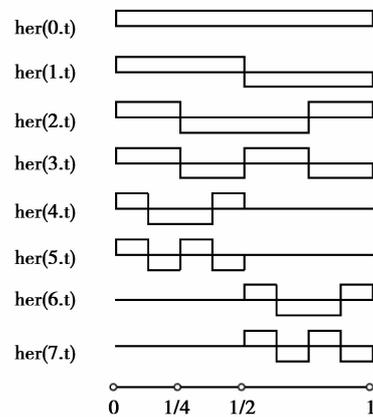


图 1 前 8 个 Her 函数的图形

离散Her变换是指由Her矩阵所确定的变换。Her矩阵可以从连续的Her函数中采样得到。现以 8×8 阶Her矩阵为例来说明采样的具体过程,其它阶的Her矩阵以此类推。对前8个Her函数的图形进行8等分采样,得到8个离散的值,将这些数值组合起来即是 8×8 阶Her矩阵

增大矩阵的稀疏因子会逐渐减小,“0”的个数会逐渐增多)的“0”又取值简单,仅取-1、0和1这3个值。

在应用于正交变换时,仅涉及数值的加减运算,因此数据处理的速度比较快。卢力等人已经设计出了 Haar 类正交变换的快速算法^[18-20],这些算法大都是即位(in place)算法^[21],其特点是速度快,便于在并行机上实现。

2 Her 矩阵可以用于数字水印

由于: $\text{Her}^*(x)[\text{Her}^*(x)]^T = \Lambda \neq \lambda E_{2^x}$, 其中 λ 为常数, Λ 为对角矩阵且对角线上的元素为 $\text{Her}^*(x)$ 相应行上的非零元素的个数,即 Her 矩阵不是正交矩阵,所以不能像 DCT 矩阵一样直接将 Her 矩阵应用于数字水印技术。下面将着手解决这个问题。

通过 Matlab 仿真,对 256×256 的 Lena 灰度图像(图像 8×8 分块)进行正、逆 Her 变换,再将得到的矩阵整体压缩到区间 $[0, 255]$ 上并显示出来,显示的效果与原始图像非常相似,变换前后的能量误差为 283,峰值信噪比(PSNR)为 28.2103。不同大小的 Lena 图像的实验结果如表 1 所示。

表 1 能量误差实验结果

图像大小	能量误差	PSNR
256×256	283	28.2103
128×128	335	25.8603
64×64	349	23.4947
32×32	78	22.9021

将上述变换过程写成数学式子即

$$\begin{aligned} M_k &= T'[TA_k T']T = \\ T'TA_k T' &= \\ (TT')'A_k(TT')' &= \\ \Lambda A_k \Lambda & \quad (1) \end{aligned}$$

其中 A_k 是图像矩阵的一个 8×8 块, $T = \text{Her}^*(3)$, $k=1 \sim 1024$, Λ 为对角矩阵。更一般地,可以将公式(1)简写为

$$\begin{aligned} M &= T'[TAT']T = \\ T' TAT' &= \\ (TT')'A(TT')' &= \\ \Lambda \Lambda \Lambda & \quad (2) \end{aligned}$$

在这里如果 T 是正交矩阵的话,矩阵 M 的能量与 A 的能量是相等的。显然,这里是将 A 的能量进行了放大, Λ 左乘一个对角阵相当于对 A 的每一行进行放大,再右乘一个对角阵相当于在行放大的基础上又对其每一列进行了放大。最后将 M' (指整幅图像进行公式(2)变换后的矩阵)按照公式(3)压缩

到区间 $[0, 255]$ 上

$$M' = \left[\frac{255(M' - \min(M'))}{\max(M') - \min(M')} \right], \quad (3)$$

其中 $[\]$ 是取整运算,则能够保证变换前后的能量基本不变,即

$$A = M'.$$

由上面的实验数据以及简单的理论分析可知:一个图像矩阵在经历上述正、逆 Her 变换和整体压缩后,能量能够保持基本不变。因此,Her 矩阵像 DCT 矩阵一样,也可以应用于数字水印技术。

