

文章编号: 1000-582X(2012)10-063-06

图上自适应正则化的图像去噪

刘国金¹, 曾孝平¹, 刘 刘^{1,2}

(1. 重庆大学 通信工程学院, 重庆 400044; 2. 重庆气象局, 重庆 401147)

摘 要: 自适应正则化方法在不同的局部区域能够选取不同的正则化参数和正则化约束, 因而能够灵活地对边缘和噪声进行区别处理。将自适应正则化建立在图上, 提出了一种定义在加权图上的, 具有自适应参数的正则化模型。用 nonlocal means 算法构造图的权重函数, 用建立在图上的自适应正则化方程实现图像的去噪处理, 仿真实验结果表明: 该方法能有效地去除图像中的噪声, 在去噪性能上优于部分基于图论的偏微分方程方法。

关键词: 图像去噪; 自适应正则化; 图论; 偏微分方程

中图分类号: TP391

文献标志码: A

Image denoising based on adaptive graph regularization

LIU Guojin, ZENG Xiaoping, LIU Yi

(College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Adaptive regularization can select different parameters based on the features of local areas in an image, which can differentiate the edges and noise in an image flexibly. An adaptive graph regularization is proposed based on graph spectral theory and adaptive regularization, which uses the Non local means to generate the weighting function of graph. The adaptive graph regularization equation is used to filter the noisy image. Simulation results show that the proposed method can effectively remove the noise and is superior to other graph theory based partial differential equation methods.

Key words: image denoising; adaptive regularization; graph theory; partial differential equation

图像去噪是图像处理中重要预处理步骤, 噪声的存在对后续的图像分析和理解带来困难。基于偏微分方程(partial differential equation, PDE)的正则化变分模型是近年来应用较多的方法之一^[1-5]。图像去噪的正则化模型首先建立由平滑项和保真项构成的能量泛函, 然后通过变分方法得到图像去噪的偏微分方程, 并求解偏微分方程以得到不同程度噪声去除的新图像。不失一般性, 正则化变分模型可用如下公式进行描述^[1-2]

$$\min_{f \in H} \begin{cases} E_p(f, f^0, \lambda) = \int_{\Omega} (\|\nabla f\|^p + \\ \lambda \|f - f^0\|_H^2) \end{cases}, \quad (1)$$

$$p = 1 \quad \text{or} \quad 2,$$

式(1)的最小值可以通过梯度下降法和 Euler-Lagrange 方程 E_p 来得到, 在公式(1)中, 当 $p=1$ 时, E_1 对应于 Rudin、Osher 和 Fatemi 模型^[6], 当 $p=2$ 时, E_2 对应于 Tikhonov 模型^[7]。上述基于正则化的变分模型有如下 2 个缺点^[8]: 模型定义在连续的空间上, 需要进行离散化处理; 离散化数值实现

收稿日期: 2012-01-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60971016); 重庆市自然科学基金资助项目(CSTC2009BB2358); 重庆大学研究生创新团队项目(200909C1015); 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJRC10160003)。

作者简介: 刘国金(1974-), 男, 重庆大学副教授, 主要从事信号与信息处理方向研究, (Tel)13609413513; (E-mail)liuguojing@126.com。

时,不能适应以任意拓扑结构组织的数据集。

2007 年,Lezorary 提出了一种基于图上正则化的图像去噪方法^[8],系统的建立了图正则化的相关理论,解决了上述 2 个缺点,但也存如下 2 个不足: 1)图的权重函数不能充分反映图像像素之间的相关性,文献^[9]指出,图的权重函数对图像的去噪有着严重的影响。2)文中给出的正则化算子 p 是固定的 ($p=1$ 或 $p=2$),不能适应图像结构的变化。

利用谱图理论^[10],将图像看成 1 个嵌入在高维流形空间子图,将图像的去噪问题转化为在子图上的正则化扩散问题;用图像像素之间的关系来生成无向图的权矩阵,提出了图上的自适应正则化扩散去噪模型,之后,利用图上的自适应正则化方程进行去噪。最后通过一系列实验对该模型的图像去噪效果进行分析,证明图上的自适应正则化模型的优势。

