

文章编号: 1000-582X(2012)11-122-04

一维溃坝波的数值模拟

——基于 WENO 重构的解耦格式

张文忠^{1,2a}, 陈景秋¹, 张永祥¹, 缪吉沧^{2b}

(1. 重庆大学 资源与环境科学学院, 重庆 400044; 2. 重庆交通大学 a. 理学院;
b. 重庆西南水运工程科学研究所, 重庆 400074)

摘要: 采用五阶精度的 WENO 格式对界面变量进行数值重构, 形成高精度的数值离散格式, 对其捕捉溃坝波的能力进行分析。用 roe 平均对一维浅水方程组进行局部线性化, 通过直接和解耦 2 种格式进行求解, 数值模拟溃坝洪水的推进过程, 得到沿程的水位和流速分布。与理论解的比较表明基于 WENO5 重构的解耦格式, 具有很高的分辨率, 展现了溃坝涌波的运动特性。

关键词: 溃坝; 加权本质无振荡格式; 数值模拟; 守恒

中图分类号: O352; O241.82

文献标志码: A

Numerical simulation of one-dimensional dam-break: A decoupled scheme with WENO reconstruction

ZHANG Wenzhong^{1,2a}, CHEN Jingqiu¹, ZHANG Yongxiang¹, MIU Jilun^{2b}

(1. College of Resources and Enviromental Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2 a. College of science; 2b. Southwestern Hydraulic Engineering Research Institute for Waterway,
Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Based on the reconstruction of interface variables with the fifth-order WENO, a high resolution scheme is proposed and the performance of capturing dam break waves is analyzed. With the part is linearized through Roe average, one dimensional shallow water equation is directly and decoupled solved, the velocity distribution and depth distribution are obtained. Numerical simulation shows that the decoupled schemes with WENO5 reconstruction has higher resolution and it shows the movement of dam-break.

Key words: dam-break; weighed essentially non-oscillatory; numerical simulation; conservation

大坝的上下游水位差较大, 一旦溃坝或为保护大坝而人为的以破坏方式开启溢洪道, 将形成巨大的洪水并向下游推进。洪水传播速度快, 破坏性大, 对下游人民的生命财产安全造成极大的威胁。因此, 数值模拟溃坝洪水的推进过程, 将对保护下游人民的生命财产安全及确定大坝的设计标准等具有重

要意义。

从数学上来讲, 重力引起的浅水运动类似于可压缩流体的运动, 属于双曲型方程, 可用空气动力学中求解含激波的众多方法求解。近年来, 有众多学者构造高精度的数值格式如特征线^[1-2]、CE/SE^[3]、TVD^[4]、ENO^[5,6]、WENO (weighted essentially

收稿日期: 2012-05-03

基金项目: 教育部博士点专项基金资助项目(2011019111036); 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJZR12240070)

作者简介: 张文忠(1976-), 男, 河北故城人, 重庆大学博士研究生, 主要从事科学与工程的高性能计算,
(E-mail) wzhongzh@163.com。

non-oscillatory schemes)^[7-14]等格式对溃坝进行数值模拟,取得了较好的效果,但对于间断的捕捉仍存在着不同程度的耗散或振荡。笔者采用先解耦后进行 WENO 重构以求解浅水方程,通过与 Stokes 解析解比较表明,这种离散格式对于间断的捕捉能力强,是模拟溃坝洪水的一种有效方法。

1 控制方程

一维浅水波方程的守恒形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S(U), \quad (1)$$

式中: $U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}$, $S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix}$ 。其中 $S_f = \frac{u^2}{C_0^2 R}$, C_0 为谢才系数, R 为水力学半径,当河道为矩形时等于 h , u 为流速, S_0 为底坡, S_f 为摩擦阻坡降, g 为重力加速度。

2 时间离散

设 $L(u)$ 是方程的空间离散算子,即 $U_t = L(u)$ 。用 i 表示空间节点, n 表示时间层,假定 t_n 时刻空间节点 i 处的变量值 $u(i, n)$ 已知,则下一时刻 $t_n + \Delta t$ 的变量值 $u(i, n+1)$ 可通过如下三阶 TVD Runge-Kutta 离散过程实现:

$$\begin{aligned} u(i, *) &= u(i, n) + \Delta t L(u(i, n)), \\ u(i, ***) &= \frac{3}{4}u(i, n) + \frac{1}{4}u(i, *) + \\ &\quad \frac{1}{4}\Delta t L(u(i, *)), \\ u(i, n+1) &= \frac{1}{3}u(i, n) + \frac{2}{3}u(i, ***) + \\ &\quad \frac{2}{3}\Delta t L(u(i, ***)). \end{aligned}$$