3 水印的嵌入和提取

3.1 水印预处理

水印图像置乱是一种常见的水印加密方法,它可以通过某些参数、算法选择等手段加大攻击者非法破译的难度。由于 Arnold 算法易于实现,其置乱次数可以为隐藏系统提供密钥(Key),从而增强了系统的安全性和保密性,同时该算法实现的置乱克服了随机置乱的不可恢复性。故采用 Arnold 变换对水印信息进行置乱。

对 $M \times M$ 的水印图像按照公式(4)进行 Arnold 变换,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \pmod{M}, \\ (x, y) &\in \{0, 1, \dots, M-1\}, \quad (4) \end{aligned}$$

再将得到的矩阵按列优先转换为一维二进制序列 m ,即下面要嵌入的信息序列 m 。

3.2 嵌入块的选择

设原始载体图像 I 为 $N \times N$ 阶的灰度图像,水印图像 W 为 $M \times M$ 阶的二值图像。先将 I 分成 8×8 的子块 $I_s, s, t \in \{1, 2, \dots, \frac{N}{8}\}$, 然后按照列优先的顺序从左到右将所有的子块转变成一维的数据集合 $I_l, l \in \{1, 2, \dots, (\frac{N}{8})^2\}$, 则有

$$I = \bigcup_{l=1}^{\text{Max}(l)} I_l \quad (I_{l_1} \cap I_{l_2} = \Phi),$$

其中 $\text{Max}(l) = (\frac{N}{8})^2$ 。即每个子块之间互不重叠,若 N 不是 8 的倍数则右边和下边多余出来的部分不嵌入水印信息。

现将欲嵌入的信息序列 m

$$\{m \mid m = m_1, m_2, \dots, m_k, m_i \in \{0, 1\}, k \leq (\frac{N}{M})^2\},$$

其中, $k = M \times M$, 按照如下方法选取嵌入位置,嵌入到子块 I_l 中,每个子块嵌入 1 bit。引入 logistic 映射函数,即公式(5)

$$X_{i+1} = \mu \cdot X_i \cdot (1 - X_i), \mu \in [0, 4], X \in [0, 1]. \quad (5)$$

固定 $\mu=4$, 存在一个整数集合 P , 选取 X 的初始值 X_0 。作为一个私密密钥, 进行迭代, 将每次迭代的结果变换到区间 $\left[1, \left(\frac{N}{8}\right)^2\right]$ 上并取整, 得到 1 个整数 a , 若 $a \notin P$ 则将 a 放入集合 P 中。当 P 中整数个数为 k 时, 停止迭代。最后将 P 中的整数按从小到大排序, 得到一个有序的序列集合, 仅在子块 $I_u, u \in P$ 中嵌入水印信息。这样做也起到了加密的目的。即使攻击者知道了该水印的嵌入和提取方法, 而不知道具体是那些块嵌入了水印, 也无法正确的提取出水印信息。

3.3 嵌入方法

为了兼顾不可见性和鲁棒性, 将水印嵌入到中高频区比较合适。直接修改选中子块 $I_u, u \in P$ 中的中高频系数即可表达水印 0、1 信息。使用 (3, 3) 与 (4, 2) 这一对系数, 通过调整它们的大小关系来表示水印信息, 具体做法如下

当 $m_i=0$ 时, 调整 $I_u(4, 2)$ 和 $I_u(3, 3)$ 的大小关系, 使之满足: $I_u(4, 2) > I_u(3, 3)$, 为了具有更好的鲁棒性, 还需 $|I_u(4, 2) - I_u(3, 3)| > d$, 其中, d 是水印嵌入强度, 为了同时兼顾不可见性和鲁棒性, 实验表明将 d 的值设置在 $[80, 180]$ 上比较合适。