1 图上的自适应正则化模型

1.1 图的权重和拓扑结构

为了用图来表示图像的结构且不丢失图像信息,利用图论将含噪图像表示成一个 8 连接无向赋权简单图,在图像的像素点和图的顶点之间建立一一对应关系。采用 Non local means 算法^[11]中的相似窗口的概念来计算图中 2 点的相似程度。在计算权重的过程中,将图像中灰度值的变化映射到边的权重。如公式(2)所示

$$\omega(i, j) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{I}(N_i) - \mathbf{I}(N_j)\|_{2, \sigma}^2}{\kappa^2}\right), & \text{if } i \sim j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

这里 $i \sim j$ 表示像素点 i, j 对应于图中邻接的节点, $\vec{I}(N_i)$ 和 $\vec{I}(N_j)$ 分别表示一个列向量 \mathbf{I} , 其中是图像的像素灰度值。

$$\|\mathbf{I}(N_i) - \mathbf{I}(N_j)\|_{2, \sigma} = d_{\sigma}(i, j) = G_{\sigma} \cdot \|\mathbf{I}(N_i) - \mathbf{I}(N_j)\|_2, \quad (3)$$

对于含低噪声的图像,上面的式子能够有效地描述图像中的灰度值变化。也就是说,当像素 i 和 j 属于同一个区域时, $\omega(i, j)$ 的值较大;而当像素点 i 和 j 属于不同区域时, $\omega(i, j)$ 的值较小。 G_{σ} 的目的是减少噪声的影响。为提高算法的计算权重的鲁棒性,采用 2 个灰度值向量 $\mathbf{I}(N_i)$ 和 $\mathbf{I}(N_j)$ 之间的相似性来取代 2 个像素点 i 和 j 之间的相似性。图 1 说明了像素点的正方形窗口表示,不同窗口之间的相似性及其对边的权重的影响。

1.2 图上的自适应正则化去噪

定义图 $G = (V, E)$, 图上的希尔伯特空间

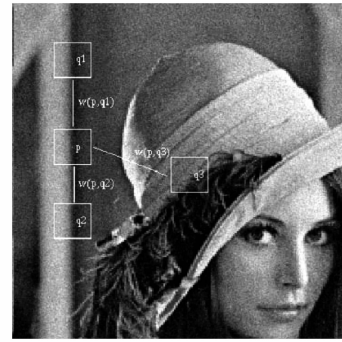


图 1 基于 NL-means 权重构造,图中 $w(p, q_1)$ 和 $w(p, q_2)$ 具有较大的值,而 $w(p, q_3)$ 的值则小很多

$H(V)$ 。对一个已知函数 $f^0 \in H(V)$,图上正则化的主要任务是得到一个函数 $f^* \in H(V)$,它既要在图 G 上足够平滑,又要与已知函数 f^0 足够接近。这一目的可以通过最小化 2 个能量项的和来达到。基于上述思想,将自适应正则化方程定义在任意拓扑结构上的无向赋权图上的离散域中,与公式(1)类似的离散域中的最小化问题可表示为

$$f^* = \min_{f \in H(V)} \left\{ E = E_s + E_D = \sum_{v \in V} \|\nabla_v f\|^{p(v)} + \lambda \sum_{v \in V} \|f - f^0\|^2 \right\}, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad (4)$$

式中,正则化参数 p 是自适应的,图上某一顶点的正则化参数 $p(v)$ 是由该顶点的梯度范数 $\|\nabla_v f\|$ 决定的,即

$$p(v) = p(\|\nabla_v f\|). \quad (5)$$

一般情况下

$$\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 2; \quad (6)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = 1; \quad (7)$$

