

文章编号: 1000-582X(2012)07-099-08

# 混凝土裂缝扩展单元能量演变分析

黄耀英<sup>1,2</sup>, 郑 宏<sup>1</sup>

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071;

2. 三峡大学 水利与环境学院, 湖北 宜昌 443002)

**摘 要:**假设材料为黏弹性材料时,带缝混凝土结构在荷载作用下,缝岸相对位移将逐渐增大,如果采用位移直接法计算缝端应力强度因子,该应力强度因子将逐渐增大,甚至可能大于混凝土的断裂韧度。基于信息熵理论对黏弹性材料的断裂问题进行了研究,分析表明,如果结构为黏弹性体,那么结构在流变过程中不涉及到能量的耗散和释放,结构信息熵为一常数,裂缝并不会失稳,即位移直接法不适用于流变断裂问题。对钝裂缝带模型进行了研究,认为裂缝扩展单元开裂时,将引起结构能量的释放,该释放能等于外力功与总弹性应变能的差值,也近似等于裂缝扩展单元开裂前后的总弹性应变能的差值。对于线弹性断裂力学问题,这 2 个能量差值与裂缝前沿的虚拟扩展长度(平面问题)或虚拟扩展面积(空间问题)的比值,通过简单的转化即可以获得缝端应力强度因子。分析还表明,钝裂缝带模型一定程度上不依赖于网格粗细,且相对分离裂缝模型而言,其剖分网格较方便。

**关键词:**钝裂缝带模型;流变断裂;耗散能;释放能;应力强度因子

**中图分类号:**TU528

**文献标志码:**A

## Energy analysis of concrete's fracture expanding elements

HUANG Yaoying<sup>1,2</sup>, ZHENG Hong<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Science, Wuhan 430071, China; 2. College of Hydraulic & Environmental Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China)

**Abstract:** Assume the material of concrete structure with crack is viscoelastic material, the relative displacement of crack side increases under load. If stress intensity factor is calculated by displacement direct method, the stress intensity factor will increase and may be even bigger than the concrete's fracture toughness. The fracture problem of viscoelastic material is studied based on Entropy theory. It is showed that if the structure is viscoelastic material, there is no energy dissipation and release during the rheological process; the entropy is a constant and the crack remains stable, which means the displacement direct method is not feasible to rheological fracture problem. The blunt crack band model is preliminarily studied as well. It is believed that when fracture expanding element cracks, the structure energy will release, which is equal to the energy difference value between external work external work and total elastic energy and also approximately equal to the difference value between the total elastic energies of fracture expanding

**收稿日期:**2012-02-04

**基金项目:**国家自然科学基金项目(50779031);国家杰出青年基金项目(50925933);湖北省教育厅科学技术研究项目(D20101207)

**作者简介:**黄耀英(1977-),男,博士,副教授,主要从事大坝安全监控及岩体流变方面的研究,(E-mail)huangyaoying@sohu.com。

elements before and after cracking. As to linear elastic fracture problem, the stress intensity factor can be obtained by simply transforming the ratio of the energy difference value and virtual expanding length (plane problem) or virtual expanding area (spatial problem). It is also indicated by the analysis that blunt crack band model is independent of mesh size partly and its mesh can be obtained easier comparing with discrete crack model.

**Key words:** blunt crack band; rheological fracture; dissipation energy; release energy; stress intensity factor

带宏观裂缝的结构,在裂缝尖端处的应力应变具有  $r^{-1/2}$  的奇异性,应力场在裂缝尖端区域的“强度”可以由一个仅依赖于裂缝几何尺寸与形状和荷载条件的因子反映,该应力称为应力强度因子。在线弹性断裂力学中,用有限元法计算缝端应力强度因子,最简单的方法是位移直接法<sup>[1-2]</sup>。黄耀英等<sup>[3]</sup>在文献[1,4]的基础上,基于位移直接法对缝端应力强度因子对网格尺寸的敏感性进行了分析及工程应用,认为如果在缝端采用 1/4 边中结点(奇异等参单元),即使采用较粗的网格也可以得到满意的结果。但该方法在建立有限元模型时,必须采用平面八结点等参单元或空间 20 结点等参单元,以便于在缝端设置 1/4 边中结点,这给网格剖分和计算带来不方便。目前实际工程中采用较多的是分布裂缝模型<sup>[1]</sup>,为了采用分布裂缝模型时也能计算应力强度因子,Bazant 等提出了钝裂缝带模型<sup>[5-7]</sup>。周元德等基于 Bazant 等提出的钝裂缝带力学模型,将其扩展到考虑剪切软化情形,推导出全量算法的三维弥散软化本构关系<sup>[8]</sup>,同时将钝裂缝带模型扩展为三维旋转裂缝模型,并推导出相应的三维软化本构<sup>[9]</sup>。周伟等<sup>[10]</sup>采用钝裂缝带模型对碾压混凝土重力坝诱导缝开裂进行了研究。对于同一带缝结构,钝裂缝带模型和分离裂缝模型计算的缝端应力强度因子关系如何,尚未见有关文献详细对比。钝裂缝模型通过计算虚拟裂缝扩展单元开裂前后势能的变化来获得缝端应力强度因子,那么计算虚拟裂缝扩展单元开裂前后势能的变化来获得缝端应力强度因子是否可以应用于分离裂缝模型,这个问题至今也尚未见有关文献报导。另外,虚拟裂缝扩展单元开裂前后,结构的弹性应变能、总应变能、外力功、耗散能及释放能存在何种关系也尚未见有关文献详细报导。据此,笔者对这些问题逐一进行研究。

