

文章编号: 1000-582X(2012)10-009-08

# 机敏约束层阻尼减振板耦合系统有限元模型

曹友强<sup>1,2</sup>, 邓兆祥<sup>1,2</sup>, 王攀<sup>2</sup>, 刘会杰<sup>2</sup>

(1. 汽车噪声振动和安全技术国家重点实验室, 重庆 400039;  
2. 重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

**摘要:** 针对机敏约束层阻尼减振板结构, 考虑到粘接层、压电层、阻尼层、基层结构的耦合运动及位移协调关系, 结合压电学理论、有限元理论以及粘弹性材料阻尼性能的滞弹性位移场模型, 建立了耦合系统的有限元动力模型, 该模型可适用于含 SCLD 结构的任意复杂系统的振动建模研究。以局部覆盖 SCLD 结构的对边约束钢板为研究对象, 进行了结构动力学参数理论计算、ANSYS 模态分析与模态实验研究, 结果表明: 理论分析与实验结果及 ANSYS 分析能较好吻合, 充分证明了建模方法的有效性。

**关键词:** 机敏约束层阻尼; 滞弹性位移场模型; 有限元法; 动力学参数  
**中图分类号:** TH113.1 **文献标志码:** A

## Finite element model of coupled systems for vibration reduction plates with smart constrained layer damping

Cao Youqiang<sup>1</sup>, Deng Zhaoxiang<sup>1,2</sup>, Wang Pan<sup>1</sup>, Liu Huijie<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Vehicle NVH and Safety Technology, Chongqing 400039, China;  
2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University,  
Chongqing 400044, China)

**Abstract:** Considering the relationships of coupling movement and compatible displacement among bonding layer, piezoelectric layer, damping layer, and base structure, a finite element dynamic model of coupled systems for vibration reduction plates is established. The model combined with piezoelectric theory, finite element theory and ADF model of viscoelastic damping material can be suitable for vibration model of complex SCLD structure. The dynamics parameters for clamped-clamped steel plate with partially treated smart constrained layer damping are obtained by theoretical calculation, ANSYS modal analysis and modal experiment. The results show that theoretical values are closer to the test results and ANSYS analysis, and the methods proposed is more accurate and effective.

**Key words:** smart constrained layer damping; ADF model; finite element method; dynamic parameters

收稿日期: 2012-03-20

基金项目: 国家 973 基金资助项目 (2010CB736104); 汽车噪声振动和安全技术国家重点实验室开放基金资助项目 (NVH SKL-201102)

作者简介: 曹友强 (1982-), 男, 博士, 主要从事汽车振动与噪声控制方向研究, (E-mail) cyq\_cqu@163.com。

复杂振动条件下的梁、板、壁、支架构件以及飞机、车辆、舰艇的壳体的振动噪声问题一直是工程界关注的话题。从经典被动约束层减振思想演变而来,综合被动约束阻尼和主动阻尼技术的机敏约束层阻尼结构 (smart constrained layer damping, SCLD)<sup>[1]</sup>,由于具有控制频带宽、能量消耗低,较高鲁棒性和稳定性特点,成为结构振动噪声主动控制研究的亮点。

建立机敏约束层阻尼系统动力学模型是研究结构机理的理论基础。由于粘弹性材料的力学行为受温度及结构振动频率影响较大,因此选择一个能较准确表征粘弹性材料这种特性的模型是建模的关键。这类问题的研究国内外学者提出了多种模型,如复常数模量模型、模态应变能模型、ADF 模型, GHM 模型、Yiu's 模型等<sup>[2]</sup>。其中 GHM 建模和 ADF 建模因易与有限元技术融合而受到广泛关注。较 ADF 模型而言, GHM 模型的参数项较多,参数优化变得复杂,与有限元法结合时引入的辅助自由度多,易造成系统降阶负荷大,并且其阻尼预测精度较低<sup>[3]</sup>。然而遗憾的是针对 SCLD 结构采用 ADF 模型进行研究的文献极少<sup>[5-7]</sup>,并且现有文献研究对象仅局限于柔性梁结构,而对于许多工程柔性结构而言,其简化力学模型多为二维板结构,但到目前为止,采用 ADF 模型建立 SCLD 板结构动力学模型的文献几乎没有,有关这方面的论述也较少。另外,值得注意的是文献<sup>[3-9]</sup>提及在 SCLD 结构动力学建模中忽略掉粘接层结构的动态影响。粘接层作为基层与粘弹性层,粘弹性层与约束层的连接纽带,其材料性能及物理参数对有限元动力学建模精度及结构阻尼特性的影响不容忽视<sup>[10-11]</sup>。

为了全面了解这种机敏耦合系统的动态特性并进行控制研究,从有限元的一般理论出发,考虑到各层结构间的耦合运动及位移协调关系,运用 Hamilton 变分思想,以 ADF 模型描述粘弹性材料随温度频率变化的特性,建立了压电机敏约束层阻尼减振板耦合系统动力学分析模型,并进一步导出了状态空间模型。在此基础上,通过具体的 SCLD 减振板结构开展了动力学参数理论计算和实验验证研究。

