

文章编号: 1000-582X(2012)10-159-06

# 正弦均匀磁场激励磁感应成像正问题的棱单元法

何 为<sup>1</sup>, 宋晓栋<sup>1</sup>, 张晓勇<sup>2</sup>, 范昭勇<sup>3</sup>, 罗海军<sup>1</sup>, 徐 征<sup>1</sup>

(1. 重庆大学 输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室, 重庆 400044;

2. 重庆电力科学研究院, 重庆 400012; 3. 重庆市电力公司, 重庆 400015)

**摘 要:** 针对正弦均匀磁场激励磁感应成像(magnetic induction tomography, MIT)正问题, 进行了棱边有限元法和可视化成像的研究。建立了以电场强度为待求场矢量的正问题定解方程, 重点介绍了计算定解方程的棱边有限元方法, 并在 MATLAB 中建立了棱边有限元方程的计算流程。为实现 MIT 对颅内出血的可视化成像, 首先根据人体头部核磁共振图像数据生成了真实大脑有限元剖分模型, 在此基础上用 MATLAB 得到了 MIT 对颅内出血的三维可视化成像结果。研究结果证明了以电场强度为待求量的正弦均匀磁场激励 MIT 正问题定解方程和棱边有限元计算方法的正确性。基于真实大脑模型的三维可视化成像结果为 MIT 在颅内出血成像的应用研究奠定了基础。

**关键词:** 电阻抗成像; 磁感应; 正问题; 有限元; 可视化成像

**中图分类号:** TM152

**文献标志码:** A

## The edge element method in the forward problem of magnetic induction tomography with homogeneous sinusoidal magnetic excitation

HE Wei<sup>1</sup>, SONG Xiaodong<sup>1</sup>, ZHANG Xiaoyong<sup>2</sup>, FAN Zhaoyong<sup>3</sup>, LUO Haijun<sup>1</sup>, XU Zheng<sup>1</sup>(1. State Key Laboratory of Power Transmission Equipment & System Security and  
New Technology, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. Chongqing Electric Power Research Institute, Chongqing 400012, China;

3 Chongqing Electric Power Company, Chongqing 400015, China)

**Abstract:** The edge finite element method and the imaging visualization have been studied in the forward problem of magnetic induction tomography (MIT) with homogeneous sinusoidal magnetic excitation. The definite equations of the forward problem were established using the electric field intensity as the vector variable. The edge FE method for solving the definite equations was introduced in detail and realized as the MATLAB program. In order to realize the visualization of MIT in imaging the intracranial hemorrhage, a real human brain finite element model was created with the human head MRI data. On the basis of this model, we realized the 3D visualization of MIT imaging in MATLAB. The research results demonstrated the validity of the definite equations and the edge FE method in calculating the forward problem. And the 3D visualization of MIT imaging with real human brain model established a foundation for the application

**收稿日期:** 2012-03-20

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(50877082); 输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室自主研究项目(2007DA10512709305); 科技部科技人员服务企业行动项目(2009GJF10025); 重庆市自然科学基金(CSTC2009BB5204); 重庆大学“211 工程”三期创新人才培养计划建设项目(S-09111)

**作者简介:** 何为(1957-), 男, 重庆大学教授, 博士生导师, 输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室学术委员会委员, 从事电工理论和新技术研究, (E-mail) hewei@cqu.edu.cn。

study of MIT in imaging intracranial hemorrhage.

**Key words:** electric impedance tomography; magnetic induction; forward problem; finite element; visualization

磁感应成像(magnetic induction tomography, MIT)是电阻抗成像技术研究中的 1 个新兴课题<sup>[1]</sup>。它的理论基础是法拉第电磁感应定理,实现原理是利用正弦激励磁场在被测物体内部感应涡流电流;涡流产生的 2 次磁场引起空间磁场的变化;检测线圈感应空间磁场变化,利用重构算法实现对被测物体内部电导率分布的图像显示<sup>[2]</sup>。由于激励和检测均在被测物体外部进行,MIT 被认为是一种非接触无创电阻抗成像技术,在生物医学无创检测成像领域有很好的应用前景<sup>[3]</sup>。

