

文章编号:1000-582X(2012)08-122-05

## 非正弦周期信号的电网功率测量方法

康 丽<sup>1,2</sup>, 王洪亮<sup>2</sup>

(1. 东莞理工学院 电子工程学院, 广东东莞 523808;

2. 重庆大学 输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室, 重庆 400044)

**摘 要:**电力系统中,非整数次谐波的存在使得基于傅里叶(Fourier)变换的传统非正弦功率测量方法不再适用。提出了一种基于扩展 Prony 谐波分析的功率测量方法,首先采用 Prony 算法分析系统中电压、电流信号的整数次和非整数次谐波成分,求得各频率谐波成分的幅值、频率和相位信息,计算出各个频率的有功和无功功率。基于 IEEE 标准定义的有功功率,给出了 Budeanu 功率在含有非整数次谐波情况下的表达形式,进一步求得电网的有功功率和无功功率。通过仿真算例说明了本文方法的合理性和可行性,克服了传统基于 Fourier 变换方法仅适用于倍频谐波的缺陷,在含有非整数次谐波的情况下可以精确的测量各频率的电功率和电网的电功率,为电力系统非正弦情况下的功率测量和谐波治理提供了一条有效的途径和依据。

**关键词:**电力系统;功率测量;非正弦波形;谐波分析;Prony 分析;无功功率

中图分类号:TM731

文献标志码:A

## A method of power measurement under nonsinusoidal periodic signals

KANG Li<sup>1,2</sup>, WANG Hongliang<sup>2</sup>

(1. School of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, Guangdong, P. R. China; 2. State Key Laboratory of Power Transmission Equipment & System Security and New Technology, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** In power system, traditional method of nonsinusoidal power measurement is not feasible for containing non-integer harmonics condition. A method of power measurement based on Prony algorithm is presented. At first, identify all modes of integer and non-integer harmonics from voltage and current signals, using Prony method. Further more, calculate active and reactive power in each harmonics frequency, using the modes of harmonics. Based on the definition of IEEE active power, a expression of Budeanu power is given in non-integer harmonics condition. At last, active and reactive power of energy grid are calculated. The results of simulation prove that this method is feasibility. The method of power measurement based on Prony algorithm has high precision, especially for non-integer harmonics condition.

**Key words:** electric power systems; electric power measurement; nonsinusoidal waves, harmonic analysis; Prony method; reactive power

收稿日期:2012-02-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51177181);重庆大学输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室访问学者项目(2007DA10512712408)

作者简介:康丽(1964-),女,东莞理工学院副教授,主要从事电能质量分析与控制及配电网无功化技术的研究,  
(E-mail)kangli@dgut.edu.cn。

随着电力系统中非线性负荷的日益增多及电力电子装置的广泛应用, 电网中谐波情况也变得愈加复杂。系统中不仅存在着频率是基频整数倍的整数次谐波(简称倍频谐波), 而且存在着大量的非整数次谐波成分<sup>[1]</sup>, 这些间谐波的存在更增加了准确电网电功率测量的难度。传统测量非正弦电压、电流信号下功率的时域积分方法<sup>[2-6]</sup>, 能够准确分析只存在倍频谐波时的有功功率、无功功率。其本质上是基于 Fourier 变换的谐波检测技术<sup>[7-8]</sup>, 文献[5-6]分别利用加窗和插值的方法减小非同步采样造成的频谱泄露误差, 但上述方法均未考虑夹杂在倍频信号附近的非整数次谐波成分的影响, 检测出的谐波的幅值、相角和频率均存在误差, 致使根据频域特征所求得的有功功率、无功功率也存在误差。在采样窗宽度有限的前提下, 基于 Fourier 变换的谐波分析方法无法进一步的提高频率分辨率。所以在非正弦情况下的电网功率计量中, 考虑非整数次谐波的影响具有理论和实际的意义。