## 1 耦合系统有限元动力学模型

### 1.1 单元模型

图 1 为 SCLD 典型配置结构。

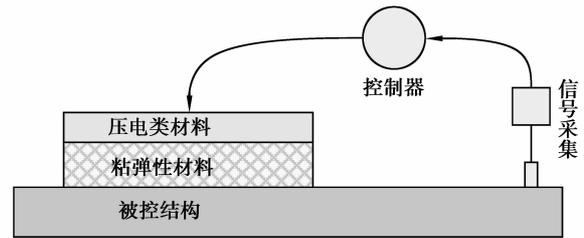


图 1 典型的 SCLD 结构配置图

图 2 为构造的机敏约束层阻尼板四边形单元,它由基层 (BASE), 粘接层 (SPLICE)、阻尼层 (VEM) 及约束层 (PZT) 构成, 其中约束层为压电机敏材料, 单元长度为  $a$ , 宽度为  $b$ 。

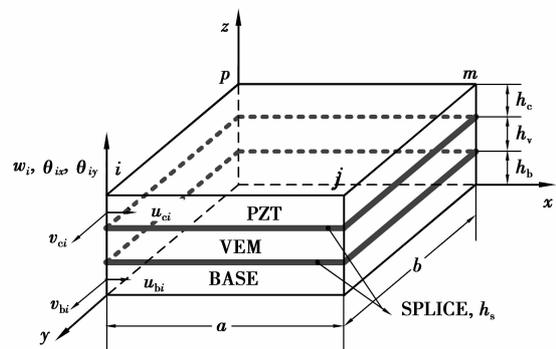


图 2 SCLD 单元的几何特征

有限元法离散建模中,考虑到如下假设:①各层材料满足材料力学的基本假设,且结构变形视为小变形;②基层和约束层满足 Kirchhoff 薄板理论假设,粘弹性层剪切变形满足 Mindlin 板理论假设;③结构被动阻尼仅由粘弹性材料剪切变形引起,忽略基层、粘接层及约束层的剪切作用;④忽略各层材料的转动惯量;⑤各层同一坐标位置点在  $Z$  方向的横向位移相等;⑥各层材料之间粘接牢靠,层间没有相对滑动;⑦各层间粘接层厚度相同,将基层与其相连的粘接层、压电层其相连的粘接层等效为一层,但各自材料特征保持不变;⑧压电约束层上所施加的电压均匀分布,压电约束层沿厚度方向被极化,并且仅在  $Z$  方向上有外加电场  $E_z$  作用。

### 1.2 单元耦合结构运动关系

根据假设,考虑到各层之间的位移协调关系,单元变形后,各运动层的面内位移可表示为

$$U_i = u_i - z \frac{\partial w}{\partial x}, V_i = v_i - z \frac{\partial w}{\partial y} \left( -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \right). \quad (1)$$

式中,  $U_i, V_i$  为单元变形后层内位移,  $u_i, v_i$  代表各层内任意点分别在  $x, y$  向的面内位移,  $w$  为  $Z$  向位移,  $z$  为层内点距该层中面距离。

机敏约束层板单元的耦合运动关系如图 3 所示。位移  $u_c, v_c$  代表结构变形后粘弹性层上端在  $x, y$  向的面内位移,位移  $u_b, v_b$  代表结构变形后粘弹性层下端在  $x, y$  向的面内位移。

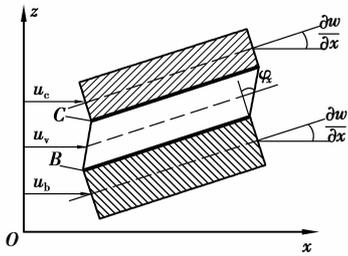


图 3 SCLD 单元  $x$ - $z$  面内几何变形图

由结构运动关系得到:

粘弹性阻尼层绕  $y$  轴的转角  $\varphi_x$  为

$$\varphi_x = \left( \frac{u_c - u_b}{h_v} \right) = \frac{1}{h_v} \left( u_c - u_b + \frac{h_c + h_b + 2h_s}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (2)$$

则粘弹性阻尼材料绕  $y$  轴产生的剪切变形

$$\beta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x = \frac{u_c - u_b}{h_v} + \frac{d}{h_v} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3)$$

式(3)中,  $d = h_v + \frac{h_c + h_b + 2h_s}{2}$ .

由图 3,粘弹性阻尼层的  $x$  向中层面内位移为

$$u_v = \frac{1}{2} (u_c + u_b) = \frac{1}{2} \left( u_c + u_b + \frac{h_c - h_b}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (4)$$

则粘弹性材料层绕  $x$  轴的剪切变形为

$$\beta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y = \frac{v_c - v_b}{h_v} + \frac{d}{h_v} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5)$$

粘弹性层的  $y$  向中层面内位移为

$$v_v = \frac{1}{2} \left( v_c + v_b + \frac{h_c - h_b}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (6)$$

### 1.3 单元位移模型及形函数

构造出的二维 4 节点约束阻尼板单元,每个节点包含 7 个自由度。这 7 个自由度分别是基层、约束层面内  $x$  向和  $y$  向位移自由度,结构沿  $Z$  向的位移自由度,及单元绕  $x$  轴转角自由度,绕  $y$  轴转角自由度。依次表示为  $u_c, v_c, u_b, v_b, w, \theta_x, \theta_y$ , 见图 2 所示。取单元节点位移矢量为  $\Delta_i = [u_{ci} \ v_{ci} \ u_{bi} \ v_{bi} \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}]^T, i=1, 2, 3, 4$  则单元位移矢量为:  $\{\delta\}^e = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 \ \Delta_4]$ 。

