

文章编号: 1000-582X(2012)12-094-06

## 采用应变能方法定量分析输电塔损伤程度

郭惠勇, 薛晓武, 李正良, 朱汉棠

(重庆大学 a. 土木工程学院; b. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

**摘要:**为了解决输电塔结构的损伤识别问题,提出了基于模态应变能变化率和能量方程的两步识别方法。首先利用模态应变能变化率方法进行较为精确的损伤定位,然后引入损伤后的单元刚度矩阵,对结构模态应变能耗散率理论进行了相关的改进研究,从而推导出更精确的损伤定量方程方法。该方法只需要前几阶振型模态,不需要完备的测量信息。数值仿真的结果表明,该两步识别方法可以有效地识别出输电塔结构的损伤位置和程度。

**关键词:**损伤检测;应变能;变化率;耗散率;输电塔

**中图分类号:** TU761.3

**文献标志码:** A

## Quantitative analysis of damage extent of transmission tower by using strain energy method

GUO Huiyong, XUE Xiaowu, LI Zhengliang, ZHU Hantang

(a. College of Civil Engineering; b. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education Chongqing University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** In order to solve the structural damage identification problem of transmission tower, a two-step identification method based on change rate and dissipation rate of modal strain energy is proposed. The damage location is identified by the change rate of modal strain energy method. Then, the modal strain energy dissipation rate theory is analyzed further by using the element stiffness matrix after injury. As a result, a more accurate damage quantification equation method is introduced. This method requires only several modals of vibration. The numerical simulation results show that this two-step method can find the damage location and damage degree of transmission towers effectively.

**Key words:** damage detection; strain energy; change rates; dissipation rates; transmission tower

输电塔工程是重要的生命线工程,一旦发生倒塌将会带来严重的经济损失。输电塔结构大多采用钢结构,长期在空气和风的作用下很容易导致螺栓脱落,构件材料屈服、腐蚀等损伤。如果不及时发现,损伤进一步扩大,最后可能导致结构倒塌,因此输电塔的损伤检测十分必要<sup>[1]</sup>。

结构损伤检测方法有很多,近 20 年来比较热门的是结构动力识别技术。根据其识别机理可分为模

型匹配法、损伤指标识别法、模型修正法和无模型识别法<sup>[2]</sup>。目前国内外学者主要是利用结构损伤引起的局部刚度降低和模态参数改变关系,通过测量结构模态参数的变化来分析结构的损伤位置和程度, Yin 等<sup>[3]</sup>和郭惠勇<sup>[4]</sup>都做过相关研究。用于结构损伤识别的模态参数包括固有频率和振型模态等,固有频率测量精度较高,但是由于其识别精度不高,所以一般只用于结构损伤预警和初步定位;而振型模

收稿日期: 2012-07-09

基金项目: 重庆市科委自然科学基金计划资助项目(CSTC2010BB4208)

作者简介: 郭惠勇(1971-),男,重庆大学副教授,博士,主要从事结构损伤识别研究,(E-mail)ghy267@hotmail.com。

态对结构损伤定位和定量都有较好的效果,然而其测量精度却比较差,但是一般结构的前几阶低阶振型模态测量还是相当精确的, Siringoringo<sup>[5]</sup> 和 Elshafey<sup>[6]</sup> 研究证明了这一点。基于模态参数的结构损伤位置诊断,目前已经有许多方法,如 Koh<sup>[7]</sup> 利用模态相关性对悬索桥进行损伤识别, Fan 等<sup>[8]</sup> 利用振型模态的小波变化对板结构进行损伤识别,识别效果也相当理想,但是结构损伤程度识别方面还是比较困难。中国学者史治宇<sup>[9-11]</sup> 最早基于模态应变能变化率推导出结构损伤定位方法,试验表明该方法简单有效;随后在此基础上进一步将模态应变能应用于结构损伤定量分析,但是该方法对模态完备性要求严格,因此又对此方法进行改进减少了模态截断误差。刘晖等<sup>[12-13]</sup> 利用模态应变能散率和相应的结构损伤前后的应变能变化关系来确定损伤程度;考虑模态不完备,又应用完备模态空间理论将未测得结构高阶模态用等效高阶模态来代替,从而消除模态截断误差的影响。但是该方法的推导过程中用损伤前的刚度矩阵 $[\mathbf{K}_j]$ 来代替损伤后的刚度矩阵 $[\mathbf{K}'_j]$ ,识别结果比实际损伤程度大,误差较大。何伟等<sup>[14]</sup> 先运用改进残余力向量确定可能损伤单元,再运用筛选法计算单元损伤程度。陈晓强等<sup>[15]</sup> 提出改进的动能密度指标损伤识别方法,实验证明该方法能够大概反映损伤程度。高维成<sup>[16]</sup> 引入敏感模态概念,提出一种基于敏感模态的损伤位置识别方法,并建立基于模态应变能理论的损伤程度评估算法估计损伤程度。赵玲等<sup>[17]</sup> 则利用模态应变能变化与频率变化关系提出了损伤程度的定量评估指标,但损伤定量识别的精度仍有待提高。宋玉普等<sup>[18]</sup> 首先利用模态应变能初步定位,然后利用支持向量机进行了定量研究。在国外也有许多学者应用模态应变能进行损伤定位和定量研究, Sazonov 等<sup>[19]</sup> 分析了模态测点对损伤识别效果的影响。Hu 等<sup>[20]</sup> 利用损伤前后的模态应变能变化作为损伤指标对叠层板的表面裂缝进行损伤定位研究。由此看来大多数基于模态应变能的损伤识别方法主要对结构损伤位置进行识别,然后采用其他方法对损伤程度进行定量分析,而直接采用应变能方法对损伤程度进行定量分析的研究相对较少,并且定量识别的精度仍有待提高。文中主要对文献[12-13]的方法进行了相应的改进,并推导出新的能量方程以提高损伤定量识别的精度。