由于混凝土、岩体在荷载作用下都具有较明显的流变特性<sup>[1]</sup>,对具有流变性能材料的裂纹体进行研究是一个重要课题。赵延林等<sup>[11]</sup>探讨了渗透压作用下黏弹性压剪岩石裂纹的起裂规律及分支裂纹尖端应力强度因子的演变规律。姜永东等<sup>[12]</sup>应用

工程岩体蠕变断裂失稳两步计算法,分析了巷道岩体在动态施工过程中产生蠕变断裂形成塑性区域的演化特征。对于宏观裂缝的流变断裂,其缝端应力强度因子是否可以采用位移直接法进行计算,这个问题还不甚明确。由于系统的熵值和系统状态的无序度存在着——对应关系,而结构的破坏过程就是从无序(稳定态)向有序(非稳定态)演变的过程。据此,笔者将采用信息熵理论<sup>[13-18]</sup>对黏弹性流变断裂问题进行研究。

## 1 基本原理

### 1.1 钝裂缝带模型

钝裂缝带模型是用一组密集的、平行的裂缝带来模拟实际裂缝和断裂区。如图 1 所示的平面问题,裂缝平行于  $x$  轴(不平行  $x$  轴时必须进行坐标转换),长度为  $a$ ,物体的体积为  $V$ ,受外力作用的表面为  $S$ ,表面外力为  $p_0$ ,裂缝扩展前的应力为  $\sigma_0$ ,应变为  $\epsilon_0$ 。裂缝扩展长度为  $\Delta a$ ,扩展单元的体积为  $\Delta V$ ,裂缝扩展后的应力为  $\sigma$ ,应变为  $\epsilon$ 。

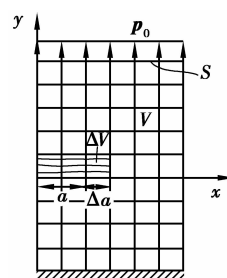


图 1 钝裂缝带模型

裂缝扩展后,单元  $\Delta V$  内的应力分量为

$$\sigma = D_c \epsilon, \quad (1)$$

式中,  $D_c$  为裂缝后的单元弹性矩阵,  $E$  为弹性模量,  $G$  为剪切模量,  $\beta$  为考虑裂缝表面的骨料咬合作用而取用的一个 0~1 之间的系数。

对于三维空间问题,如果在局部坐标系沿  $z$  轴方向开裂,开裂后局部坐标系应力分量  $\sigma_z$  等于 0,此时,在局部坐标系下混凝土开裂后的弹性矩阵为

$$\mathbf{D}_c = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\mu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta(1-\mu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta(1-\mu)/2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

整个物体在裂缝扩展前后的势能变化为

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Delta V} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_0^T \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV + \frac{1}{2} \int_{V-\Delta V} (\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_0^T \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV - \int_S \mathbf{p}_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dS, \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{r}$  为裂缝扩展后物体表面的位移;  $\mathbf{r}_0$  为裂缝扩展前物体的表面位移。

整个物体在裂缝扩展前后的弹性应变能变化为

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_{\Delta V} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_0^T \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV + \frac{1}{2} \int_{V-\Delta V} (\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_0^T \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV. \quad (4)$$

由式(3)获得裂缝扩展前后的势能变化  $\Delta\Pi$ , 再由  $G = -\Delta\Pi/\Delta a$  可计算能量释放率, 然后利用式(5)计算钝裂缝带的应力强度因子。

$$G_I = K_I^2/E', \quad (5)$$

$$E' = \begin{cases} E, & \text{(平面应力)} \\ E/(1-\mu^2), & \text{(平面应变)} \\ E/(1-\mu^2), & \text{(空间问题)} \end{cases}$$

式中:  $K_I$  为张开型应力强度因子,  $\mu$  为混凝土泊松比。

这里, 在算例中对比分析了采用式(4)计算的应变能变化  $\Delta U$ , 再由  $G = \Delta U/\Delta a$  计算能量释放率。

对于 II 型裂缝, 有

$$G_{II} = K_{II}^2/E'. \quad (6)$$

### 1.2 弹-黏塑性模型分析裂缝扩展单元的受拉开裂

裂缝扩展单元为图 1 中裂缝扩展长度  $\Delta a$  对应的单元。

有关弹-黏塑性有限元法的计算在许多文献中已有详细的论述<sup>[1,19]</sup>, 这里采用弹-黏塑性模型分析裂缝扩展单元的受拉开裂不同之处在于:

1) 在每一时步需要检测单元高斯点主应力  $\sigma_1$  是否大于抗拉强度  $\sigma_0$ 。如果检测到  $\sigma_1$  首次大于  $\sigma_0$ , 计算此时 3 个主应力的方向余弦  $l_i, m_i, n_i (i=1 \sim 3)$ 。在之后的时步计算中, 由高斯点应力按式(7)计算高斯点主应力首次大于抗拉强度时主应力所在局部坐标系下的 3 个应力分量

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T = \mathbf{A}[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T, \quad (7)$$

$$\text{式中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \end{bmatrix}.$$

2) 如果  $\sigma_1 < \sigma_0, \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}\} = 0$ ; 如果  $\sigma_1 > \sigma_0$  或高斯点主应力曾经出现过大于抗拉强度且本时步该方向的应力为拉应力, 在该高斯点第一主应力首次大于抗拉强度时的局部坐标系下, 根据 P. Perzyna 假设计算黏塑性应变率

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}, \quad (8)$$

式中:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} = [\dot{\varepsilon}_1^{vp}, \dot{\varepsilon}_2^{vp}, \dot{\varepsilon}_3^{vp}]^T$ ; 当  $F_i = \boldsymbol{\sigma}_i - \sigma_0 > 0, \langle \Phi(F_i) \rangle = \sigma_i (i=1 \sim 3)$ ; 采用关联流动法则  $Q = F$ , 此时,  $\frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i} = [1, 0, 0]^T, \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i} = [0, 1, 0]^T, \frac{\partial F_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i} = [0, 0, 1]^T$ 。

对于带最大拉应力的 Drucker-Prager 准则或带最大拉应力的 Mohr-Coulomb 准则, 如果在某增量步, 材料同时达到塑性屈服和开裂, 类似于 Koiter 假定<sup>[20]</sup>, 取

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} = \sum_a \gamma \langle \Phi(F_a) \rangle \frac{\partial Q_a}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}. \quad (9)$$

3) 由式(8)计算的黏塑性应变率按式(10)计算整体坐标系下的黏塑性应变率, 然后计算由黏塑性应变增量引起的等效结点力。

$$[\dot{\varepsilon}_x^{vp}, \dot{\varepsilon}_y^{vp}, \dot{\varepsilon}_z^{vp}, \dot{\gamma}_{xy}^{vp}, \dot{\gamma}_{yz}^{vp}, \dot{\gamma}_{zx}^{vp}]^T = \mathbf{A}^T [\dot{\varepsilon}_1^{vp}, \dot{\varepsilon}_2^{vp}, \dot{\varepsilon}_3^{vp}]^T. \quad (10)$$

### 1.3 信息熵理论

1948 年, Shannon 提出了信息熵的概念

$$S = -\varphi \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i, \quad (11)$$

式中:  $\varphi$  为正的常数, 笔者分析时, 取  $\varphi = 1$ ;  $p_i$  是信息源中第  $i$  种信号出现的概率;  $\ln p_i$  是它带来的信息量;  $S$  表征了信息量的大小, 是一个系统状态不确定性的量度。

采用有限单元法进行结构流变问题分析时, 设在拓扑形式、边界条件和作用荷载给定的  $n$  个单元的结构中, 第  $i$  个单元具有的应变能为  $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 则系统的总应变能  $Q$  为<sup>[13-18]</sup>

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (12)$$

$$\lambda_i = \frac{q_i}{Q}, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

从而有

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

显然, 新引入的物理量  $\lambda_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 具

有完备性和非负性,其力学含义表示第  $i$  个单元的应变能在总应变能中所占的份额。为了综合反映不同结构应变能的分布状况,定义结构的信息熵函数  $S$  为<sup>[13-18]</sup>

$$S = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \lambda_i. \quad (15)$$

文献[15]已证明,结构的信息熵  $S$  为具有单个峰值的上凸函数,当且仅当各单元的应变能彼此相等时,即当  $\lambda_i = 1/n (i=1, 2, \dots, n)$ , 结构的熵  $S$  达到最大值。

其中,弹性应变能采用式(16)计算

$$U^e = \int_{V_e} \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^e \right) dV, \quad (16)$$

式中:  $\sigma_{ij}$  为应力分量;  $\epsilon_{ij}^e$  为弹性应变分量。

此时,外力功为

$$W_{\text{ext}}^e = \frac{1}{2} \int_{S_e} \bar{f}_i \Delta u_i^e dS + \frac{1}{2} \sum_j \bar{p}_j \Delta u_j^e, \quad (17)$$

式中:  $S_e$  为面力边界,  $\bar{f}_i$  为其上的面力;  $\bar{p}_j$  为集中力;  $\Delta u^e$  为弹性位移。

黏性应变能为

$$U^c = \int_{V_c} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij}^c) dV, \quad (18)$$

式中,  $\epsilon_{ij}^c$  为黏性应变分量。

此时,外力功为

$$W_{\text{ext}}^c = \int_{S_e} \bar{f}_i \Delta u_i^c dS + \sum_j \bar{p}_j \Delta u_j^c, \quad (19)$$