根据有限元法节点位移模式的帕斯卡准则<sup>[12]</sup>,假设单元面内的位移场分别为

$$\begin{aligned} u_c &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy, \\ v_c &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy, \\ u_b &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} xy, \\ v_b &= a_{13} + a_{14} x + a_{15} y + a_{16} xy, \\ w &= a_{17} + a_{18} x + a_{19} y + a_{20} x^2 + a_{21} xy + \\ &\quad a_{22} y^2 + a_{23} x^3 + a_{24} x^2 y + a_{25} xy^2 + \\ &\quad a_{26} y^3 + a_{27} x^3 y + a_{28} xy^3, \\ \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y}, \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

第  $i$  个单元在单元内任意位置  $(x, y)$  的位移向量  $\{\delta\}$  可由单元位移矢量插值获得,即

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= [u_c \ v_c \ u_b \ v_b \ w \ \theta_x \ \theta_y]^T = \\ &= N^T \{\delta^e\} = \{[N_1], [N_2], [N_3], [N_4], [N_5], \\ &\quad [N_6], [N_7]\}^T \{\delta^e\}. \end{aligned} \quad (7)$$

形函数矩阵中,  $[N_1], [N_2], [N_3], [N_4], [N_5], [N_6], [N_7]$  分别为位移分量函数  $u_c, v_c, u_b, v_b, w, \theta_x, \theta_y$  对应的形函数向量。

将式(7)代入式(4)及(6),可以得到粘弹性阻尼材料的纵向位移  $u_v, v_v$  的形函数向量为

$$N_8 = \frac{1}{2} \left[ (N_1 + N_3) + \left( \frac{h_c - h_b}{2} \right) (-N_7) \right], \quad (8)$$

$$N_9 = \frac{1}{2} \left[ (N_2 + N_4) + \left( \frac{h_c - h_b}{2} \right) (N_6) \right]. \quad (9)$$

将式(7)代入式(3)及(5),可以得到粘弹性阻尼材料的剪切应变  $\beta_x, \beta_y$  的形函数向量为

$$N_{10} = \frac{1}{h_v} \left[ (N_1 - N_3) + \left( \frac{h_c + h_b + 2h_s}{2} + h_v \right) (-N_7) \right], \quad (10)$$

$$N_{11} = \frac{1}{h_v} \left[ (N_2 - N_4) + \left( \frac{h_c + h_b + 2h_s}{2} + h_v \right) (N_6) \right]. \quad (11)$$

### 1.4 单元能量方程式

根据有限元理论,在给定节点位移场模式和形函数矩阵后,可以借助能量法推导出压电机敏约束层阻尼板单元各层的势能和动能,其中势能由各层的弯曲势能及阻尼层的剪切势能组成;动能由各层的面内运动及横向运动产生<sup>[9]</sup>。

#### 1.4.1 基板层

基板层的势能  $U_b$  和动能  $T_b$  可表示为

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{bx} \epsilon_{bx} + \sigma_{by} \epsilon_{by} + \tau_{bxy} \gamma_{bxy}) dv = \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^e T [K_b^{(e)} + K_{wb}^{(e)}] \{\delta\}^e. \end{aligned} \quad (12)$$

式子中刚度阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_b^{(e)} &= h_b \int_0^a \int_0^b B_b^T D_b B_b dx dy, \\ \mathbf{K}_{wb}^{(e)} &= \frac{h_b^3}{12} \int_0^a \int_0^b B_w^T D_b B_w dx dy, \\ \mathbf{B}_b &= \begin{bmatrix} N_{3,x} \\ N_{4,y} \\ N_{3,y} + N_{4,x} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_w &= [N_{5,xx} \quad N_{5,yy} \quad 2N_{5,xy}]^T, \\ \mathbf{T}_b &= \frac{1}{2} m_b V_b^2 = \\ &= \frac{\rho_b h_b}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_b}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_b}{\partial t} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [\mathbf{M}_b^{(e)}] \{\delta\}^e. \end{aligned} \quad (13)$$

式子中质量阵为

$$\mathbf{M}_b^{(e)} = \rho_b h_b \int_0^a \int_0^b (N_5^T N_5 + N_3^T N_3 + N_4^T N_4) dx dy.$$

#### 1.4.2 压电约束层

在压电弹性体内,机械效应与电效应是分不开的,两者互相影响,紧密的耦合在一起。对于压电陶瓷,主要是在  $x$ - $y$  平面内的应力产生作用,并且压电驱动器不发生剪切变形。将压电陶瓷(PZT)材料沿厚度方向极化,由压电材料的第二类方程组,可得到二维状态下压电陶瓷片机电特性耦合本构方程为<sup>[13]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^E & S_{21}^E & S_{61}^E \\ S_{12}^E & S_{22}^E & S_{62}^E \\ S_{16}^E & S_{26}^E & S_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}^\sigma & e_{12}^\sigma & S_{13}^\sigma \\ e_{21}^\sigma & e_{22}^\sigma & e_{23}^\sigma \\ e_{31}^\sigma & e_{32}^\sigma & e_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

式子中,  $D$  是电位移,  $E_3$  是电场强度;  $\epsilon$  和  $\sigma$  分别是应变和应力;  $s_{kh}^E$  是弹性柔度系数,  $h, k=1, 2, 6$ ;  $e_{ij}^\sigma$  是介电常数,  $d_{ij}$  是压电常数,  $i, j=1, 2, 3$ 。下标 1, 2, 3, 6 分别对应坐标关系是  $x, y, z, xy$ 。