式(4)中的第一项是平滑项,它使得 f 的值在邻近的顶点之间趋于平滑。第二项是保真项,它使得 f 的值趋近于 f^0 。拉格朗日乘数 $\lambda \geq 0$ 的作用是调节以上 2 项之间的平衡。 E 中的两项 E_s 和 E_D 都是关于 f 的严格的凸函数^[12-13],根据凸函数的性质,当 $1 \leq p \leq 2$ 时,式(4)的最优化问题有唯一的解,这个解满足

$$\left. \frac{\partial E}{\partial f} \right|_v = 0, \forall v \in V, \quad (8)$$

整理后,式(8)可以重写为

$$(\Delta_p f^*)(v) + 2\lambda(f^*(v) - f^0(v)) = 0, \forall v \in V, \quad (9)$$

式(4)的解 f 也就是式(9)的解。根据文献^[3]的知识,有

$$(\Delta_p f)(v) = \sum_{u \sim v} \gamma(u, v)(f(v) - f(u)), \quad (10)$$

$$\gamma(u, v) = w(u, v) (\|\nabla f(v)\|^{p-2} + \|\nabla f(u)\|^{p-2}), \quad (11)$$

$$\|\nabla_v f\| = \|\nabla f(v)\| = \sqrt{\sum_{u \sim v} w(u, v) (f(v) - f(u))^2}, \quad (12)$$

其中, Δ_p 表示图上的 p -Laplace 算子, $f(v)$ 表示定义在图中顶点 v 上的函数, $w(u, v)$ 表示定点 u, v 之间的权重, $\nabla f(v)$ 表示顶点 v 上的 f 的梯度,

把式(10), (11), (12)代入式(9), 得到

$$(2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma_{uv}) f^*(v) - \sum_{u \sim v} \gamma(u, v) f^*(u) = 2\lambda f^0(v), \forall v \in V, \quad (13)$$

1.3 Gauss-Jacobi 迭代解决方案

用 Gauss-Jacobi 迭代^[14-15]的方法解式(11)的方程。设 t 是迭代步数, $f^{(t)}$ 是式(11)在第 t 步的解。函数的初值 $f^{(0)}$ 可以设为 f^0 。对应的线性化 Gauss-Jacobi 迭代可表示为

$$f^{(t+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^{(t)}(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} \gamma^{(t)}(u, v) f^{(t)}(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^{(t)}(u, v)}, \forall v \in V, \quad (14)$$

其中 $\gamma^{(t)}$ 是 $\gamma(u, v)$ 在第 t 步的值。可以看到, $f(v)$ 在 $(t+1)$ 步的值取决于 2 个量: f 在 v 的初始值 $f^0(v)$ 和 v 邻接各顶点在 t 步的 f 值。

结合式(10), (14), 可得式(13)的迭代方案可以表示为

$$\begin{cases} f^0 = f, \\ \gamma^{(t+1)}(u, v) = w(u, v) \left(\frac{1}{\epsilon + \|\nabla f^{(t+1)}(v)\|^{2-p(\|\nabla_v f\|)}} + \frac{1}{\epsilon + \|\nabla f^{(t+1)}(u)\|^{2-p(\|\nabla_u f\|)}} \right), \\ f^{(t+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v) f^t(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v)}, \end{cases} \quad (15)$$

对于以上的模型, 当 p 取特定值时, 有如下的特殊情况

1) 当 $p=2$ 时, 式(14)的迭代方案表示为

$$\begin{cases} f^0 = f, \\ f^{(t+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} w(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} w(u, v) f^{(t)}(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} w(u, v)}, \forall v \in V \end{cases}, \quad (16)$$

当 $w(u, v)=1, \forall (u, v) \in E$, 这个模型是连续空间上 Tikhonov 模型的一种离散化。

2) 当 $p=1$ 时, 式(14)的迭代方案表示如下

$$\begin{cases} f^0 = f, \\ \gamma^{(t+1)}(u, v) = w(u, v) \left(\frac{1}{\epsilon + \|\nabla f^{(t+1)}(v)\|} + \frac{1}{\epsilon + \|\nabla f^{(t+1)}(u)\|} \right) \\ f^{(t+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v) f^t(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^t(u, v)}, \end{cases} \quad (17)$$