3 空间离散

若不考虑摩擦阻,则式(1)为齐次拟线性双曲方程组,用 Roe 平均^[15]对方程组进行局部线性化,可形成如下常系数方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{J} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

式中, $\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{g}h & 2\tilde{u} \end{pmatrix}$ 。令 $\tilde{c} = \sqrt{\tilde{g}h}$, $\tilde{h} = \sqrt{h_L h_R}$, $\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_L}u_L + \sqrt{h_R}u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}$, 则可得 \tilde{J} 的特征值 $\tilde{\lambda}_{1,2} = \tilde{u} \pm \tilde{c}$, 及

相应的右特征向量 $\tilde{R} = (\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} & \tilde{u} - \tilde{c} \end{pmatrix}$,

左特征向量 $\tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\tilde{c}} \begin{pmatrix} \tilde{c} - \tilde{u} & 1 \\ \tilde{c} + \tilde{u} & -1 \end{pmatrix}$ 。式(2)可

直接运用 Roe 的 FDS 格式直接求解;或引入特征变量 $V = LU$ 进行解耦求解。

3.1 直接求解

方程(2)的半离散格式为

$$U_i + \frac{1}{\Delta x} (\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad (3)$$

式中: \tilde{F} 是与 F 相容的数值通量, $\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (F(U_{i+\frac{1}{2}}^L) + F(U_{i+\frac{1}{2}}^R) - \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j |\tilde{\lambda}_j| \tilde{L}_j)$, 其中, $\alpha = L * \Delta U = L * (U_R - U_L)$; 界面变量 $U_{i+\frac{1}{2}}^L, U_{i+\frac{1}{2}}^R$ 通过 WENO 重构得出。

3.2 解耦求解

式(2)解耦后可形成式(4)简单的标量方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

式中, $g = av$ (a 为局部常数)。其离散格式为

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \frac{g_{i+\frac{1}{2}}^n - g_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0, \quad (5)$$

式中: $g_{i+\frac{1}{2}}^+ = g_{i+\frac{1}{2}}^+ + g_{i-\frac{1}{2}}^-$; $g_i^+ = \frac{1}{2}(g_i + \max|\lambda| \cdot v_i)$; $g_i^- = \frac{1}{2}(g_i - \max|\lambda| \cdot v_i)$, 其中 $g_{i+\frac{1}{2}}^+$ 和 $g_{i-\frac{1}{2}}^-$ 通过 WENO 重构得到。

3.3 WENO 重构

以界面变量 $g_{i+\frac{1}{2}}^+$ 为例,其计算是通过界面两边的节点插值得到,以五阶精度的 WENO 为例,选取 $i-2, \dots, i+2$ 五个节点,每相邻 3 个节点为一模板,插值得到一个界面变量值,然后对这 3 个界面变量值加权平均,具体如下。

令 $(g_{i-2}^+, g_{i-1}^+, g_i^+, g_{i+1}^+, g_{i+2}^+) = (a, b, c, d, e)$, $q_1 = \frac{a}{3} - \frac{7b}{6} + \frac{11c}{6}$, $q_2 = -\frac{b}{6} + \frac{5c}{6} + \frac{d}{3}$, $q_3 = \frac{c}{3} + \frac{5d}{6} - \frac{e}{6}$, $IS_1 = 13(a - 2b + c)^2 + 3(a - 4b + 3c)^2$, $IS_2 = 13(b - 2c + d)^2 + 3(d - b)^2$, $IS_3 = 13(c - 2d + e)^2 + 3(3c - 4d + e)^2$, $\alpha_1 = \frac{1}{(\epsilon + IS_1)^2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{(\epsilon + IS_2)^2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{(\epsilon + IS_3)^2}$, 则 $g_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ 。其中, $\epsilon = 10^{-6}$ 。 $g_{i-\frac{1}{2}}^-$, $U_{i+\frac{1}{2}}^L$ 及 $U_{i+\frac{1}{2}}^R$ 可以类似得到,不再重复。