当无外加电压作用时,压电片的应力应变关系符合平面应力问题的应力应变关系,此时压电片的势能  $U_c$  和动能  $T_c$  表示为

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{cx} \epsilon_{cx} + \sigma_{cy} \epsilon_{cy} + \tau_{cxy} \gamma_{cxy}) dv = \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^e T [\mathbf{K}_c^{(e)} + \mathbf{K}_{wc}^{(e)}] \{\delta\}^e. \end{aligned} \quad (16)$$

式子中刚度阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c^{(e)} &= h_c \int_0^a \int_0^b B_c^T D_c B_c dx dy, \\ \mathbf{K}_{wc}^{(e)} &= \frac{h_c^3}{12} \int_0^a \int_0^b B_w^T D_c B_w dx dy, \\ \mathbf{B}_c &= \begin{bmatrix} N_{1,x} \\ N_{2,y} \\ N_{1,y} + N_{2,x} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_c &= \frac{1}{2} m_c V_c^2 = \frac{\rho_c h_c}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_c}{\partial t} \right)^2 + \\ &= \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [\mathbf{M}_c^{(e)}] \{\delta\}^e. \end{aligned} \quad (17)$$

式子中质量阵为

$$\mathbf{M}_c^{(e)} = \rho_c h_c \int_0^a \int_0^b (N_5^T N_5 + N_1^T N_1 + N_2^T N_2) dx dy.$$

当压电片力学自由时,在压电陶瓷片两电极间施加电压时,压电片将产生驱动应变  $\mathbf{A}_c$ <sup>[7]</sup>,由式(15)及压电本构特征可得  $\mathbf{A}_c = [d_{31} \quad d_{32} \quad 0]^T E_3$ 。由此,在压电片内部所产生的压电驱动应力为

$$\boldsymbol{\sigma}_c^E = \begin{bmatrix} \sigma_{cx}^E \\ \sigma_{cy}^E \\ \tau_{cxy}^E \end{bmatrix} = D_c \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{V_c(t)}{h_c}. \quad (18)$$

则在外电场作用下,压电单元面内压电力做功为

$$\begin{aligned} W_c^{(e)} &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{cx}^E \epsilon_{cx} + \sigma_{cy}^E \epsilon_{cy} + \tau_{cxy}^E \gamma_{cxy}) dv = \\ &= \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \{f_c^{(e)}\}. \end{aligned} \quad (19)$$

式子中,压电主动控制力(力矩)为

$$\begin{aligned} f_c^{(e)} &= V_c^{(e)}(t) \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} N_{1,x} \\ N_{2,y} \\ N_{1,y} + N_{2,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{bmatrix} dx dy + \\ &= \frac{1}{4} h_c V_c^{(e)}(t) \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} N_{5,xx} \\ N_{5,yy} \\ 2N_{5,xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{bmatrix} dx dy. \end{aligned}$$

其中,  $V_c^{(e)}(t)$  为压电单元驱动电压。

#### 1.4.3 粘接层

粘接层与基层相连部分的势能  $U_{bs}$  和压电层相连部分的势能  $U_{cs}$  分别为

$$\begin{aligned} U_{bs} &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{bsx} \epsilon_{bsx} + \sigma_{bsy} \epsilon_{bsy} + \tau_{bsxy} \gamma_{bsxy}) dv = \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^e T [\mathbf{K}_{bs}^{(e)} + \mathbf{K}_{ubs}^{(e)}] \{\delta\}^e, \end{aligned} \quad (20)$$

$$U_{cs} = \frac{1}{2} \iiint_v (\sigma_{cx} \epsilon_{cx} + \sigma_{cy} \epsilon_{cy} + \tau_{cxy} \gamma_{cxy}) dv = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_{cs}^{(e)} + K_{ucs}^{(e)}] \{\delta\}^e. \quad (21)$$

式子中刚度矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{bs}^{(e)} &= h_s \int_0^a \int_0^b B_b^T D_s B_b dx dy, \\ \mathbf{K}_{ucs}^{(e)} &= K_{ucs}^{(e)} = \frac{h_s^3}{12} \int_0^a \int_0^b B_w^T D_s B_w dx dy, \\ \mathbf{K}_{cs}^{(e)} &= h_s \int_0^a \int_0^b B_c^T D_s B_c dx dy. \end{aligned}$$

粘接层的与基层相连部分的动能  $T_{bs}$  和压电层相连部分的动能  $T_{cs}$  分别为

$$T_{bs} = \frac{1}{2} m_s V_b^2 = \frac{\rho_s h_s}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_b}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_b}{\partial t} \right)^2 dx dy = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M_{bs}^{(e)}] \{\dot{\delta}\}^e, \quad (22)$$

$$T_{cs} = \frac{1}{2} m_s V_c^2 = \frac{\rho_s h_s}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_c}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_c}{\partial t} \right)^2 dx dy = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M_{cs}^{(e)}] \{\dot{\delta}\}^e. \quad (23)$$

式(23)~(24)中的质量矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{bs}^{(e)} &= \rho_s h_s \int_0^a \int_0^b (N_5^T N_5 + N_3^T N_3 + N_4^T N_4) dx dy, \\ \mathbf{M}_{cs}^{(e)} &= \rho_s h_s \int_0^a \int_0^b (N_5^T N_5 + N_1^T N_1 + N_2^T N_2) dx dy. \end{aligned}$$