当 $w(u, v)=1, \forall (u, v) \in E$, 这个模型是连续空间上 TV 模型的一种离散化。从 $p=1$ 和 $p=2$ 情况可以看出, 文献[8]的研究内容是特例情况。

实际应用中, 为了避免在计算曲率时出现值为 0 的分母, $\|\nabla_v f\|^{p-2}$ 必须由它的正则化形式 $(\epsilon + \|\nabla_v f\|^{p-2})$ 替代, 其中 $\epsilon > 0$ 是一个很小的正数, 设定为 10^{-5} 。

2 图上正则化算法的具体实现

①利用图论将含噪图像表示成一个 8 连接无向赋权简单图, 在图像的像素点和图的顶点之间建立一一对应关系。

②利用公式(2)计算图的边之间的权重。

③采用如下公式计算自适应正则化算法的参数 $p(v)$ 。

$$p(v) = 1 + \frac{1}{1 + k \|\nabla G_\sigma * f(v)\|^2} = 1 + \frac{1}{1 + k \|\nabla f_\sigma(v)\|^2}, \forall v \in V, \quad (18)$$

其中 $k = \text{mean}_{v \in V} \frac{1}{\|\nabla f_\sigma(v)\|}$, $\sigma=3$, G_σ 是高斯滤波器, $f_\sigma(v)$ 表示图上函数 $f(v)$ 经过高斯卷积的结果。

④根据公式(13)进行迭代计算。

⑤根据迭代准则, 停止迭代, 得到最终去噪后的图像。

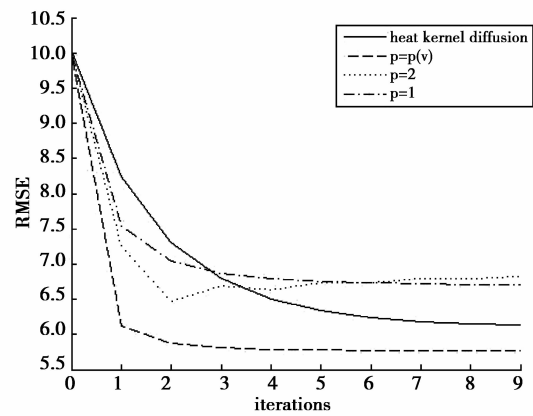
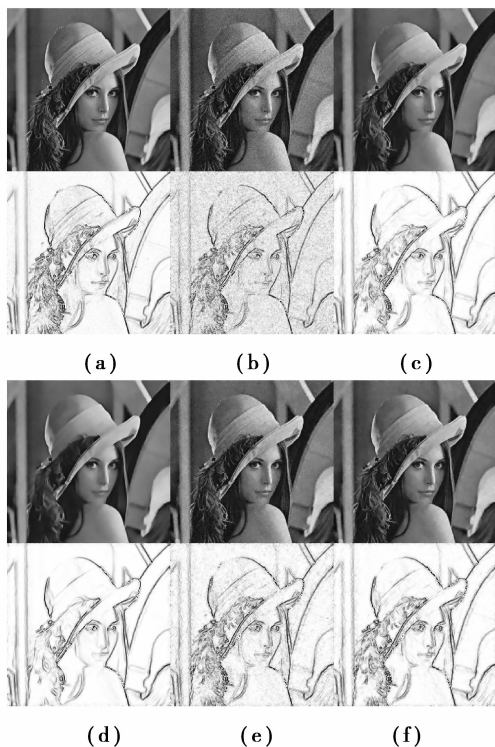
3 实验结果和分析

为检验算法的正确性和有效性, 分别采用提出的降噪算法, 基于 Non local Means 的热扩散方程方法^[9], Olivier Lezoray 的图正则化算法^[8] (实验中, 对该算法的 $p=1$ 或 $p=2$ 分别进行考虑, 且图中的权重采用的是 Non local means 算法) 进行对比试验。实验中, 采用 2 个指标来描述各种算法的优劣:

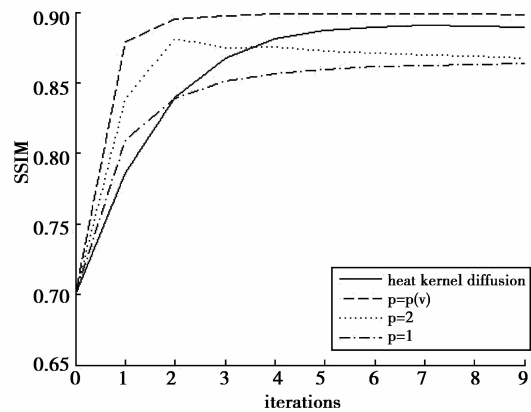
最小均方误差(RMSE)、结构相似度算子(structural similarity index, SSIM)^[16]来衡量各种算法的去噪性能。SSIM的取值范围在0~1之间;取值越接近1就表示重建的图像越接近原始无噪图像,也就是去噪效果越好。实验结果如图2、3所示。

图2是对加高斯噪声(mean=0, variance=10)的256×256标准灰度图像lena.bmp的去噪效果对比。需要说明的是,图2(a)~(f)中的边缘图像是根据图像中每个像素点所在位置的 $\|\nabla f\|$ 小而做出的灰度图像,它可以用来描绘图像中的边界特征,并通过对它的观察来为去噪效果做一个主观的评价。

图2(b)显示,加入噪声后,图像中原有的边界特征受到由噪声产生的错误边界特征的干扰,变得模糊不清和难以辨认;图2(c)显示,经过自适应的正则化去噪过程,噪声被有效地去除了,而图像中的边界特征也较好地保留了下来;图2(d)显示,经过 $p=2$ 的正则化去噪过程,在噪声被去除掉的同时,一些有用的边界特征也被平滑而变得模糊不清,如头发丝的细节部分;图2(e)显示,经过 $p=1$ 的正则化去噪过程,边界特征也得到了较好的保留,但仍有相当一部分噪声没有有效地去除,而被视为边界特征被错误地保留了下来。综上可得,自适应的正则化过程的图像去噪效果在噪声去除和边界特征保留的综合表现上,优于 $p=2$ 和 $p=1$ 的正则化去噪过程。对比图2(c)和图2(f)可得,自适应正则化的去噪效果与文献[9]的热核的扩散去噪算法比较相近。



(g)



(h)

图2 图像去噪算法效果对比
(256×256标准灰度图像lena.bmp)。

(a)标准图像及其边缘图像;

(b)高斯噪声(mean=0, variance=10)图像及其边缘图像;

(c)自适应图上正则化模型($p=p(v)$)去噪的图像及其边缘图像;(d)文献[5]中的 $p=2$ 的图上正则化去噪图像及其边缘图像;(e)文献[5]中的 $p=1$ 的图上正则化去噪图像及其边缘图像;(f)文献[6]方法的去噪图像及其边缘图像;

(g)关于迭代次数RMSE曲线;

(h)关于迭代次数的SSIM曲线;

图2(g)(h)是以上3种指标随着迭代进行的变化曲线。图2(g)显示,经过自适应的图上正则化去噪得到的RMSE值低于由 $p=2$ 、 $p=1$ 的图上正则化去噪和热核扩散去噪得到的RMSE值。图2(h)显示,经过自适应的图上正则化去噪得到的SSIM值高于由 $p=2$ 、 $p=1$ 的图上正则化去噪和热核扩散去噪得到的SSIM值。