当 $m_i=1$ 时, 同样调整 $I_u(4, 2)$ 和 $I_u(3, 3)$ 的大小关系, 使之满足: $I_u(4, 2) < I_u(3, 3)$, 为了具有更好的鲁棒性, 还需 $|I_u(4, 2) - I_u(3, 3)| > d$, 其中, d 是水印嵌入强度。

按照上述方法对 **Her** 系数矩阵修改过后, 再用逆变换将 **Her** 系数矩阵还原为携带水印信息的图像。

3.4 提取方法

水印的提取过程是嵌入的逆过程, 即对含有水印的图像进行 **Her** 变换, 根据密钥 X_0 按照公式 (5) 进行迭代, 选出水印嵌入位置 $I_u (u=1, 2, \dots, k)$

$$\begin{aligned} \text{if } I_u(4, 2) > I_u(3, 3) &\Rightarrow m'_i = 0; \\ \text{else } m'_i &= 1. \end{aligned}$$

恢复出序列 m' 并重构二值图像, 最后用 Arnold 置乱算法对其进行恢复, 得到水印图像。

4 实验及结果分析

所有的实验均在 Matlab7.0 上完成, 处理器 Intel Celeron 1.8 GHz, 内存 1 GB, 操作系统为 Windows XP。在实验中选用的载体图像是 256×256 的 Lena 图像, 水印信息为有意义的 32×32 的二值图像。根据前面论述可知, 这样做已经达到了水印信息的最大嵌入量, 即 256×256 的 Lena 图像最多可以嵌入 1 024 Bt 的信息, 这样更能说明该水印算法具有较好的不可见性及较好的鲁棒性。

4.1 无攻击下的实验结果

含水印的图和提取结果如图 2 所示。



图 2 含水印的图像和提取结果

4.2 噪声攻击实验

将嵌入水印的 Lena 图像加入均值为 0、方差为 0.003 的高斯噪声对其进行攻击, 然后再从加噪后的图像中提取水印, 实验结果如图 3 所示。



图 3 高斯噪声攻击和提取结果

4.3 JPEG 压缩实验

将嵌入水印的 Lena 图像进行 80% 的 JPEG 压缩, 然后再从压缩过的图像中提取水印如图 4 所示。

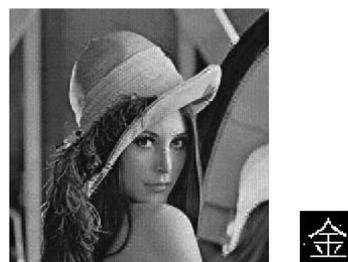


图 4 JPEG 压缩攻击和提取结果

4.4 滤波攻击的实验结果

将嵌入水印的 Lena 图像进行高斯低通滤波攻击, 然后再从滤波后的图像中提取水印, 其中标准偏差 $\text{Sigma}=0.5$, 如图 5 所示。

4.5 剪切攻击实验

剪切攻击实验结果如图 6 所示。

下面给出 4 大类常见攻击的实验结果, 这 4 大类攻击分别是噪声攻击、JPEG 压缩、滤波攻击和剪切攻击(嵌入强度 $d=130$)。同时也与传统的 DCT



图 5 高斯低通滤波攻击和提取结果



图 6 1/2 剪切和提取结果

域水印做了横向对比(嵌入强度 $d=20$,若 d 过大,则 PSNR 过高,其他的条件均一样,如表 2 所示)。

表 2 实验结果对比

攻击类型	参数	Her	DCT
无攻击	—	1	1
高斯噪声 (μ, δ^2)	(0, 0.001)	0.986 5	0.967 7
	(0, 0.003)	0.9051	0.8232
	(0, 0.005)	0.8107	0.7014
	0.008	0.9632	0.8550
盐椒噪声(d)	0.01	0.890 0	0.799 2
	0.04	0.717 0	0.572 9
	5	1	1
随机噪声(λ)	10	0.9902	0.941 4
	18	0.841 0	0.685 9
	0.005	0.960 3	0.942 0
乘性噪声(n)	0.01	0.906 5	0.861 0
	0.02	0.835 4	0.713 6
	90	1	1
	80	0.9918	1
JPEG 压缩(率)	50	0.948 0	1
	36	0.824 2	1