#### 1.4.4 粘弹性阻尼层

粘弹性阻尼层的势能包含层内势能  $U_w$  和剪切势能  $U_\beta$ 。

$$U_w = \frac{1}{2} \iiint_v (\sigma_{wx} \epsilon_{wx} + \sigma_{wy} \epsilon_{wy} + \tau_{wxy} \gamma_{wxy}) dv = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_w^{(e)} + K_{uwx}^{(e)}] \{\delta\}^e. \quad (24)$$

式子中刚度阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_w^{(e)} &= h_v \int_0^a \int_0^b B_w^T D_w B_w dx dy, \\ \mathbf{K}_{uwx}^{(e)} &= \frac{h_v^3}{12} \int_0^a \int_0^b B_w^T D_w B_w dx dy, \\ \mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} N_{8,x} \\ N_{9,y} \\ N_{8,y} + N_{9,x} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

小变形条件下,粘弹性材料的力学行为主要受到温度和频率影响。粘弹性材料 ADF (anelastic displacements fields)模型<sup>[5]</sup>是基于热不可逆原理的连续场模型,可用于描述粘弹性材料作剪切运动时

的频率特性和温度特性。它从位移场的角度出发,将总的位移场分为弹性部分和滞弹性部分,并认为滞弹性场同弹性场类似,弹性部分的应变与应力成比例;滞弹性部分代表粘弹性的松弛特性和损耗能。在时域的应力应变本构关系为<sup>[14]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= G_v (\epsilon_v - \sum_i^N \epsilon_i^a), \\ \sigma_i^a &= \frac{c_i G_v}{\Omega_i} \dot{\epsilon}_i^a = G_v (\epsilon_v - c_i \epsilon_i^a) \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

$\Omega_i$  为第  $i$  个滞弹性场的松弛系数,  $G_v$  是粘弹材料的复剪切模量函数,  $C_i$  是第  $i$  个滞弹性位移场和弹性位移场之间的耦合系数,  $\sigma_v$ 、 $\epsilon_v$  分别是材料总应力及总应变,  $\sigma_i^a$ 、 $\epsilon_i^a$  是第  $i$  个滞弹性位移场的滞弹性应力和滞弹性应变,  $N$  代表滞弹性位移场的个数。

将式(25)作傅里叶变换,可得到粘弹性材料在频域内的复模量函数模型为

$$G_v = G_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^N \Delta_i \frac{\omega^2 + j\omega\Omega_i}{\omega^2 + \Omega_i^2} \right). \quad (26)$$

式(26)中,  $G_0$  对应于松弛弹性模量,是实常数;  $\Delta_i$  代表材料松弛阻力参数。式(26)中各参数数值可以通过粘弹性材料在频率范围内的复模量实验曲线拟合确定。

由此,得到粘弹性材料的剪切势能为

$$U_\beta = \frac{1}{2} \iiint_v (\beta_x G_v \beta_x + \beta_y G_v \beta_y) dv = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T G_v [K_\beta^{(e)}] \{\delta\}^e. \quad (27)$$

式子中材料剪切刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_\beta^{(e)} = h_v \int_0^a \int_0^b (N_{10}^T N_{10} + N_{11}^T N_{11}) dx dy.$$

粘弹性阻尼层的动能  $T_w$  为

$$T_w = \frac{1}{2} m_v V_v^2 = \frac{\rho_v h_v}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_v}{\partial t} \right)^2 dx dy = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M_w^{(e)}] \{\dot{\delta}\}^e. \quad (28)$$

式子中粘弹性材料质量阵为

$$\mathbf{M}_v^{(e)} = \rho_v h_v \int_0^a \int_0^b (N_5^T N_5 + N_8^T N_8 + N_9^T N_9) dx dy.$$

#### 1.4.5 外扰做功

在外扰激励作用时,其做功为

$$W_d^{(e)} = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T f_d^{(e)}. \quad (29)$$

式中,  $f_d^{(e)}$  为外界机械干扰力矩阵。

以上各式中,  $\sigma_{ix}$ 、 $\sigma_{iy}$ 、 $\tau_{ixy}$  分别表示第  $i$  层结构沿

$x$  向正应力,  $y$  向正应力和面内剪切应力;  $\epsilon_{ix}, \epsilon_{iy}, \gamma_{ixy}$  分别表示第  $i$  层结构沿  $x$  向正应变,  $y$  向正应变和面内剪切应变;  $m_i, V_i$  分别表示第  $i$  层质量和层内节点运动速度;  $h_i$  为层厚度,  $\rho_i$  为体密度,  $E_i$  为弹性模量,  $\mu_i$  为泊松比;  $\mathbf{D}_i$  为弹性系数矩阵, 具体为

$$\mathbf{D}_i = \frac{E_i}{1 - \mu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu_i & 0 \\ \mu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu_i}{2} \end{bmatrix}.$$

$i = c, v, s, b$ ; 分别为压电约束层, 粘弹性层, 粘接层, 基层; 下标“ $\cdot$ ”表示对后面的变量求偏导。

### 1.5 SCLD 单元动力学方程

基于 Hamilton 变分原理, 得到 SCLD 单元有限元动力学方程

$$\mathbf{M}^{(e)} \{\ddot{\delta}\}^e + \mathbf{K}^{(e)} \{\delta\}^e + \mathbf{G}_v \mathbf{K}_\beta^{(e)} \{\delta\}^e = \mathbf{f}_c^{(e)} + \mathbf{f}_d^{(e)}. \quad (30)$$