图3是对加高斯噪声(mean=0, variance=15)的256×256标准灰度图像girl.bmp的去噪效果对

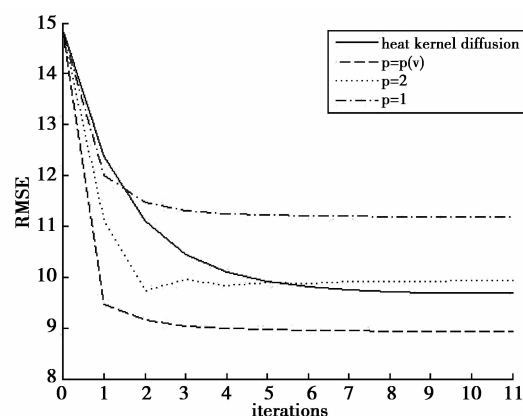
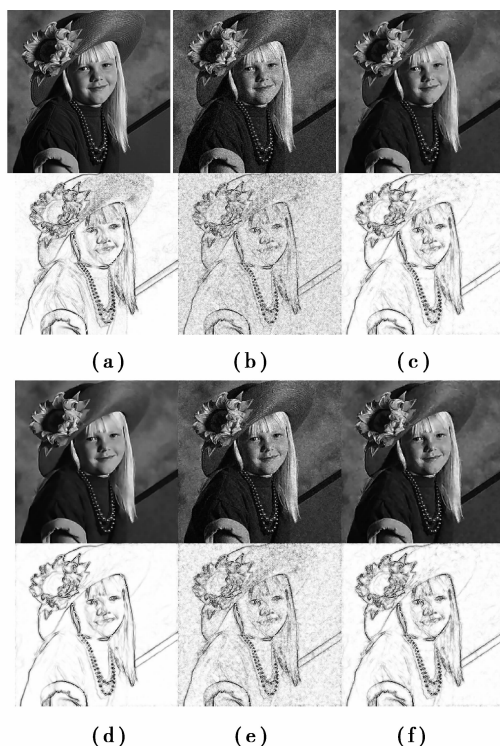
比,用灰度图像对应的边缘图像,便于对去噪效果进行评价。

由图 3(b)可见,加入噪声后,原标准图像中的一些特征受到噪声的严重干扰,图像中的帽檐的一部分几乎与背景混在一起,边界难以辨认;由图 3(c)可见,经过自适应的正则化过程,噪声被有效去除,而图像中的边界特征也较好地保留下来,仍能看见帽檐上的纹路;由图 3(d)可见,经过 $p=2$ 的正则化去噪过程,在噪声被去除掉的同时,如帽檐边沿、帽檐上的纹路等特征已变得无法辨认;由图 3(e)可见,经过 $p=1$ 的正则化去噪过程,虽然大部分边界特征得到了较好的保留,但噪声并没有完全去除掉;由图 3(f)可见,经过热核扩散去噪,噪声被去除掉,但在保留边界特征方面,表现则不如自适应的正则化过程。由图 3(g)(h)可见,在 RMSE、SSIM 性能指标方面,得到了与图 2 相似的结果。

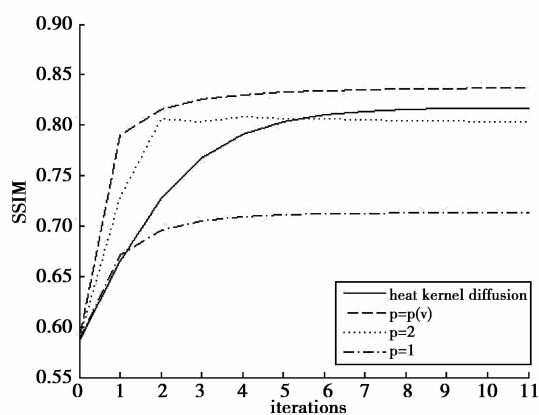
从图 2 和 3 可以得出如下结论:

①算法所能达到的 RMSE 最低。根据 RMSE 和 PSNR 之间的关系,也就说明算法 PSNR 最高;

②同样参数情况下,算法得到的 SSIM 指标最高,说明去噪后的图像和原始无噪图像具有更好的结构相似度。



(g)



(h)