式中,  $\Delta u^c$  为黏性位移,其余符号含义同前。

## 2 算例分析

### 2.1 平面张开型裂缝

尺寸为  $S \times W = 40 \text{ m} \times 10 \text{ m}$  的三点弯曲梁,厚度为单位 1。在其下侧跨中有一长度  $a = 4 \text{ m}$  的裂缝,上侧  $S/2$  处作用一集中力  $p$ , 计算简图如图 2 所示。材料弹性模量为 20 GPa,泊松比为 0.2。按平面应力问题分析。

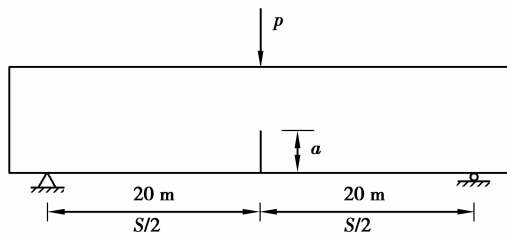


图 2 三点弯曲梁示意图

### 2.1.1 位移直接法是否适用于宏观裂缝的流变断裂

工况 1: 采用等参四边形八结点单元对三点弯曲梁进行网格剖分,单元尺寸  $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ , 共剖分 100 个单元, 355 个结点, 在缝端设置 1/4 边中结点的奇异等参单元, 以反映裂缝尖端处的应力奇异性。假设材料为三元件黏弹性材料, 如图 3 所示。集中力  $p = 100 \text{ N}$ , 材料参数为  $E_0 = 20 \text{ GPa}$ ,  $E_1 = 80 \text{ GPa}$ ,  $\eta = 1.15 \times 10^{12} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , 计算时间步长 1 s, 计算总时间 100 s。结构信息熵计算基本原理见 1.3 节。

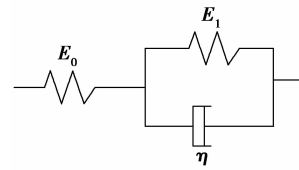


图 3 三元件流变模型

由计算可见, 1) 采用位移直接法<sup>[1-3]</sup> 计算缝端应力强度因子:  $t = 0 \text{ s}$  时, 计算的缝端应力强度因子为  $247.722 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$ , 随着结构在荷载作用下流变, 缝岸的相对位移逐渐增大, 在  $t = 100 \text{ s}$  时, 计算的缝端应力强度因子为  $308.672 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。对于三点弯曲梁, 按美国 ASTM E399 规范给出的公式<sup>[2]</sup> 计算的缝端应力强度因子为  $250.586 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$ , 该值与  $t = 0 \text{ s}$  时, 位移直接法计算的缝端应力强度因子接近。

2) 计算表明, 外力功和总应变能相等, 如,  $t = 0 \text{ s}$  时, 外力功、总应变能和弹性应变能均为  $1.0573 \times 10^{-5} \text{ J}$ ,  $t = 100 \text{ s}$  时, 外力功增大为  $1.5854 \times 10^{-5} \text{ J}$ , 总应变能增大为  $1.5854 \times 10^{-5} \text{ J}$ , 弹性应变能仍为  $1.0573 \times 10^{-5} \text{ J}$ 。

3) 计算还发现, 当假设结构材料为黏弹性体时, 虽然在荷载作用下结构存在黏弹性变形, 由于三元件模型的黏弹性变形为可逆黏性变形, 所以无论是基于单元总应变能还是单元弹性应变能计算结构的信息熵, 信息熵均为 3.698 2, 且该信息熵不随流变变形的增大而发生变化。

4) 由此可见, 如果带宏缝裂缝的结构仅发生可逆的黏性变形, 由于结构在流变过程中不涉及能量的耗散和释放, 结构信息熵为一常数, 裂缝并不会失稳。对于黏弹性断裂问题, 如果仍然采用位移直接法计算缝端应力强度因子, 其计算的应力强度因子将随缝岸相对位移增大而增大, 这与结构信息熵为常数的分析相矛盾, 即位移直接法不适用于黏弹性断裂问题的分析。

### 2.1.2 分离裂缝模型和钝裂缝带模型对比分析

对比分析了如下3组工况。

工况2:分离裂缝模型的有限元计算网格同工况1,集中力  $p=4 \times 10^5$  N。

工况3:采用钝裂缝带模型进行分析,如图4所示,采用等参四边形4结点单元,共剖分312个单元,351个结点,此时  $\Delta a=0.5$  m。

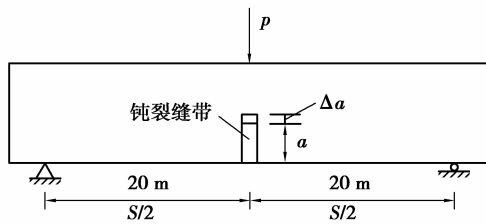


图4 三点弯曲梁的钝裂缝带模型示意图

工况4:与工况3类似,但相对工况3的有限元网格更细,共剖分392个单元,435个结点,此时  $\Delta a=0.25$  m。

1)由工况2分析表明,采用位移直接法外推得到的缝端应力强度因子为  $0.976 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ,采用美国 ASTM E399 规范给出的公式计算的缝端应力强度因子为  $1.002 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