笔者研究的目的是在有限时间窗宽的条件下, 对含有非整数次谐波的非正弦周期(含准周期)信号的电功率进行有效地测量。在近些年间谐波研究中, 有学者针对快速傅立叶变换(FFT)存在栅栏和频谱泄漏现象的问题, 提出了加窗插值 FFT<sup>[9-10]</sup>的间谐波分析算法, 该方法可以较好地消除频谱泄漏和栅栏现象, 并提高了谐波和间谐波参数的检测精度, 但该算法的频谱分辨率与信号的时间长度成反比, 而在实际信号分析中一般只取几个周期长度的信号, 从而无法检测到倍频谐波附近的非整数次谐波<sup>[11]</sup>。笔者采用频域功率测量方法, 将扩展 Prony 算法的谐波分析技术作为功率测量的基础。近来 Prony 算法作为一种现代谱估计, 在电力系统中得到了广泛的应用<sup>[12-15]</sup>, Prony 方法是使用指数函数的线性组合来描述等间距采样数据的数学模型。扩展 Prony 算法是在自回归模型(AR)或自回归-滑动(ARMA)模型的基础上, 使用解线性最小二乘法估算给定信号频率、幅值和相位的方法。其可以保证信号的频率和功率可恢复特性, 统称谐波恢复<sup>[16]</sup>。由于 Budeanu 功率定义只适用于含倍频谐波的信号, IEEE 标准<sup>[17]</sup>给出了含有非整数次谐波信号下, Budeanu 有功功率的定义。依据 IEEE 标准的形式和思路提出了存在非整数次谐波信号时的 Budeanu 无功功率定义, 这种无功功率定义和 IEEE 标准有功功率定义共同构成了本文的电功率测量公式。在扩展 Prony 谐波分析算法获得电力系统各频率特征量的基础上, 分别计算各频率谐波单独作用

的有功功率和无功功率, 最后测量出电网的电功率。

## 1 非正弦情况下的频域功率测量原理

在电力系统稳态运行中, 设电压、电流信号瞬时值为

$$u(t) = U_0 + \sum_{h \neq 0}^{M_u} U_h \sqrt{2} \sin(h\omega t + \alpha_h), \quad (1)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{h \neq 0}^{M_i} I_h \sqrt{2} \sin(h\omega t + \beta_h). \quad (2)$$

其中,  $U_0$  和  $I_0$  分别是电压和电流信号的直流分量;  $\omega$  是基波角频率;  $U_h$ 、 $I_h$ 、 $\alpha_h$ 、 $\beta_h$  分别是电压、电流的谐波系数为  $h$  的分量对应的有效值和初相位;  $M_u$ 、 $M_i$  分别是电压、电流信号的最高谐波系数。由于间谐波的存在,  $h$  可能是分数或无理数, 这将提高谐波分析和功率测量的难度。非整数次谐波是在准周期信号或非整周期采样条件下的一种特殊形式的间谐波成分。文献[17]将 Budeanu 有功功率扩展到存在非整数次谐波电压、电流信号的情况, 有功功率定义为

$$P = U_0 I_0 + \sum_{h \neq 0}^M U_h I_h \cos(\alpha_h - \beta_h). \quad (3)$$

其中  $M = \min(M_u, M_i)$ 。此有功功率是电压、电流各次倍频谐波和非整数次谐波分别单独作用产生的有功功率的总和。可以看出公式(3)与 Budeanu 有功功率定义数学表达式是相同的, 只是求和公式的意义不同, 式(3)中的求和公式中叠加了  $h$  为非整数的项, 即非整数次谐波成分产生的有功功率。基于这个思路, 将 Budeanu 无功功率也做相应拓展, 考虑非整数次谐波对无功功率的影响, Budeanu 无功功率则变为

$$Q = U_0 I_0 + \sum_{h \neq 0}^M U_h I_h \sin(\alpha_h - \beta_h). \quad (4)$$

其中无功功率  $Q$  是各次倍频谐波和非整数次谐波分别单独作用于电网产生的无功功率的总和。由公式(3)、(4)构成了含有非整数次谐波时, 电网的有功功率、无功功率的计算公式。下面的问题就是如何精确的分析出电压、电流信号的各谐波分量的频率特征量: 频率, 幅值和相位。

## 2 扩展 Prony 算法

### 2.1 扩展 Prony 算法简介

现代谱估计法是有效地间谐波分析算法, 理论上可以达到无限的频率分辨率, 扩展 Prony 方法是其中经典的一种。Prony 算法是使用指数函数的线性组合来描述等间距采样数据的数学模型, 随着计

计算机技术的发展,该算法在电力系统中的到了广泛的应用,其可以分析电信号的幅值、频率、衰减因子、相位信息。

设观测数据为  $x(n)$  ( $n=0, \dots, N-1$ )。Prony 方法采用复指数线性组合的估值器来拟合采样数据,即对第  $n$  个时刻的估计值为:

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=1}^p b_m z_m^n \quad n=0, \dots, N-1, \quad (5)$$

其中

$$b_m = A_m e^{j\theta_m}, \quad (6)$$

$$z_m = e^{\alpha_m + j\omega_m}. \quad (7)$$

式中  $A_m$  为幅值,  $\theta_m$  为相角,  $\alpha_m$  为衰减因子,  $\omega_m$  为角频率。构造的代价函数

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - \hat{x}(n)|^2. \quad (8)$$

使误差平方和  $\varepsilon$  最小化,则可求得频域参数四元组  $(A_m, \theta_m, \alpha_m, \omega_m)$ 。Prony 方法的核心是注意到式(5)的拟合是常系数线性差分方程的齐次解。为推导此差分方程,定义特征多项式

$$\psi(z) = \prod_{m=1}^p (z - z_m) = \sum_{m=0}^p a_m z^{p-i}. \quad (9)$$

扩展 Prony 算法是利用线性最小二乘法求解如下一组线性的矩阵方程。

$$\begin{bmatrix} x(p) & x(p-1) & \cdots & x(0) \\ x(p+1) & x(p) & & x(1) \\ \vdots & & & \vdots \\ x(N-1) & x(N-2) & \cdots & x(N-p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \varepsilon(N-1) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

其中待求量  $a_1, a_2 \dots a_p$  是式(9)中的多项式系数。

## 2.2 扩展 Prony 算法求解

扩展 Prony 方法的具体求解步骤如下。

1) 定义样本函数

$$r(i, j) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-j)x^*(n-i). \quad (11)$$

其中  $x^*$  是  $x$  的共轭复数,并构造扩展阶的矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(1,0) & r(1,1) & \cdots & r(1,p_e) \\ r(2,0) & r(2,1) & & r(2,p_e) \\ \vdots & & & \vdots \\ r(p_e,0) & r(p_e,1) & \cdots & r(p_e,p_e) \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中  $p_e \geq p$ 。

2) 用奇异值分解(SVD)算法确定矩阵  $R$  的有效秩  $p$ ,并利用总体最小二乘估计方法解法方程

$$\begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & \cdots & r(0,p) \\ r(1,0) & r(1,1) & & r(1,p) \\ \vdots & & & \vdots \\ r(p,0) & r(p,1) & \cdots & r(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

其中  $\varepsilon_p$  为最小误差能量。

3) 求特征多项式(5)的根  $y_1, \dots, y_p$ ,并利用递推公式

$$\hat{x}(n) = - \sum_{i=1}^p a_i \hat{x}(n-i). \quad (14)$$

计算出  $\hat{x}(n)$ ,其中  $n=0, \dots, N-1$ ;  $\hat{x}(0)=x(0)$ 。

4) 利用最小二乘法求解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & & z_p \\ \vdots & & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}(1) \\ \vdots \\ \hat{x}(N-1) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

式(15)的最小二乘解为

$$b = (Z^H Z)^{-1} Z^H \hat{x}. \quad (16)$$

$$\text{其中, } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & & z_p \\ \vdots & & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}.$$

5) 计算各频率特征量

幅值  $A_m$ ; 相角  $\theta_m$ ; 衰减因子  $\alpha_m$ ; 频率  $f_m$ 。具体的计算公式如式(17)

$$A_m = |b_m|,$$

$$\theta_m = \arctan \left[ \frac{\text{Im}(b_m)}{\text{Re}(b_m)} \right],$$

$$\alpha_m = \frac{\ln(|z_m|)}{\Delta t}$$

$$f_m = \arctan \left[ \frac{\text{Im}(z_m)/\text{Re}(z_m)}{2\pi\Delta t} \right]. \quad (17)$$

其中  $m=1, 2, \dots, p$ 。

## 3 仿真研究

采用 MATLAB 软件对本文方法进行实验。仿真含有非整数次谐波的电压、电流信号影响下的负载,进行功率测量试验。负载端口电压、电流信号分别为

$$u(t) = 100\sin(\omega t + 45^\circ) + 80\sin(h_1\omega t + 30^\circ) + 50\sin(h_2\omega t) \quad (18)$$

$$i(t) = 3.14\sin(\omega t - 35.96^\circ) + 1.73\sin(h_1\omega t - 53.81^\circ) + 1.03\sin(h_2\omega t - 84.10^\circ) \quad (19)$$