图 3 图像去噪算法效果对比

(256×256 标准灰度图像 girl.bmp)。

(a)标准图像及其边缘图像;(b)高斯噪声(mean=0, variance=15)图像及其边缘图像;(c)自适应图上正则化模型($p=p(v)$)去噪的图像及其边缘图像;(d)文献[5]中的 $p=2$ 的图上正则化去噪图像及其边缘图像;(e)文献[5]中的 $p=1$ 的图上正则化去噪图像及其边缘图像;(f)文献[6]方法的去噪图像及其边缘图像;(g)关于迭代次数 RMSE 曲线;(h)关于迭代次数的 SSIM 曲线;

4 结 论

提出了一种图上自适应正则化去噪算法,它通过 non local means 算法构造图的权重函数,通过图上的正则化实现图像的去噪。实验结果表明,与部分图上的偏微分方程方法相比,该方法具有更好的视觉效果,更低的 RMSE 和更高的 SSIM。基于对各算法去噪结果的观察,并概括以上对各项性能指标的分析,可以得出:自适应的图上正则化去噪算法,在总体性能上超过了 $p=2$ 和 $p=1$ 的图上正则化去噪算法及和热核扩散的去噪算法。

参考文献:

- [1] Aubert G, Kornprobst P. Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations[M]. Germany: Springer, 2002.
- [2] Chan T F, Shen J H. Image processing and analysis: variational, pde, wavelet, and stochastic methods[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematic, 2005.
- [3] Liu G J, Zeng X P, Tian F C, et al. Speckle reduction by adaptive window anisotropic diffusion[J]. Signal Processing, 2009, 89(11):2233-2243.
- [4] Yu J H, Wang Y Y, Shen Y Z. Noise reduction and edge detection via kernel anisotropic diffusion[J]. Pattern Recognition Letters, 2008, 29 (10); 1496-1503.
- [5] Krissian K, Westin C F, Kikinis R, et al. Oriented speckle reducing anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16 (5); 1412-1424.
- [6] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60 (1/2/3/4); 259-268.
- [7] Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of ILL-posed problems[M]. Washington D. C. : V. H. Winston and Sons, 1977.
- [8] Lezoray O, Elmoataz A, Bougleux S. Graph regularization for color image processing[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2007, 107 (1/2): 38-55.
- [9] Zhang F, Hancock E R. Graph spectral image smoothing using the heat kernel [J]. Pattern Recognition, 2008, 41(11):3328-3342.
- [10] Chung F R K. Spectral graph theory [M]. Fresno: American Mathematical Society, 1997.
- [11] Buades A, Coll B, Morel J M. A review of image denoising algorithms, with a new one[J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 490-530.
- [12] Chambolle A, Lions P L. Image recovery via total variation minimization and related problems [J]. Numerische Mathematik, 1997, 76(2): 167-188.
- [13] Chan T F, Osher S, Shen J H. The digital TV filter and nonlinear denoising [J]. IEEE Transactions on Image Process, 2001, 10(2):231-241.
- [14] Greenbaum A. Iterative methods for solving linear systems[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [15] Kincaid D, Cheney W. Numerical analysis: mathematics of scientific computing [M]. 3rd ed. Pacific Grove: Brooks/Cole(Cengage Learning), 2002.
- [16] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4):600-612.

(编辑 侯 湘)

(上接第 62 页)

- [13] Li L, Tong C S, Choy S K. Texture classification using refined histogram [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(5): 1371-1378.
- [14] 韩声栋, 将铃鸽, 刘伟. 通信原理[M]. 北京:机械工业出版社, 2008.
- [15] 冈萨雷斯. 数字图像处理[M]. 2 版. 阮秋琦, 阮宇智, 译. 北京:电子工业出版社, 2007.
- [16] Chang T, Kuo C C J. Texture analysis and classification with tree-structure wavelet transform[J]. IEEE Transactions on Image, 1993, 2(4): 429-441.
- [17] Nguyen T T, Orantara S. The shiftable complex directional pyramid-part II: implementation and applications [J]. IEEE Transactions on Signal, 2008, 56(10): 4651-4660.

(编辑 侯 湘)