2)由工况3分析表明,集中力作用点的垂直向位移在裂缝扩展前为  $-8.231 \times 10^{-4}$  m,扩展后为  $-9.602 \times 10^{-4}$  m,按式(3)计算得到的裂缝扩展前后的势能变化为  $-27.2496$  J,由此计算的应力强度因子为  $1.044 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。裂缝扩展前后的弹性应变能变化为  $27.423$  J,由此计算得到的应力强度因子为  $1.047 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

3)由工况4分析表明,集中力作用点的垂直向位移在裂缝扩展前为  $-8.242 \times 10^{-4}$  m,扩展后为  $-8.878 \times 10^{-4}$  m,按式(3)计算得到的裂缝扩展前后的势能变化为  $-12.715$  J,由此计算得到的应力强度因子为  $1.008 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。裂缝扩展前后的弹性应变能变化为  $12.725$  J,由此计算得到的应力强度因子为  $1.009 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

4)由此可见,对于钝裂缝带模型,采用势能变化计算的应力强度因子与采用弹性应变能变化计算的应力强度因子近似相等,但两者计算应力强度因子的公式相差一个负号。其原因为附加外力功近一半以附加弹性应变能储存在结构中,另外一半能量因裂缝开裂而释放。

### 2.1.3 采用弹-黏塑性模型分析钝裂缝带模型的裂缝扩展单元能量演变过程

对比分析了如下2组工况。

工况5:钝裂缝带模型有限元计算网格同工况4。钝裂缝带模型的裂缝扩展单元如图4中裂缝扩展长度  $\Delta a$  对应的单元,  $\Delta a=0.25$  m。采用最大拉应力准则进行分析,仅考虑裂缝扩展单元的受拉开裂和应力释放,其余单元假设为弹性变形,并设裂缝扩展单元的最大拉应力为  $1 \text{ MPa}$ 。计算的基本原理见1.2。外力功、总应变能和弹性应变能演变过程线如图5所示。裂缝扩展单元能量演变过程线如图6所示。

工况6:该工况的计算网格同工况3,裂缝扩展单元  $\Delta a=0.5$  m。另外,与工况5的区别是采用最大拉应力准则对裂缝扩展单元进行分析时,不考虑高斯点应力的受拉开裂及应力释放,仅考虑高斯点应力屈服,当裂缝扩展单元的最大拉应力大于  $1 \text{ MPa}$ 时,单元产生塑性流动。裂缝扩展单元能量演变过程线如图7所示。

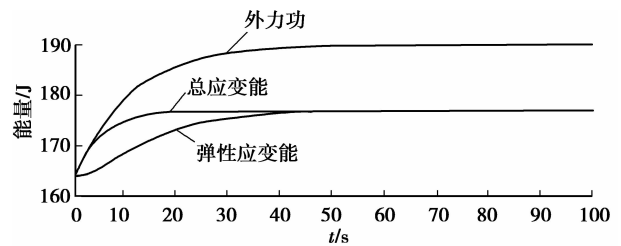


图5 结构能量变化过程线

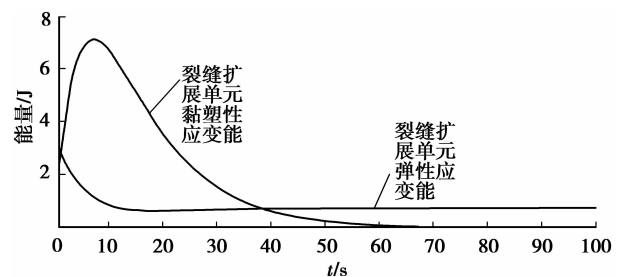


图6 裂缝扩展单元能量变化过程线

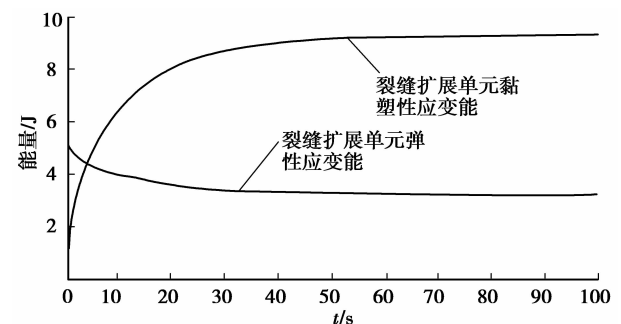


图7 裂缝扩展单元受拉屈服时能量变化过程线

由图可见:1)由工况 5 分析表明,当  $t=0$  s 时,结构弹性应变能为 164.025 J;  $t=100$  s 时,结构弹性应变能为 176.898 J,结构黏塑性应变能为 0.001 93 J。  $t=100$  s 时的弹性应变能和  $t=0$  s 时的弹性应变能之差为 12.873 J,由此计算的应力强度因子为  $1.015 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。  $t=100$  s 时,外力功为 189.774 J,外力功减去弹性应变能和黏塑性应变能为 12.876 J,该能量为裂缝扩展后的释放能量。该释放能与裂缝扩展前后的弹性应变能之差近似相等。