式(30)中, 单元总质量矩阵  $\mathbf{M}^{(e)}$  和单元总刚度矩阵  $\mathbf{K}^{(e)}$  分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)} &= \mathbf{M}_b^{(e)} + \mathbf{M}_c^{(e)} + \mathbf{M}_v^{(e)} + \mathbf{M}_{bs}^{(e)} + \mathbf{M}_{cs}^{(e)}, \\ \mathbf{K}^{(e)} &= \mathbf{K}_b^{(e)} + \mathbf{K}_{cb}^{(e)} + \mathbf{K}_c^{(e)} + \mathbf{K}_{cv}^{(e)} + \mathbf{K}_v^{(e)} + \mathbf{K}_{vc}^{(e)} + 2\mathbf{K}_{cbs}^{(e)}. \end{aligned}$$

### 1.6 引入 ADF 模型的结构总动力模型

按照有限元法集成系统总矩阵的方法, 集成 SCLD 结构总动力学方程如下

$$\mathbf{M}\{\ddot{x}\} + \mathbf{K}_e\{x\} + \mathbf{G}_v \mathbf{K}_\beta\{x\} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_d. \quad (31)$$

其中,  $\mathbf{M}$  是结构总质量阵,  $\mathbf{K}_e$  是结构总的弹性刚度矩阵,  $\mathbf{K}_\beta$  为粘弹性材料总剪切刚度矩阵,  $\mathbf{F}_c, \mathbf{F}_d$  分别是总的压电主动控制力矩阵及外界干扰力矩阵,  $x$  是总的节点位移自由度向量。

式(31)中  $\mathbf{G}_v$  是随温度、频率变化而变化的, 为描述粘弹性材料这一特性, 引入 ADF 模型表征。粘弹性材料 ADF 模型中弹性部分和滞弹性部分的关系通过引入一系列耗散辅助变量  $x_i^a$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 表示<sup>[4-5]</sup>

$$x^e = x - \sum_{i=1}^n x_i^a. \quad (32)$$

式中,  $x^e$  是弹性位移场,  $x_i^a$  是第  $i$  个滞弹性位移场。

将  $x^e$  替代式(31)中的粘弹性材料恢复力中的  $x$ , 并记考虑滞弹性位移场后的粘弹性材料总刚度矩阵为  $\mathbf{K}_v^\infty$ , 再结合式(26), 则可得到引入 ADF 模型表征的粘弹性结构有限元方程

$$\mathbf{M}\ddot{x} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^\infty)x - \mathbf{K}_v^\infty \sum_{i=1}^n x_i^a = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_d. \quad (33)$$

式(34)中,  $\mathbf{K}_v^\infty = \mathbf{G}_0(1 + \sum_i \Delta_i) \mathbf{K}_\beta$ 。

ADF 模型中, 描述粘弹性材料松弛行为的第  $i$

个滞弹性场松弛方程<sup>[3]</sup>表示为

$$\frac{C_k}{\Omega_i} K_v^\infty \dot{x}_i^a + C_k K_v^\infty x_i^a - K_v^\infty x = 0. \quad (34)$$

式中, 耦合因子  $C_k = (1 + \sum_i \Delta_i) / \Delta_k, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n$ 。

联合式(33)、(34), 构成机敏约束层阻尼板结构耦合系统的振动方程

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{x}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\tilde{x}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{x} = \tilde{\mathbf{F}}. \quad (35)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{aa} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_d \\ 0 \end{bmatrix},$

$$\tilde{x} = \text{col}(x, \hat{x}_1^a, \dots, \hat{x}_n^a), \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^\infty & \mathbf{K}_{ea} \\ \mathbf{K}_{ea}^T & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{aa} = \text{diag}\left(\frac{C_1}{\Omega_1} G_\infty \Lambda_v \dots \frac{C_n}{\Omega_n} G_\infty \Lambda_v\right),$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \text{diag}(C_1 G_\infty \Lambda_v \dots C_n G_\infty \Lambda_v),$$

$$\mathbf{K}_{ea} = [-K_v^\infty \Psi_v \quad -K_v^\infty \Psi_v \quad \dots \quad -K_v^\infty \Psi_v].$$

其中,  $\mathbf{G}_\infty = \mathbf{G}_0(1 + \sum_i \Delta_i)$ ,  $\Lambda_v$  是由粘性材料刚度矩阵  $\mathbf{K}_v$  的正特征值组成的对角阵,  $\Psi_v$  是以相应的正交特征向量作为列的矩阵, 并且  $\hat{x}_i^a = \Psi_v^T x_i^a$ 。

## 2 系统状态空间模型

从式(35)可知, 由于引入的耗散坐标不具有质量特征, 导致总的质量矩阵为奇异矩阵。因此, 为不求解普通的二阶线性系统方程(35), 在状态空间构造状态空间变量  $\text{col}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$  代替  $\text{col}(\tilde{x}, \tilde{x})$  以消除矩阵的奇异性。根据现代控制理论, 构建状态空间运动方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}_c V + \mathbf{B}_d F, \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

其中,  $x = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix}, \tilde{x} = \text{col}(x, \hat{x}_1^a, \dots, \hat{x}_n^a), u = [V \quad F]$ 。