4 数值算例

考虑如图 1 所示的瞬间全溃坝问题,等宽矩形

断面河道上有一底坡为 $S_0 = 0$, 摩阻为 $S_f = 0$ 的堤坝, 坝址位于 1 000 m 处, 溃决前上下游均为静水, 水深分别为 $H = 100$ m, $h = 50$ m, 计算区域为 2 000 m。

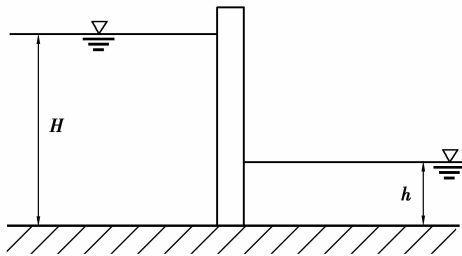
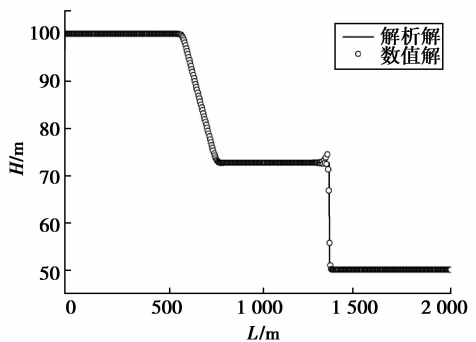
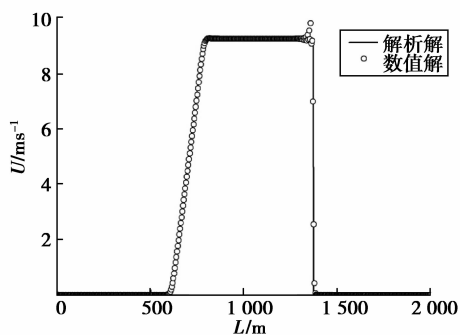


图 1 一维矩形断面全溃坝模型

大坝瞬间溃堤, 在坝的上下游形成非恒定急变流。下游流量增加, 水位迅速上涨, 形成涨水顺波向下游传播, 上游则因下泄流量突然增加水位急剧下降形成降水逆波向上游传播。溃坝 12.5 s 的瞬时水面线和流速分布的数值解和理论解的比较如图 2、3 所示。从图中可以看出, 直接求解方程组, 在间断附近会有少许振荡, 而解耦后计算效果很好, 水位和流速符合实际情况, 是一种较理想的数值模拟格式。

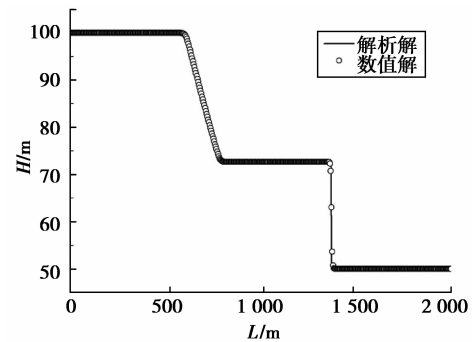


(a) 水位图

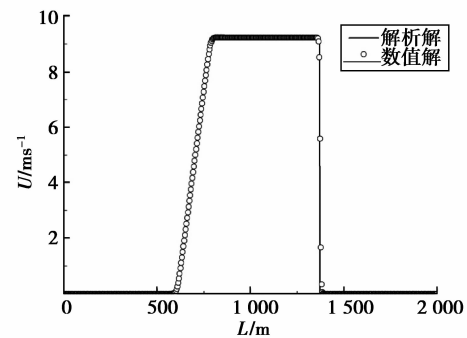


(b) 速度图

图 2 直接求解



(a) 水位图



(b) 速度图

图 3 解耦求解

5 结 语

浅水波方程属于拟线性方程, 具有间断解的性质。采用 Roe 平均对方程组进行局部线性化, 可得解耦的特征变量方程, 通过空间上高精度的 WENO 重构及时间上的三阶 TVD Runge-Kutta 离散, 可得分辨率较高的数值格式。通过理论解的比较发现, 此格式很好的抑制了振荡, 沿程水位分布和流速分布与理论解基本吻合, 展示了溃坝洪水的运动特性, 为预测溃坝引起的灾害及防灾救灾等提供了一种有效的手段。但未解耦方程组求解中出现的数值振荡尚待进一步思考。