MIT 在医学无创检测,特别是颅内出血无创检测成像领域的研究包括正问题仿真,系统实现和重构算法 3 方面。正问题仿真可以为测量系统的设计提供技术指标,同时为图像重构提供数据支持<sup>[4]</sup>。近年来针对正问题计算方法和仿真模型的研究不断开展。Hollaus 使用棱边有限元和节点有限元相结合的有限单元法在真实人脑有限元仿真模型上计算了正问题<sup>[5]</sup>。Zolgharni 建立了以修正磁矢量位  $A$  为变量的正问题定解方程,用棱边有限元法建立了有限元方程,在复杂人体头部有限元模型上计算了正问题<sup>[6,7]</sup>。Ktistis 和 Dekdouk 进一步完善了 Zolgharni 的研究,并在 MIT 可视化成像方面进行了探索<sup>[8-9]</sup>。刘国强用三维一阶棱边有限元方法仿真分析了 MIT 水槽模拟系统的正问题<sup>[10]</sup>。王聪建立了二维 MIT 系统的正问题有限元模型,对比分析了系统的仿真和实测结果<sup>[11]</sup>。

目前国内外的研究主要建立了通用的正问题计算方法,没有针对特定的 MIT 系统,在 MIT 三维可视化方面也没有深入研究。笔者在此基础上,针对正弦均匀磁场激励磁感应成像正问题,进行了 2 方面研究:1)建立以电场强度  $E$  为变量的正问题定解方程,用棱边有限元法建立相应的计算方程;2)结合真实人脑有限元剖分模型实现 MIT 对颅内出血的三维可视化成像。

## 1 磁感应成像正问题定解方程

### 1.1 磁感应成像正问题

正弦均匀磁场激励 MIT 系统是对课题组原实验系统<sup>[12]</sup>的改进,保留了用于大脑 MIT 检测的线圈装置,将激励方式改变为基于赫姆霍兹线圈的正弦均匀磁场激励,并增加了一组用于三维成像定位

的线圈装置。系统正问题的求解区域如图 1 所示。成像区域  $\Omega_i$  表示大脑,成像目标  $\Omega_t$  表示颅内出血区域,整个成像区域被空气区域  $\Omega_a$  包围;由赫姆霍兹线圈产生的正弦激励磁场  $B_0$  均匀分布在求解区域中;大脑 MIT 检测线圈装置(如图 2 所示),包含 16 个检测线圈<sup>[12]</sup>,可以实现  $x, y$  平面成像;定位线圈  $L_1 \cdots L_9$  与  $y$  轴垂直,可以实现  $z$  轴方向高度定位。

在电磁场原理中,MIT 正问题属于三维电磁场涡流问题,需要通过确定求解区域内的电磁参数和内外边界来建立正问题定解方程。为简化问题,求解区域不包括赫姆霍兹线圈,同时不对检测线圈和定位线圈建模。成像区域和成像目标的电导率分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_t$ ,空气区域的电导率  $\sigma_a$  为零,整个求解区域使用真空磁导率  $\sigma_1$  和真空介电常数  $\epsilon_0$ 。