续表

攻击类型	参数	Her	DCT
高斯低通滤波 (4×4)	0.5	0.916 5	0.895 0
	0.8	0.889 0	0.862 6
	1.2	0.864 9	0.823 9
均值滤波 (窗口大小)	2×2	0.933 6	0.898 2
	3×3	0.982 4	0.946 1
	1/16	0.823 4	0.823 4
剪切(比例)	1/4	0.587 2	0.587 2
	1/2	0.4568	0.4568

通过表 2,这两种算法的优劣性一目了然。值得一提的是,由于 JPEG 压缩用的就是 DCT,所以基于 DCT 的实验在对抗 JPEG 压缩方面有这独特的优势。此外,对于剪切试验来说,基于 2 种变换的结果都一样。这说明了这样一个事实,即“剪到哪里少哪里”。从严格意义上讲,提出的算法不抗剪切攻击,正是由于本算法采用了置乱技术,才将剪切所带来的水印缺失分散到了整个水印信息图像上的。对于其他几类的实验,提出的算法均优于传统的 DCT 算法。

由于采用的是有意义的水印信息,即便是当 NC 的值小于 0.5 时,也能通过主观判断来获得正确的水印信息,如剪切比例为 0.5 时,水印的 NC=0.4568,通过主观判断也可以很明显的识别出水印信息(图 6);而 NC 的值越接近 1,则表明该水印算法的效果越好。

5 结 论

通过大量的实验数据和理论证明得出了一个结论:不是正交矩阵的 **Her** 矩阵也可用作数字水印技术中的变换矩阵。这为寻找性能更为优良的变换矩阵提供了一个参考。提出的基于 **Her** 变换的数字水印算法总结起来有 3 个优点:一为盲水印,提取水印时不需要原始图像;二是在中高频嵌入水印,具有较强的鲁棒性;三是利用了人眼视觉敏感特性,具有较好的视觉透明性。这给数字图像的版权认证提供便利,因此具有一定的实际应用价值。此外,文章的不足之处就是没有对图像矩阵正逆 **Her** 变换的缩放过程进行定量的误差分析以及本算法不能抵抗几何攻击。

参考文献:

- [1] COX I J. Secure spread spectrum watermarking for multimedia [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(12):1673-1687.