参考文献:

- [1] 陈景秋, 张永祥, 韦春霞. 一维溃坝涌波的特征线: 激波装配法[J]. 重庆大学学报, 2004, 27(5): 99-102.
CHEN Jingqiu, ZHANG Yongxiang, WEI Chunxia. Using a shock fitting based on characteristics for 1-D dam-break flow[J]. Journal of Chongqing University, 2004, 27(5): 99-102.
- [2] 韦春霞, 张永祥, 陈景秋. 溃坝洪水的二维算子分裂: 特征线模拟[J]. 重庆大学学报: 自然科学版, 2003,

- 26(9): 18-21.
- WEI Chunxia, ZHANG Yongxiang, CHEN Jingqiu. Two-dimensional numerical simulation of dam break with characteristics method based on space operator splitting[J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 2003, 26(9): 18-21.
- [3] 张永祥, 陈景秋, 韦春霞. 一维溃坝洪水波的数值模拟:时空守恒法[J]. 重庆大学学报:自然科学版, 2005, 28(5): 136-138, 147.
- ZHANG Yongxiang, CHEN Jingqiu, WEI Chunxia. Simulation of one dimension dam-break flow: space-time conservation scheme[J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 2005, 28(5): 136-138,147.
- [4] Liang D F, Roger A, Lin B L. Comparison between TVD-MacCormack and ADI-type solvers of the shallow water equations [J]. Advances in Water Resources, 2006, 29(12): 1833-1845.
- [5] 郭永涛, 魏文礼. 基于 ENO 格式的一维溃坝水流数值模拟[J]. 西安理工大学学报, 2005, 21(3): 293-295.
- GUO Yongtao, WEI Wenli. One-dimension dam-break water flow numerical simulation based on ENO schemes[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2005, 21(3): 293-295.
- [6] Vukovic S, Sopta L. ENO and WENO schemes with the exact conservation property for one-dimensional shallow water equations[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 179(2): 593-621.
- [7] 樊新建, 张卫勇, 张人会. 一种基于 WENO 格式的一维溃坝洪水流数值模拟研究[J]. 河南科学, 2008, 26(8): 952-954.
- FAN Xinjian, ZHANG Weiyong, ZHANG Renhui. The research of one-dimension dam-break water flow numerical simulation based on WENO schemes [J]. Henan Science, 2008, 26(8): 952-954.
- [8] 郭彦, 刘儒勋. 一维 Euler 方程的特征有限体积格式[J]. 应用数学和力学, 2009, 30(3): 291-300.
- GUO Yan, LIU Ruxun. Characteristic-based finite volume scheme for 1D Euler equations [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2009, 30(3): 291-300.
- [9] 朱发昇, 刘玉玲, 郭永涛, 等. 二维溃坝绕流的 WENO 格式数值模拟 [J]. 应用力学学报, 2008, 25(3): 494-497.
- ZHU Fasheng, LIU Yuling, GUO Yongtao, et al. Two-dimensional dam-break numerical simulation based on WENO scheme [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2008, 25(3): 494-497.
- [10] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115(1): 200-212.
- [11] Capdeville G. A central WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws on non-uniform meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(5): 2977-3014.
- [12] Hu J, Guo S G, Yao Z Q. Solution to Euler equations by high-resolution upwind compact scheme based on flux splitting[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2008, 56(11): 2139-2150.
- [13] Canestrelli A, Siviglia A, Dumbser M, et al. Well-balanced high-order centred schemes for non-conservative hyperbolic systems. Applications to shallow water equations with fixed and mobile bed[J]. Advances in Water Resources, 2009, 32(6): 834-844.
- [14] Canestrelli A, Dumbser M, Siviglia A, et al. Well-balanced high-order centered schemes on unstructured meshes for shallow water equations with fixed and mobile bed[J]. Advances in Water Resources, 2010, 33(3): 291-303.
- [15] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1981, 43(2):357-372.

(编辑 郑洁)