式子中  $\mathbf{B}_d$  及  $\mathbf{B}_c$  分别为扰动力分布矩阵和控制作用力分布矩阵,  $V$  为压电片控制电压,  $F$  为外界干扰力,  $c_x, c_x$  分别表示观测点位移及速度输出矩阵<sup>[9]</sup>。

根据状态空间运动方程(36), 可进行机敏约束层阻尼减振板的动力学分析及控制研究。当  $V = 0$  时, 结构动力学方程转变成传统的被动约束层阻尼减振结构。

## 3 算例分析

以局部覆盖 4 块 SCLD 结构的对边约束板为研

究对象,如图 4 所示。对象物理参数:基板层材料为不锈钢板,长度×宽度×厚度=400 mm×270 mm×2 mm;单片压电材料尺寸为长度×宽度×厚度=105 mm×14 mm×0.7 mm,实验中采用四片压电片沿宽度方向对接形成所需的单块 SCLD 结构尺寸;粘弹性材料 ZN-1 型阻尼减振材料,其尺寸为长度×宽度×厚度=105 mm×56 mm×1 mm;各层间采用聚氨酯专用粘接剂粘接,粘接层厚度由于难以精度测量,这里取实际测量值的修正结果,约为 0.3 mm。基板的弹性模量  $E_b = 155 \text{ GPa}$ ,密度为  $7950 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_b = 0.25$ ;压电材料弹性模量  $E_c =$

$66.67 \text{ GPa}$ ;压电材料密度  $\rho_c = 7450 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_c = 0.32$ ;粘弹性阻尼层密度  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_v = 0.499$ ;粘接层弹性模量为  $51 \text{ GPa}$ ,密度  $\rho_s = 1780 \text{ kg/m}^3$ ,泊松比  $\mu_s = 0.3$ 。粘弹性阻尼材料 ADF 模型参数在  $20 \sim 1000 \text{ Hz}$  频带内的优化结果<sup>[15]</sup>

$$G_0 = 5.0 \times 10^5 \text{ Pa}, \Delta = [1.955 \quad 98.14 \quad 0.8812 \quad 5.303]。$$

$$\Omega = [1.19 \times 10^3 \quad 5.839 \times 10^4 \quad 2.273 \times 10^2 \quad 4.895 \times 10^3]。$$

表 1 结构模态参数对比一览表

阶数	理论计算(含粘接层)		理论计算(无粘接层)		模态实验结果		Ansys 计算结果		单层基板
	固有频率/Hz	阻尼比	固有频率/Hz	阻尼比	固有频率/Hz	阻尼比	固有频率/Hz	阻尼比	固有频率/Hz
1	56.27	$1.4478 \times 10^{-2}$	57.18	$1.4311 \times 10^{-2}$	53.1	$1.83 \times 10^{-2}$	57.04	$1.22 \times 10^{-2}$	56.38
2	78.79	$1.9538 \times 10^{-2}$	80.18	$1.9012 \times 10^{-2}$	75.2	$1.87 \times 10^{-2}$	80.10	$1.66 \times 10^{-2}$	78.77
3	153.33	$1.2521 \times 10^{-2}$	155.90	$1.2093 \times 10^{-2}$	152.5	$1.39 \times 10^{-2}$	155.33	$1.15 \times 10^{-2}$	155.96
4	174.14	$8.6892 \times 10^{-3}$	176.93	$7.8113 \times 10^{-3}$	180.0	$5.29 \times 10^{-3}$	178.98	$7.15 \times 10^{-3}$	175.95

为验证模型的正确性,在开环状态( $V=0$ )开展了 SCLD 减振板结构模态分析理论计算与实验研究。利用锤击法测试对边约束 SCLD 板结构前四阶固有频率及阻尼比。为避免加速度计因附加质量或者粘贴形式对实验结果的影响,测试中采用 Polytec 激光测振仪作为响应传感器拾取结构测点的速度响应。图 4 为模态实验某测点频响曲线。SCLD 减振板前四阶模态有限元理论分析结果及试验结果见表 1。为进一步验证理论模型的正确性,采用 ansys 有限元分析软件建立 SCLD 板结构的有限元模型,并基于迭代算法计算了对边约束 SCLD 板结构的前四阶固有频率和阻尼比。Ansys 建模中,考虑粘接层的作用,并用 solid45 单元对各层结构进行模拟。