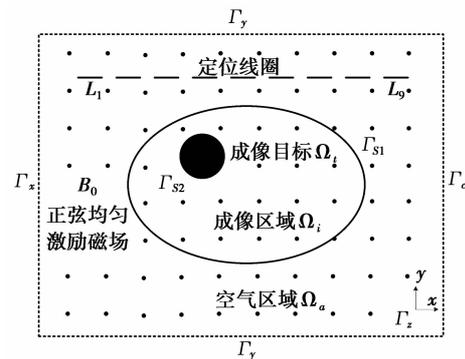


图 1 MIT 正问题求解区域

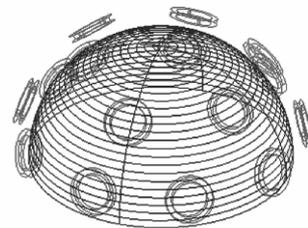


图 2 大脑 MIT 检测线圈装置结构图

求解区域的内边界包括空气区域和成像区域之间的边界  $\Gamma_{s1}$  以及成像区域和成像目标之间的边界  $\Gamma_{s2}$ 。外边界设定为 2 倍成像区域最大直径的正六面体表面,按垂直于坐标轴方向分为  $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ 。根据时谐电磁场惟一性定理<sup>[13]</sup>,正弦均匀磁场激励磁感应成像正问题的电磁场边值问题方程可建立为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times H &= \sigma_{0/1/2} E \\ \nabla \times E &= -j\omega\mu_0 H \\ E_{i/t} \times n &= E_{a/i} \times n \\ H_{i/t} \times n &= H_{a/i} \times n \\ H \times n &= \mu_0 B_0, \Gamma_{x/y}; \\ H \times n &= 0, \Gamma_z. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Omega_{a/i/t}; \\ &\Gamma_{S1/2}; \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $n$  表示边界面的外法线方向单位矢量。由于成像区域和成像目标的电导率为生物组织电导率,激励频率较低,根据准静态电磁场和磁场透入深度条件,边值问题方程忽略位移电流和集肤效应的影响。

### 1.2 正问题的定解方程

边值问题方程(1)描述的是正问题的电磁场一般规律,包含了电场强度  $E$  和磁场强度  $H$  两个变量,不适合计算求解。因此,磁场强度  $H$  用电场强度  $E$  表示为  $H = -1/j\omega\mu_0 \nabla \times E$ 。又由于求解区域中没有外部电流源,电场强度满足条件  $\nabla \cdot E = 0$ ,利用矢量恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E.$$

可以得到以电场强度  $E$  为求解场量的正问题定解方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 E + j\omega\mu_0\sigma_{0/1/2} E &= 0, & \Omega_{a/i/t}; \\ E_{i/i} \times n &= E_{i/a} \times n, & \Gamma_{S1/2}; \\ (\nabla \times E_{i/i}) \times n &= (\nabla \times E_{i/a}) \times n, & \Gamma_{S1/2}; \\ (\nabla \times E) \times n &= -j\omega B_0, & \Gamma_{x/y}; \\ (\nabla \times E) \times n &= 0, & \Gamma_z. \end{aligned} \right\} (2)$$

## 2 棱边有限元法计算定解方程

棱边有限元法是一种以场矢量(这里为电场强度  $E$ )为直接求解变量的有限单元法。因可以自动满足场矢量在媒质交界面上切向分量连续的条件,棱边有限元法适合求解三维电磁场涡流问题<sup>[14]</sup>。

### 2.1 棱边有限元方程

由于棱边有限元法可以自动满足场矢量在媒质交界面上切向分量连续的条件,定解方程(2)可以忽略交界面  $\Gamma_{S1/2}$  上的边界条件而简化为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 E + j\omega\mu_0\sigma_{0/1/2} E &= 0, & \Omega_{a/i/t}; \\ (\nabla \times E) \times n &= -j\omega B_0, & \Gamma_{x/y}; \\ (\nabla \times E) \times n &= 0, & \Gamma_z. \end{aligned} \right\} (3)$$

根据加权余量法,用电场强度  $E$  的变分  $\delta(E)$  作为权函数对求解区域  $\Omega_{a/i/t}$  内的微分方程进行余量加权积分,并用变分  $\delta(E)$  在边界面上的适当变换  $P_1\delta(E)$  和  $P_2\delta(E)$  分别对边界  $\Gamma_{x/y}$  和  $\Gamma_z$  上的微分方

程进行余量加权积分,得到方程(3)的等效积分形式

$$\left. \begin{aligned} &\int_{\Omega_{a/i/t}} [(\nabla^2 E + j\omega\mu_0\sigma_{0/1/2} E) \cdot \delta(E)] d\Omega + \\ &\int_{\Gamma_{x/y}} [((\nabla \times E) \times n + j\omega B_0) \times P_1 \delta(E)] dS, \\ &\int_{\Gamma_z} [((\nabla \times E) \times n) \times P_2 \delta(E)] dS \\ &= 0. \end{aligned} \right\} (4)$$