其中  $h_1=73.333/50, h_2=77/50$ 。

试验负载为一个  $5 \Omega$  电阻元件和一个  $0.1 \text{ H}$  电感元件串联的电路。采样窗宽为  $40 \text{ ms}$ , 采样频率取  $2 \text{ kHz}$ 。此时电压、电流信号中存在邻近的非整数次谐波, 利用加窗插值 FFT 算法在此有限采样时宽内, 无法进一步的提高谐波分辨率。所以按照式 (3~4), 直接采用基于 FFT 算法谐波分析的功率测量方法与基于扩展 Prony 算法的功率测量方法进行比较。对电压、电流采样数据, 利用 FFT 算法分析各次谐波频率特征量, 再根据谐波分析结果计算各次谐波的有功功率和无功功率, 测量结果如表 1 所示。

表 1 基于 FFT 算法各谐波功率测量结果

频率/Hz	P/W	Q/var	频率/Hz	P/W	Q/var
0	0.07	0	175	-0.02	0.04
25	0.15	0.13	200	-0.02	0.02
50	28.21	162.28	225	-0.01	0.01
75	4.83	46.55	250	-0.01	0.01
100	-0.07	0.69	275	-0.01	0.01
125	-0.05	0.17	300	-0.01	0.01
150	-0.03	0.07	325	-0.01	0

该算例中, FFT 变换的频率分辨率为  $25 \text{ Hz}$ , 分析至 13 倍频的谐波分量。由表 1 可以看出,  $73.333 \text{ Hz}$  和  $77 \text{ Hz}$  的非整数次谐波的功率信息主要淹没在相邻的  $50 \text{ Hz}$  和  $75 \text{ Hz}$  的主瓣上, 使得  $50 \text{ Hz}$  和  $75 \text{ Hz}$  频率的功率测量结果严重失真, 各次谐波的功率计量值不能反映系统中真实存在的谐波功率。表 2 是利用扩展 Prony 算法对电压、电流信号进行整数次谐波和非整数次谐波分析, 再分别计算出各频率谐波产生的有功功率和无功功率结果。

表 2 基于扩展 Prony 算法各谐波功率测量结果

频率/ Hz	测量值		准确值		相对误差	
	P/W	Q/var	P/W	Q/var	P	Q
50	24.7	155.2	24.7	155.2	$4.04 \times 10^{-4}$	0
73.3	7.46	68.62	7.45	68.6	$1.34 \times 10^{-3}$	$2.91 \times 10^{-4}$
77	2.66	25.55	2.64	25.5	$7.58 \times 10^{-3}$	$3.91 \times 10^{-4}$

首先, 由表 2 可以看出基于扩展 Prony 算法的功率测量方法可以准确的确定电压和电流信号中存在的各谐波的频率值, 即便含有非整数次谐波; 其次, 依据 Prony 算法分析出的频域幅值和相位, 计算出的各频率的有功功率、无功功率精度高, 功率计量结果的相对误差绝对值小于  $0.04\%$ 。表 3 是基于 FFT 算法和扩展 Prony 算法测量的负载有功功率、无功功率的仿真结果。

表 3 基于 FFT 和扩展 Prony 算法电功率测量结果

	基于 FFT		基于 Prony		准确值
	测量值	相对误差	测量值	相对误差	
P/W	33.02	$5.17 \times 10^{-2}$	34.82	$5.75 \times 10^{-4}$	34.80
Q/var	209.99	$1.58 \times 10^{-1}$	249.39	$1.20 \times 10^{-4}$	249.42

由表 3 可以看出, 当电压、电流信号存在邻近的非整数次谐波的情况下, 对此算例基于 FFT 算法的功率测量结果误差较大, 相对误差绝对值在  $10\%$  左右; 而采用基于 Prony 分析的功率测量方法进行计量, 测量精度大幅度提高, 在  $0.05\%$  附近。

## 4 结 论

提出了一种基于扩展 Prony 分析的功率测量方法, 在非正弦功率测量过程中计入非整数次谐波的影响, 解决了在电压、电流信号含有非整数次谐波的情况下的功率测量问题。通过 MATLAB 仿真算例, 验证本文方法的可行性, 在有限时间窗宽的条件下, 实现了电功率的有效测量且测量结果精度较高, 并可以明确各频率谐波对有功功率和无功功率的贡献。本文为电力系统非正弦周期信号情况下的功率测量和谐波治理提供理论依据和实现途径。

### 参考文献:

- [1] Yacamini R. Power system harmonics IV Interharmonics [J]. Power Engineering Journal, 1996, 10(4): 185-193.
- [2] Pang H, Wang Z J, Chen J Y. A measuring method of the single-phase AC frequency, phase, and reactive power based on the hilbert filtering [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2007, 56(3): 918-923.
- [3] Srinivasan K. Errors in digital measurement of voltage, active and reactive powers and an on-line correction for frequency drift [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1987, 2(1): 72-76.