2)由于裂缝扩展单元开裂后,应力释放,直至为零,所以黏塑性应变能随时间流变先增大然后逐渐减小,直至为零,见图 6,此时结构的弹性应变能和结构的总应变能近似相等。

3)由工况 6 分析表明,当  $t=0$  s 时,结构的弹性应变能为 164.616 J;  $t=100$  s 时,结构的弹性应变能为 167.105 J,结构的黏塑性应变能为 9.276 J,总应变能为 176.382 J。  $t=100$  s 时,外力功为 178.871 J,外力功与总应变能之差为 2.489 J,误差比例为 1.4%,该能量差由计算误差引起。由图还可见,裂缝扩展单元的粘塑性应变能是不可逆耗散能,但并未释放,该能量随着时间逐渐增大,并趋于一稳定值。

#### 2.1.4 计算虚拟裂缝扩展单元开裂前后能量的变化来获得缝端应力强度因子是否适用于分离裂缝模型

进行分离裂缝模型的裂缝扩展单元能量释放分析时,裂缝扩展单元为环绕裂缝尖端的四个单元,集中力  $p=4 \times 10^5 \text{ N}$ ,如图 8 所示。对比分析了如下 2 组工况。

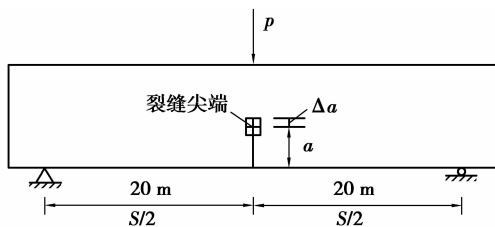


图 8 分离裂缝模型的裂缝扩展单元示意图

工况 7:采用等参四边形八结点单元,共剖分 312 个单元,1 023 个结点,裂缝尖端采用 1/4 边中结点,此时  $\Delta a=0.5 \text{ m}$ 。

工况 8:采用等参四边形八结点单元,共剖分 392 个单元,1 273 个结点,裂缝尖端采用 1/4 边中结点,此时  $\Delta a=0.25 \text{ m}$ 。

1)由工况 7 分析表明,其计算的裂缝扩展前后的弹性应变能变化为 35.145 J,对应的应力强度因子为  $1.186 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ,采用位移直接法外推获得的应力强度因子为  $0.991 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

2)由工况 8 分析表明,其计算的裂缝扩展前后的弹性应变能变化为 16.138 J,对应的应力强度因子为  $1.136 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ,采用位移直接法外推获得的应力强度因子为  $0.993 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

3)由此可见,由分离裂缝模型的裂缝扩展单元的能量释放计算的应力强度因子,大于由钝裂缝模型的裂缝扩展单元的能量释放计算的应力强度因子,且与美国 ASTM E399 规范中的公式计算的应力强度因子差异较大,究其原因因为环绕裂缝尖端的 4 个单元均假设开裂,释放的能量大。笔者还对比分析了仅假设裂缝尖端前沿 2 个单元开裂,结果表明,其计算的应力强度因子小于美国 ASTM E399 规范公式的计算值,且误差较大。即对于分离裂缝模型,计算虚拟裂缝扩展单元开裂前后能量的变化来获得缝端应力强度因子的计算精度较差。

## 2.2 平面滑开型裂缝

平面滑开型裂缝模型如图 9。  $p_1=0.5 \text{ MPa}$ ,  $p_2=0.25 \text{ MPa}$ ,裂缝深  $a=4 \text{ m}$ 。

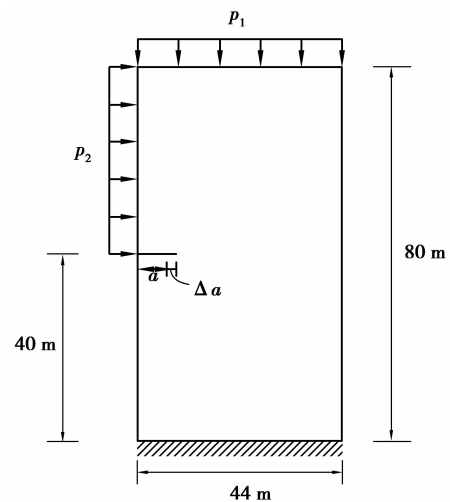


图 9 平面滑开型裂缝模型

对比分析了如下 2 组工况。

工况 9:分离裂缝模型,采用等参四边形八结点单元,共剖分 456 个单元,1 467 个结点,裂缝尖端采用 1/4 边中结点。

工况 10:钝裂缝带模型,采用等参四边形四结点单元,共剖分 456 个单元,500 个结点,此时  $\Delta a=0.5 \text{ m}$ 。

1) 工况 9 分析表明该裂缝为滑开型裂缝,采用位移直接法外推得到的缝端应力强度因子为  $K_I = 0.200 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ,  $K_{II} = 0.526 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