根据格林第一公式,对  $\nabla^2 E$  的体积分进行降阶处理:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{a/i/t}} [\nabla^2 E \cdot \delta(E)] d\Omega \\ &= \int_{\Omega_{a/i/t}} [(\nabla \times E) \cdot (\nabla \times \delta(E))] d\Omega + \\ &\int_{\Gamma} [((\nabla \times E) \times n) \times \delta(E)] dS. \end{aligned}$$

其中  $\Gamma = \Gamma_x + \Gamma_y + \Gamma_z$ 。再令  $P_1 = P_2 = -1$ ,得到等效积分形式(4)的弱形式:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{a/i/t}} [(\nabla \times E) \cdot (\nabla \times \delta(E))] d\Omega + \\ &\int_{\Omega_{a/i/t}} [(j\omega\mu_0\sigma_{0/1/2} E) \cdot \delta(E)] d\Omega - \\ &\int_{\Gamma_{x/y}} [(j\omega B_0) \times \delta(E)] dS = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

再根据泛函变分理论,方程(5)等价转化为泛函变分问题

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{a/i/t}} [(\nabla \times E) \cdot (\nabla \times E)] d\Omega + \\ &\frac{1}{2} \int_{\Omega_{a/i/t}} (j\omega\mu_0\sigma_{0/1/2} E \cdot E) d\Omega - \\ &\int_{\Gamma_{x/y}} [(j\omega B_0) \times E] dS. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\delta(J) = 0$$

其中,  $J$  为等价泛函,  $\delta(J)$  为泛函的变分。

用棱边四面体单元(图 3 所示)剖分求解区域。

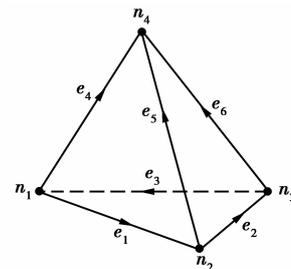


图 3 棱边四面体单元

等价泛函  $J$  离散化为单元泛函  $J_n$  之和

$$J = \sum_{n=1}^{eln} J_n。$$

棱边有限元法中,自由度是待求场矢量  $\mathbf{E}$  沿棱边的线积分

$$\varphi = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}。$$

矢量插值基函数为

$$\mathbf{W}_{ij} = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

其中  $\lambda$  是四面体单元的体积坐标。因此在单元内电场强度  $\mathbf{E}$  可近似表示为

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}' = \sum_{e=1}^6 \mathbf{W}_e \varphi_e。 \quad (7)$$

其中  $e$  代表单元棱边,  $\mathbf{E}'$  称为  $\mathbf{E}$  的插值函数。将插值函数代入单元泛函  $J_n$  得到单元特征式  $I([\varphi_1 \cdots \varphi_6])$ 。

通过对单元特征式的叠加,整个求解区域的等价泛函变分问题  $\delta(J) = 0$  可离散化为以自由度  $\varphi$  为求解变量的矩阵方程

$$[\mathbf{K}][\varphi] = [\mathbf{R}]。 \quad (8)$$

该方程即是用棱边有限元法求解正问题定解方程(2)的有限元计算方程。

## 2.2 棱边有限元方程的生成和计算

笔者利用“HyperMesh”剖分软件对求解区域进行建模和剖分。由于“HyperMesh”只能产生节点有限元剖分数据,首先需要将节点有限元剖分数据在 MATLAB 中转换为棱边有限元数据,然后计算得到每个棱单元的单元特征式,最后叠加单元特征式生成有限元方程系数矩阵  $[\mathbf{K}]$  和  $[\mathbf{R}]$ 。有限元方程利用共轭梯度法进行数值求解,得到棱边自由度  $\varphi$ , 根据插值函数(7)将自由度转换为待求的电场强度  $\mathbf{E}$ 。棱边有限元方程生成和计算程序流程如图 4 所示。

在节点有限元数据转换为棱边元数据的过程中,需要注意的是节点相同方向不同的两条棱边,其自由度大小相同,正负号相反。因此可以先确定其中一个自由度为待求量建立有限元方程,另一个在方程计算完成后根据棱边方向确定正负号得到。此外,从棱边有限元方程计算流程可以看出棱边剖分数据的生成和单元特征式的计算是两个相对独立的步骤,在 MATLAB 中可以使用并行计算功能编程以提高程序的计算速度。