- [4] Djoki B V, Bosnjakovic P. Two methods for improved measurements of reactive power and reactive energy insensitive to frequency variations [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1998, 47(1): 215-218.
- [5] 章梦哲, 王军, 赵书娟, 等. 基于 Hermite 插值同步化算法的电网谐波与无功测量方法[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(12): 58-61.  
ZHANG Mengzhe, WANG Jun, ZHAO Shujuan, et al. Harmonics and reactive power measurement based on hermite interpolation synchronization algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2009, 37(12): 58-61.
- [6] 刘乾坤, 李宏伟, 许珉. 基于插值 FFT 算法重构的 Hilbert 变换测量无功功率的新方法[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(15): 19-22.  
LIU Qiankun, LI Hongwei, XU Min. A novel method of reactive power measurement based on interpolation FFT algorithm refactoring hilbert transformation [J]. Power System Protection and Control, 2009, 37(15): 19-22.
- [7] 王楠, 肖先勇, 曾颂崎, 等. 基于插值线性调频 Z 变换的间谐波分析方法[J]. 电网技术, 2007, 31(18): 43-47.  
WANG Nan, XIAO Xianyong, ZENG Songqi, et al. An interharmonic estimation method based on interpolation chirp Z transform [J]. Power System Technology, 2007, 31(18): 43-47.
- [8] 张宇辉, 贺健伟, 李天云, 等. 基于数学形态学和 HHT 的谐波和间谐波检测方法[J]. 电网技术, 2008, 32(17): 46-51.  
ZHANG Yuhui, HE Jianwei, LI Tianyun, et al. A new method to detect harmonics and inter-harmonics based on mathematical morphology and hilbert-huang transform [J]. Power System Technology, 2008, 32(17): 46-51.
- [9] Hack D, Runtz K, Mason R. An efficient algorithm for high resolution, power quality measurements of sparsely distributed power system harmonics and inter harmonics[C]//Proceedings of the IEEE WESCANX95 Communications, Power, and Computing Conference, May 15-16, 1995, Winnipeg, Canada. [S. l.]: IEEE Press, 1995, 1: 24-29.
- [10] 柴旭峥, 文习山, 关根志, 等. 一种高精度的电力系统谐波分析算法[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(9): 67-70.  
CHAI Xuzheng, WEN Xishan, GUAN Genzhi, et al. An algorithm with high accuracy for analysis of power system harmonics [J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(9): 67-70.
- [11] 石敏, 吴正国, 尹为民. 基于多信号分类法和普罗尼法的间谐波参数估计[J]. 电网技术, 2005, 29(15): 81-84.  
SHI Min, WU Zhengguo, YIN Weimin. Inter-harmonic parameter estimation based on multi-signal classification and prony method [J]. Power System Technology, 2005, 29(15): 81-84.
- [12] Hauer J F, Demeure C J, Scharf L L. Initial results in prony analysis of power system response signal [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1990, 5(1): 80-89.
- [13] Faiz J, Lotfi-fard S, Shahri S H. Prony-based optimal bayes fault classification of overcurrent protection [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2007, 22(3): 1326-1334.
- [14] 刘应梅, 高玉洁. 基于 Prony 法的暂态扰动信号分析[J]. 电网技术, 2006, 30(4): 26-30.  
LIU Yingmei, GAO Yujie. Transient disturbance signal analysis based on prony method [J]. Power System Technology, 2006, 30(4): 26-30.
- [15] Chang G W, Chen C I. An accurate time-domain procedure for harmonics and interharmonics detection [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2010, 25(3): 1787-1795.
- [16] 张贤达. 现代信号处理[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002: 119-125.
- [17] Institute of Electrical and Electronic Engineers. 1495-2010-IEEE standard definitions for the measurement of electric power quantities under sinusoidal, nonsinusoidal, balanced, or unbalanced conditions [S]. New York: IEEE Standards, 2010.

(编辑 张小强)