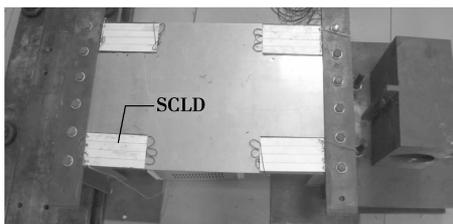


图 4 局部覆盖 SCLD 结构的对边约束板实物图

从表 1 的对比结果看,局部覆盖 SCLD 结构后,对边约束板的固有频率变化不大,但阻尼比大大提

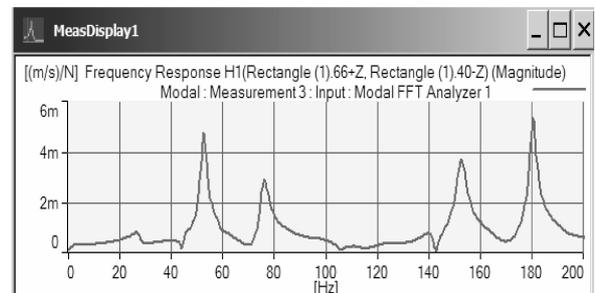


图 5 模态实验 SCLD 板上某测点频响曲线

高;理论计算的前 4 阶固有频率整体上好于不考虑粘接层的计算结果及 Ansys 计算结果,与实验值更接近,主要原因是 Ansys 中各层都采用实体单元模拟,与传统板壳单元比较,导致刚度大于实际情况,特别是对于粘接层及粘弹性层的软性材料而言,刚度增加尤为明显,因而整体计算结果会偏大;阻尼比计算值和实验结果及 Ansys 计算值也比较接近,但第 1 阶和第 4 阶相差较大,这是由于粘接材料是具有一定粘弹特性的材料,在实验操作中,其敷设厚度很难精确把握,这也势必影响阻尼比的计算误差,何况对于像本实验中的小阻尼构件,通过实验法准确测试结构的阻尼比,本身存在难题。但计算结果的量级足以说明粘弹性材料的力学行为表征是比较准确的。同时计算发现,粘接层的存在不但会使结构

固有频率前移,而且对系统阻尼比的估算也是有一定影响的,因此建模中若考虑粘接层将有助于提高理论模型的精度。

## 4 结 论

1) 考虑到各层结构间的耦合运动及位移协调关系,采用有限元法推导了机敏约束层阻尼减振板各层结构的功能方程,以 ADF 模型表征材料的随温频变化的力学特征,基于 Hamilton 原理将有限元方程与滞弹性位移场模型结合,建立了耦合系统的动力学分析模型。由于采用有限元法离散对象,该模型适合于任意复杂机敏约束阻尼结构的振动建模。

2) 算例研究表明:建立的压电机敏约束层阻尼减振板耦合系统动力学模型是正确可行的,能够表征结构的动力学特性,可进一步用于后续的控制研究。

3) 粘接层的存在不但会使结构固有频率发生变化,而且对系统阻尼比的估算也有影响,其对 SCLD 结构动力学建模精度的影响是不容忽视的。

受篇幅限制,尽管只在开环状态下验证了动力学模型的正确性,但在系统建模中由于已详细考虑了压电主动控制力特征,这对下一步机敏耦合系统的主动控制实现无疑是奠定了基础。接下来的工作是开展 SCLD 减振板结构动态性能的主动控制以及将此技术应用到复杂结构的振动噪声控制研究。

### 参考文献:

- [1] Stanway R, Rongong J A, Sims N D. Active constrained-layer damping: a state-of-the-art review[J] // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2003, 217(6): 437-456.
- [2] Park C H, Inman D J and Lan M J. Model reduction of viscoelastic finite element models[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 219(4): 619-637.
- [3] Trindade M A, Benjeddou A, Ohayon R. Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2000, 122(2): 169-174.
- [4] Lesieutre G A, Lee U. A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelasticity[J]. Smart Material Structures, 1996, 5(5): 615-627.
- [5] Trindade M A. Reduced-order finite element models of viscoelastically damped beams through internal variables projection [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2006, 128(4): 501-508.
- [6] Vasques C M A, Rodrigues J D. Combined feedback/feedforward active control of vibration of beams with ACLD treatments: numerical simulation[J]. Computers and Structures 2008, 86 :292-306.
- [7] Lesieutre G A, Blanchini E, Maiani A. Finite element modeling of one-dimensional viscoelastic structures using anelastic displacement fields [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1996, 19 (3): 520-527.
- [8] Kumar N, Singh S P. Vibration and damping characteristics of beams with active constrained layer treatments under parametric variations [J]. Materials and Design, 2009, 30(10): 4162-4174.
- [9] 曹友强, 邓兆祥, 鲜森峰, 等. 基于机敏约束阻尼技术的结构动态性能主动控制[J]. 汽车工程学报, 2011, 1(1): 18-26.  
CAO Youqiang, DENG Zhaoxiang, XIAN Miaofeng, et al. Active control of structure dynamic performance based on smart constrained layer damping technology [J]. Chinese Journal of Automotive Engineering, 2011, 1(1): 18-26.
- [10] Ochoa P, Pons J L, Villegas M, et al. Effect of bonding layer on the electromechanical response of the cymbal metal-ceramic piezocomposite [J]. Journal of the European Ceramic Society, 2007, 27(2/3): 1143-1149.
- [11] Wu T, Ro P I. Dynamic peak amplitude analysis and bonding layer effects of piezoelectric bimorph cantilevers[J]. Smart Material Structures, 2004, 13(1): 203-210.
- [12] 王元汉, 李丽娟, 李银平. 有限元法基础与程序设计 [M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2001.
- [13] Standards Committee of the IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society. ANS/IEEE Std 176-1987 IEEE Standard on Piezoelectricity [S]. United States: American National Standards Institut, 1987.
- [14] 曹涛. 带叶间粘弹减摆器的旋翼耦合系统气弹动力学研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学硕士学位论文, 2004.
- [15] 曹友强, 邓兆祥, 李军, 等. 阻尼减振材料滞弹性位移场模型参数寻优及计算[J]. 振动与冲击, 2011, 30(8): 264-268.  
CAO Youqiang, DENG Zhaoxiang, LI Jun, et al. Parameter optimization and calculation of ADF model for vibration damping material[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(8): 264-268.