## 2.3 方法验证

为验证棱边有限元法计算正问题定解方程的正确性,计算了一个典型的三维电磁场涡流问题<sup>[15]</sup>。计算模型如图 5 所示:边长为 20 mm 的非磁性导电

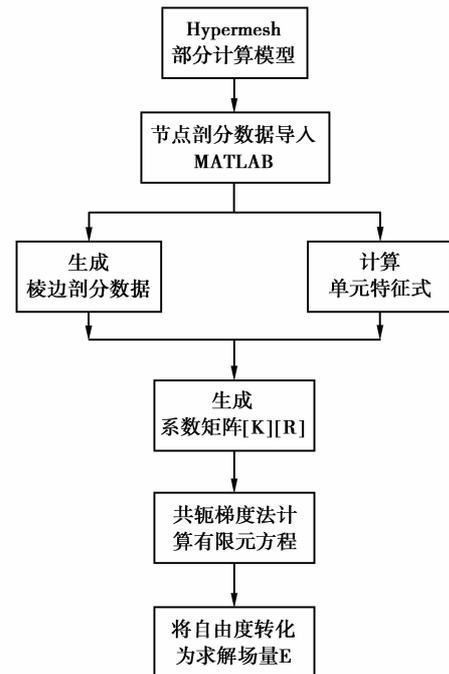


图 4 棱边有限元方程生成和计算程序流程

立方体 ( $\sigma = 5.7 \times 10^7 \text{ S/m}, \mu = \mu_0$ ) 置于正弦均匀磁场  $\mathbf{B}_0$  (1T, 50 Hz) 中, 设置边长为 40 mm 的同心立方体表面为外边界。用方程(3)建立计算模型的定解方程, 用棱边有限元程序求解。计算对象为导电立方体内部  $x$  轴线方向上涡流密度的  $y$  轴分量实部和虚部, 结果如图 6 所示(坐标系  $x, y, z$  的原点为立方体的中心点)。计算结果与文献[15]给出的曲线一致, 验证了棱边有限元计算方法的正确性。

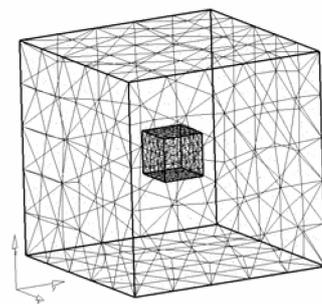


图 5 程序验证计算模型

## 3 颅内出血 MIT 可视化成像

由于磁场可以穿透不导电的颅骨, 相比于电流注入方式的电阻抗成像技术, MIT 可以更有效的对颅内出血进行检测成像<sup>[6]</sup>。为此, 笔者在正问题仿真中进行了大脑有限元建模和三维可视化成像的研究。

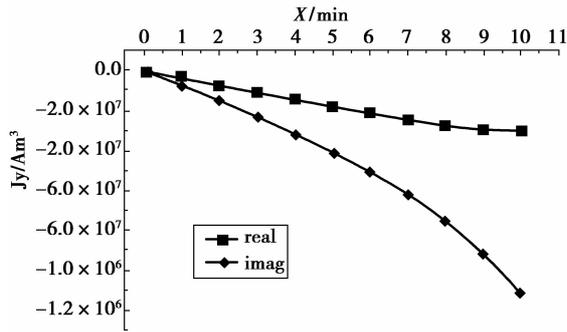


图 6 计算结果

### 3.1 大脑有限元剖分模型

为实现颅内出血的 MIT 可视化成像,笔者首先利用人体头部核磁共振图像生成了真实大脑有限元剖分模型。

头部核磁共振图像使用 Mayo Clinic 提供的 Analyze 7.5 格式数据。核磁共振数据经过“BrainSuite”,“BrainStorm”,MATLAB 和“HyperMesh”4 个软件的处理,得到真实大脑有限元剖分模型,如图 7(a)所示。为仿真颅内出血,模型中添加了一个直径为 3 cm 的球形实体,如图 7(b)所示。整个剖分模型使用了 32 319 个四面体单元,其中 637 个单元属于球形实体。