2) 工况 10 分析表明,裂缝扩展前后弹性应变能变化为  $6.575 \text{ J}$ ,由此计算得到的应力强度因子为  $0.513 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ,该值与分离裂缝模型计算的应力强度因子  $K_{II}$  的误差为  $2.53\%$ 。由此可见,钝裂缝带模型也适用于滑开型裂缝的分析。

### 2.3 三维空间张开型裂缝

三维空间张开型裂缝模型如图 10 所示。结构中有一宽 $\times$ 深 $=4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ 的裂缝,结构底部完全位移约束,顶部作用均布拉力  $p=0.5 \text{ MPa}$ 。

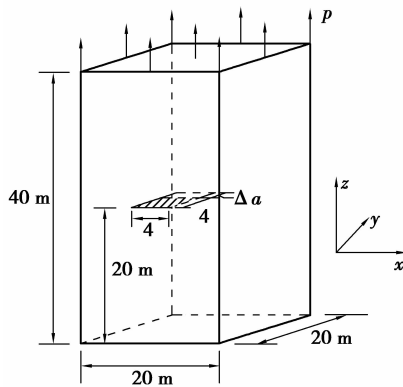


图 10 三维空间张开型裂缝模型

对比分析了如下 2 组工况。

工况 11:采用分离裂缝模型进行分析,共剖分 1 056 个等参六面体 20 结点单元,5 251 个结点,裂缝尖端采用 1/4 边中结点。

工况 12:采用钝裂缝带模型进行分析,共剖分 1 456 个等参六面体 8 结点单元,1 890 个结点,裂缝扩展长度  $\Delta a = 0.25 \text{ m}$ 。

1) 工况 11 分析表明该裂缝为张开型裂缝,采用位移直接法外推得到的缝端应力强度因子为  $0.889 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

2) 工况 12 分析表明,裂缝开展前后弹性应变能变化为  $33.787 \text{ J}$ ,裂缝扩展面积为  $\Delta A = 0.25 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 1 \text{ m}^2$ ,由此计算的应力强度因子为  $0.839 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。该值与分离裂缝模型计算的应力强度因子的误差为  $6\%$ 。

### 2.4 三维空间滑开型裂缝

三维空间滑开型裂缝如图 11 所示,结构中有一宽 $\times$ 深 $=4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ 的裂缝,结构底部完全位移约束,均布力  $p_1 = 0.8 \text{ MPa}$ ,  $p_2 = 0.4 \text{ MPa}$ 。

对比分析了如下 2 组工况。

工况 13:采用分离裂缝模型进行分析,共剖分

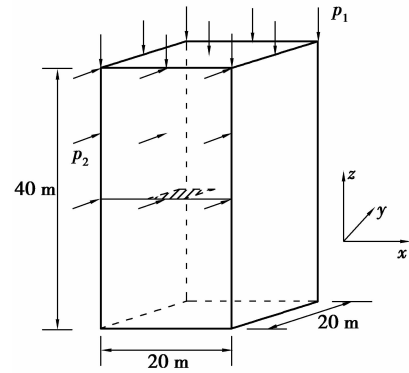


图 11 三维空间滑开型裂缝示意图

1 056 个等参六面体 20 结点单元,5 251 个结点,裂缝尖端采用 1/4 边中结点。

工况 14:采用钝裂缝带模型进行分析,共剖分 1 456 个等参六面体 8 结点单元,1 890 个结点,裂缝扩展长度  $\Delta a = 0.25 \text{ m}$ 。

1) 工况 13 分析表明该裂缝为滑开型裂缝,采用位移直接法外推得到的缝端应力强度因子  $K_I = 0.088 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ,  $K_{II} = 0.676 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

2) 工况 14 分析表明,裂缝扩展前后的弹性应变能变化为  $18.077 \text{ J}$ ,裂缝扩展面积为  $\Delta A = 1 \text{ m}^2$ ,由此计算的应力强度因子为  $0.614 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。该值与分离裂缝模型计算的应力强度因子  $K_{II}$  的误差为  $10\%$ 。

## 3 结 语

对荷载作用下的带缝结构进行了研究,得到如下结论:

1) 基于信息熵理论对粘弹性材料的断裂问题进行了研究,分析表明,如果结构为黏弹性体,那么结构在流变过程中不涉及到能量的耗散和释放,结构信息熵为一常数,裂缝并不会失稳,即位移直接法不适用于流变断裂问题。

2) 对钝裂缝带模型进行了研究,认为裂缝前沿单元开裂时,引起结构能量的释放,该释放能等于外力功与总弹性应变能的差值,也近似等于裂缝扩展单元开裂前后的总的弹性应变能的差值。对于线弹性断裂问题,这 2 个能量差值与裂缝前沿的虚拟扩展长度(平面问题)或虚拟扩展面积(空间问题)的比值,通过简单的转化即可以获得缝端应力强度因子。即采用势能变化计算应力强度因子与采用弹性应变能变化计算应力强度因子近似相等,但两者计算的应力强度因子的公式相差一个负号。