- [2] COX I J, LINNARTZ J P M G. Some general methods for tampering with watermarks [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1998, 16(4): 587-593.
- [3] 宋玉杰,刘瑞祯,谭铁牛,等. 数字水印技术在印刷品防伪中的应用[J]. 中国图像图形学报, 2001, 6(5): 450-454.
SONG YU-JIE, LIU RUI-ZHEN, TAN TIE-NIU, et al. Digital watermarking for forgery detection in printed materials[J]. Journal of Image and Graphics, 2001, 6(5):450-454.
- [4] TADASHI M, KINEO M. Robustness investigation of DCT digital watermark for printing and scanning [J]. Electronics and Communications in Japan Part III: Fundament all Electronic Science, 2003, 86(4):11-19.
- [5] LIN C Y, CHANG S F. Distortion modeling and invariant extraction for digital image print-and-scan process [C]//Proceedings of the International Sympostum on Multimedia Information Processing (ISMIP99), December 1999. Taipei, Taiwan: IEEE, 1999;158-161.
- [6] LIN C Y. Public watermarking surviving general scaling and cropping: an application for print-and-scan process[C]//Proceedings of the 1999 Multimedia and Security Workshop at ACM Multimedia, October 30-31, 1999. Orlando, Florida, USA; ACM Multimedia and Security Workshop, 1999;1-6.
- [7] 钮心忻,杨义先. 基于小波变换的数字水印隐藏与检测算法[J]. 计算机学报, 2000, 23(1):21-27.
NIU XIN-XIN, YANG YI-XIAN. A new algorithm for digital watermarking based on the wavelet transform [J]. Chinese Journal of Computers, 2000, 23(1):21-27.
- [8] BONEY L, HAMDYY T A. Digital watermarks for audio signals [C]//Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Multimedia computing and systems, June 17-23, 1996. Hiroshima, Japan: IEEE, 1996: 473-480.
- [9] 易开祥. 数字图像加密与数字水印技术研究[D]. 浙江大学, 2001:235-245.
- [10] SAMUEL S, PENZHOM W T. Digital watermarking for copyright protection[C]//Proceedings of the 7th AFRICON Conference in Africa, Sept. 15-17, 2004. Gaborone, Botswana: IEEE, 2004, 2.
- [11] VAN SEHYNDEL R G, TIRKEL A Z, OSBORNE C F. A digital watermark[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing, Nov. 13-16, 1994. Austin, TX, USA: IEEE, 1994, 2:86-90.
- [12] BARNI M, BARTOLINI F, CAPPELLINI V. A DCT-domain system for robust image watermarking [J]. Signal Processing, 1998, 66(3):357-372.
- [13] ELLIOTT D F, RAO K R. Fast transforms: algorithms, analyses, applications [M]. New York: Academic Press, 1982.
- [14] 陈有昭,陈伟华,梁茂辉. 关于 Haar 函数与 Walsh 函数的特征性质[J]. 广东教育学院学报, 2002, 22(2): 11-17.
CHEN YOU-ZHAO, CHEN WEI-HUA, LIANG MAO-HUI. The character of Haar function and Walsh function [J]. Journal of Guangdong Education Institute, 2002, 22(2):11-17.
- [15] FALKOWSKI B J, YAN S X. Modified sign Haar transform[C]//Proceedings of the 2004 47th Midwest Symposium on Circuits and Systems, July 25-28, 2004, Hiroshima, Japan. [S. l.]:IEEE, 2004, 2:133-136.
- [16] FALKOWSKI B J. Generalized multi-polarity Haar transform [C]//Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, May 26-29, 2002, Phoenix-Scottsdale, Arizona, USA: IEEE, 2002, 5.
- [17] 卢力,施保昌,王能超. Walsh-Haar 类函数. 第五届全国并行计算学术会议论文集[C]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1997;258-262.
- [18] 卢力,施保昌,王能超,等. 离散 Walsh-Haar 变换的快速算法[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(7):1192-1195.
LU LI, SHI BAO-CHANG, WANG NENG-CHAO, et al. Discrete Walsh-Haar transform algorithms [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2006, 28(7):1192-1195.
- [19] 卢力,施保昌,王能超. 离散 Ter 变换的快速算法[J]. 数学的实践与认识 2004, 34(3):79-82.
LU LI, SHI BAO-CHANG, WANG NENG-CHAO. Discrete Ter transform algorithms [J]. Mathematics Knowledge and Practice, 2004, 34(3):79-82.
- [20] 卢力,施保昌,田金文,等. 一类特殊的离散 Walsh-Haar 变换的快速算法[J]. 华中科技大学学报:自然科学版, 2005, 33(10):80-82.
LU LI, SHI BAO-CHANG, TIAN JIN-WEN, et al. A special kind of discrete Walsh-Haar transform algorithms [J]. Huazhong University of Science and Technology Journal: Natural Science Edition, 2005, 33(10):80-82.
- [21] 施保昌,郭照立,王能超. Haar 类变换的演化生成与快速算法[J]. 数学杂志, 1998, 18(增刊):1-6.
SHI BAO-CHANG, GUO ZHAO-LI, WANG NENG-CHAO. The evolution of Haar transformation and fast algorithm [J]. Mathematics Magazine, 1998, 18(s1):1-6.