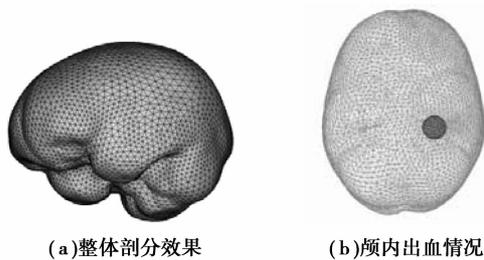


图 7 大脑有限元剖分模型

### 3.2 颅内出血 MIT 可视化成像

根据参考文献[5-7],在 120 kHz 激励频率下,正常脑组织的电导率为 0.1 S/m,血液电导率为 0.5 S/m。因此在颅内出血 MIT 可视化成像中,正常组织的电导率设为 0.1 S/m,出血区域设为 0.3 S/m。激励磁场的频率设为 120 kHz。

正问题计算正弦均匀磁场激励 MIT 系统检测真实大脑模型的颅内出血情况,得到三组电压数据:在  $z$  轴方向磁场激励下,不考虑颅内出血情况,整个成像区域(包括球体)的电导率设为 0.1 S/m 时,16 个检测线圈上的感应电压 $[V_1]$ ;在  $z$  轴方向磁场激励下,考虑颅内出血情况,成像区域电导率设为 0.1 S/m,球体部分的电导率设为 0.3 S/m 时,16 个

检测线圈上的感应电压 $[V_2]$ ;改变激励磁场方向为  $y$  轴方向时,考虑出血情况,定位线圈在  $z$  轴方向不同高度上的感应电压 $[V_3]$ 。

由于被测物体内部电导率变化只与检测线圈感应电压的虚部有关<sup>[5]</sup>,笔者使用 $[V_1]$ 和 $[V_2]$ 的虚部值计算得到灵敏度

$$[S] = \frac{\text{imag}([V_2]) - [V_1]}{\text{imag}([V_1])} \quad (9)$$

同时为了能够统一判断颅内出血的严重程度,笔者将 0.5 和 0.1 S/m 作为上下限,以此为标准将灵敏度标定到 0~5 之间,用以反映出出血区域和正常脑组织电导率相对大小情况。

在 MATLAB 中,利用“Techniques for visualizing scalar volume data”技术,导入大脑 MRI 数据生成三维大脑表面轮廓图像;然后利用定位线圈感应电压 $[V_3]$ ,选出最大值所在行数,结合大脑 MRI 各断层编号,得到出血区域所在大脑 MRI 断层平面,并在大脑表面轮廓图像上绘制显示出该断层平面;在断层平面上,根据正问题计算得到的 16 个检测线圈上感应电压灵敏度数据标定值 $[S]$ ,利用 MATLAB 中“griddata”函数并使用其双调和样条插值算法“v4”,生成 MIT 对颅内出血的三维可视化成像结果,如图 8 所示。

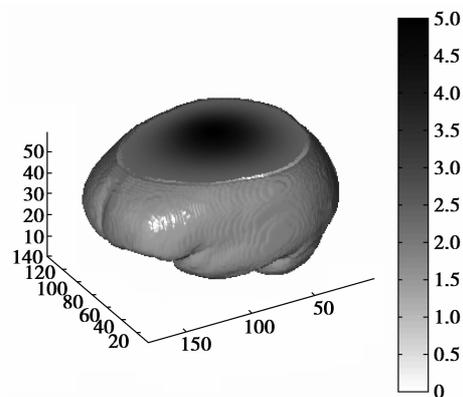


图 8 颅内出血 MIT 三维可视化成像

这里进行的三维可视化成像没有涉及逆问题图像重构算法,而是使用检测电压直接进行插值成像。这种方法属于正问题研究范畴,可以为逆问题成像算法研究提供理论基础。

## 4 结 论

笔者对正弦均匀磁场激励 MIT 正问题的棱边有限元法进行了研究,取得了以下成果:

1)建立了以电场强度  $E$  为求解变量的正问题定

解方程,用棱边有限元法建立了相应的有限元计算方程,在 MATLAB 中实现了有限元方程的建立和求解,通过实例验证了程序的正确性。

2)利用人体头部核磁共振图像数据,生成了真实大脑有限元剖分模型。在此基础上实现了 MIT 对颅内出血的三维可视化成像。

#### 参考文献:

- [1] 何为,罗辞勇,徐征. 电阻抗成像原理[M]. 北京:科学出版社,2009.
- [2] 徐征,何为,何传红,等. 生物组织电导率磁感应测量原理及系统研究[J]. 仪器仪表学报,2008,29(9): 1878-1882.  
XU Zheng, HE Wei, HE Chuanhong, et al. Study on the principles and system of measurement biological tissue conductivity with magnetic induction method[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2008, 29(9): 1878-1882.
- [3] Holder D S. Electrical impedance tomography: methods, history and applications [M]. London: Taylor & Francis, 2005.
- [4] 陈民铀,张晓菊,罗辞勇,等. 开放式电阻抗成像建模及其仿真[J]. 重庆大学学报,2009,32(7):731-735.  
CHEN Minyou, ZHANG Xiaoju, LUO Ciyong, et al. Modeling and simulation based on open electrical impedance tomography [J]. Journal of Chongqing University, 2009, 32(7): 731-735.
- [5] Hollaus K, Magele C, Merwa R, et al. Numerical simulation of the eddy current problem in magnetic induction tomography for biomedical applications by edge elements[J]. IEEE Transactions on Magnetic, 2004, 40(2): 623-626.
- [6] Zolgharni M, Ledger P D, Armitage D W, et al. Imaging cerebral haemorrhage with magnetic induction tomography: numerical modelling [J]. Physiological Measurement, 2009, 30(6): 187-200.
- [7] Zolgharni M, Ledger P D, Griffiths H. Forward modelling of magnetic induction tomography: a sensitivity study for detecting haemorrhagic cerebral stroke [J]. Medical & Biological Engineering & Computing, 2009, 47(12): 1301-1313.
- [8] Ktistis C, Armitage D W, Peyton A J. Calculation of the forward problem for absolute image reconstruction in MIT[J]. Physiological Measurement, 2008, 29(6): 455-464.
- [9] Dekdouk B, Yin W, Ktistis C, et al. A method to solve the forward problem in magnetic induction tomography based on the weakly coupled field approximation[J]. IEEE Transactions on Bio-Medical Engineering, 2010, 57(4): 914-921.
- [10] 刘国强,王涛,蒙萌,等. 用棱单元方法求解磁感应成像的正问题[J]. 中国生物医学工程学报,2006,25(2): 163-165.  
LIU Guoqiang, WANG Tao, MENG Meng, et al. Using edge element method to solve the forward problem in magnetic induction tomography[J]. 2006, 25(2): 163-165.
- [11] 王聪,董秀珍,刘锐岗,等. 磁感应断层成像技术中涡流问题的有限元法仿真研究[J]. 航天医学与医学工程, 2007,20(3):219-222.  
WANG Cong, DONG Xiuzhen, LIU Ruigang, et al. Simulation study of eddy current problem in magnetic induction tomography by using finite element method [J]. Space Medicine & Medical Engineering, 2007, 20(3): 219-222.
- [12] Xu Z, Luo H, He W, et al. A multi-channel magnetic induction tomography measurement system for human brain model imaging[J]. Physiological Measurement, 2009, 30(6): 175-186.
- [13] 雷银照. 时谐电磁场解析方法[M]. 北京:科学出版社,2000.
- [14] 饶明忠,谭邦定,黄键. 电磁场计算中的棱边有限元法[J]. 中国电机工程学报,1994,14(5):63-69.  
RAO Mingzhong, TAN Bangding, HUANG Jian. Edge Elements with applications to calculation of electromagnetic fields[J]. Proceedings of the CSEE, 1994, 14(5): 63-69.
- [15] OSZKAR BIRO, KURT PREIS. On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1989, 25(4): 3145-3159.

(编辑 张小强)