3) 采用弹-黏塑性模型分析钝裂缝带模型的裂缝扩展单元在受拉开裂时能量演变过程表明,由于裂缝扩展单元开裂后,应力释放转移,直至为零,所

以黏塑性应变能随时间流变先增大,然后逐渐减小,直至为零,此时结构的弹性应变能和结构的总应变能近似相等。

4)由分离裂缝模型的裂缝扩展单元的能量释放计算的应力强度因子,大于由钝裂缝模型的裂缝扩展单元的能量释放计算的应力强度因子。且与美国 ASTM E399 规范中的公式计算的应力强度因子差异较大,究其原因因为环绕裂缝尖端的 4 个单元均假设开裂,释放的能量大。即对于分离裂缝模型,计算虚拟裂缝扩展单元开裂前后能量的变化来获得缝端应力强度因子的计算精度较差。

5)采用钝裂缝带模型分析平面滑开型裂缝,以及空间张开型和滑开型裂缝的应力强度因子都是可行的,且该模型剖分网格较方便。

#### 参考文献:

- [1] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.
- [2] 徐世焱. 混凝土断裂试验与断裂韧性测定标准方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [3] 黄耀英, 吴中如, 顾冲时, 等. 缝端应力强度因子对网格尺寸的敏感性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(增 2): 4147-4152.  
HUANG Yaoying, WU Zhongru, GU Chongshi, et al. Sensitivity analysis of mesh size on crack tip's stress intensity factor[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(Sup2): 4147-4152.
- [4] 姜弘道. 水工结构工程与岩土工程现代计算方法及程序[C] //符晓陵, 徐道远. 空间结构断裂有限元计算程序. 南京: 河海大学出版社, 1992: 210-225.
- [5] Bazant Z P, Cedolin L. Blunt crack band propagation in finite element analysis[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1979, 105(2): 297-315.
- [6] Bazant Z P, Oh B H. Crack band theory for fracture of concrete[J]. Materials and Structures, 1983, 16(3): 155-177.
- [7] Bazant Z P. Size effect in blunt fracture; Concrete, rock, metal[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1984, 110(4): 518-535.
- [8] 周元德, 张楚汉, 金峰. 混凝土开裂的三维非线性数值模拟[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2003, 43(11): 1542-1545.  
ZHOU Yuande, ZHANG Chuhan, JIN Feng. Three-dimensional nonlinear numerical model for concrete fracture analysis[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2003, 43(11): 1542-1545.
- [9] 周元德, 张楚汉, 金峰. 混凝土开裂的三维旋转裂缝模型研究[J]. 工程力学, 2004, 21(5): 1-4.  
ZHOU Yuande, ZHANG Chuhan, JIN Feng. Analysis of concrete fracture with three-dimensional rotating crack model[J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(5): 1-4.
- [10] 周伟, 常晓林, 刘杏红, 等. 基于温度应力仿真分析的碾压混凝土重力坝诱导缝开裂研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(1): 122-127.  
ZHOU Wei, CHANG Xiaolin, LIU Xinghong, et al. Study on slit and transverse joint of roller compacted concrete gravity dam based on temperature stress simulation analysis [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(1): 122-127.
- [11] 赵延林, 曹平, 林杭, 等. 渗透压作用下压剪岩石裂纹流变断裂贯通机制及破坏准则探讨[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(4): 511-517.  
ZHAO Yanlin, CAO Ping, LIN Hang, et al. Rheologic fracture mechanism and failure criterion of rock cracks under compressive-shear load with seepage pressure [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(4): 511-517.
- [12] 姜永东, 鲜学福, 杨春和. 巷道岩体蠕变断裂失稳区预测研究[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(6): 906-910.  
JIANG Yongdong, XIAN Xuefu, YANG Chunhe. Forecasting of instability zones induced by creep fracture of tunnel rockmass [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(6): 906-910.
- [13] Shannon C E. The mathematical theory of communication[J]. ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review, 2001, 5(1): 3-55.
- [14] Jaynes E T. Information theory & statistical mechanics[J]. Physical Review, 1957, 106(2): 620-630.
- [15] 陈建军, 曹一波, 段宝岩. 结构信息熵与极大熵原理[J]. 应用力学学报, 1998, 15(4): 116-121.  
CHEN Jianjun, CAO Yibo, DUAN Baoyan. Informational entropy of structure and maximum entropy principle [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1998, 15(4): 116-121.
- [16] 丛培江, 顾冲时, 王建. 熵理论在分析混凝土裂缝扩展过程中的应用探讨[J]. 应用基础与工程科学研究, 2008, 16(1): 50-56.  
CONG Peijiang, GU Chongshi, WANG Jian. Application of entropy theory in the analysis of concrete crack propagation process[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2008, 16(1): 50-56.
- [17] Tian G F, Zhang T R, Ikenaga T, et al. A fast hybrid decision algorithm for H. 264/AVC intra prediction based on entropy theory [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2009, 5371: 85-95.
- [18] Singh V P. Derivation of the Singh-Yu infiltration equation using entropy theory [J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2010, 16(2): 187-191.
- [19] 陈胜宏. 计算岩体力学与工程[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2006.
- [20] Simo J C. Hughes T J R. computational inelasticity[M]. [S.l.]: Springer, 1998.