## 1 基本理论

基于模态应变能变化率和能量方程的两步识别

方法首先利用模态应变能变化率方法进行较为精确的损伤定位,然后引入损伤后的单元刚度矩阵,对结构模态应变能散率理论进行了相关的改进研究。在模态应变能散率和相应的结构损伤前后应变能变化的关系的基础上,假设已知准确的损伤位置,如第  $j$  个损伤单元发生了大小为  $D_j$  的损伤,引入损伤后的刚度矩阵 $[\mathbf{K}'_j] = (1 - D_j)[\mathbf{K}_j]$ ( $[\mathbf{K}_j]$ 为损伤前单元刚度矩阵),推导出准确的模态应变能和损伤变量  $D_j$  的关系,此方法不需要完备的模态就能够准确的识别出损伤程度的大小,但由于其对损伤位置识别不敏感所以需要较精确的损伤定位方法,该两步识别法首先利用了精度较高的模态应变能变化率进行损伤定位,再采用改进的模态应变能散率理论进行定量识别,并利用实际工程输电塔结构作为算例来证明该方法的有效性。

## 2 损伤定位

假设结构损伤前后第  $j$  个单元的第  $i$  阶模态的单元模态应变能为

$$E_{ij} = \{\Phi_i\}^T [\mathbf{K}_j] \{\Phi_i\}, E_{ij}^d = \{\Phi_i^d\}^T [\mathbf{K}'_j] \{\Phi_i^d\}, \quad (1)$$

式中: $[\mathbf{K}_j]$ 和 $[\mathbf{K}'_j]$ 分别为结构损伤前后第  $j$  个单元的刚度矩阵,由于结构损伤后刚度矩阵 $[\mathbf{K}'_j]$ 未知,所以用 $[\mathbf{K}_j]$ 来代替 $[\mathbf{K}'_j]$ ;  $\{\Phi_i\}$ 和 $\{\Phi_i^d\}$ 分别为结构损伤前后的第  $i$  阶振型模态。因此结构损伤前后的单元模态应变能的变化  $E_i$  可表示为(略去高阶项)

$$E_{cij} = E_{ij}^d - E_{ij} = 2\{\Phi_i\}^T [\mathbf{K}_j] \{\Delta\Phi_i\}. \quad (2)$$

下面证明模态应变能变化是损伤定位的敏感因子,根据摄动理论可以由结构的固有振动方程推导出

$$\{\Delta\Phi_i\} = \sum_{r=1}^m \frac{\{\Phi_r\}^T [\Delta\mathbf{K}] \{\Phi_i\}}{\lambda_r - \lambda_i} \{\Phi_r\}, (r \neq i), \quad (3)$$

$$\text{其中 } [\Delta\mathbf{K}] = \sum_{j=1}^l D_j [\mathbf{K}_j], (0 \leq D_j \leq 1). \quad (4)$$

将式(3)代入式(2)得

$$E_{cij} = 2\{\Phi_i\}^T [\mathbf{K}_j] \left( \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^m \frac{\{\Phi_r\}^T [\Delta\mathbf{K}] \{\Phi_i\}}{\lambda_r - \lambda_i} \{\Phi_r\} \right). \quad (5)$$

假设结构的第  $p$  个单元发生损伤且程度为  $D_p$ ,则由式(4)可得

$$[\Delta\mathbf{K}] = D_p [\mathbf{K}_p]. \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)整理得

$$E_{cij} = 2D_p \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\lambda_r - \lambda_i} \{\Phi_r\}^T [K_p] \{\Phi_i\} \{\Phi_i\}^T [K_j] \{\Phi_r\}, \quad (7)$$

其中:  $\lambda_r$  和  $\lambda_i$  分别为第  $r$  和第  $i$  阶固有频率;  $\{\Phi_r\}$  和  $\{\Phi_i\}$  分别为第  $r$  和第  $i$  阶振型模态;  $[K_p]$  为第  $p$  单元的刚度矩阵;  $m$  和  $L$  分别为模态总数和单元总数。

从上式可以看出单元模态应变能变化可以做为结构损伤定位指标。为了降低振型模态随机噪声的影响可利用多阶模态参与损伤识别,由式(1)可得

$$E_j = \sum_{i=1}^m \{\Phi_i\}^T [K_j] \{\Phi_i\}, E_j^d = \sum_{i=1}^m \{\Phi_i^d\}^T [K_j^d] \{\Phi_i^d\}. \quad (8)$$

把构建单元模态应变能变化率  $E_{Rj} = \frac{|E_j^d - E_j|}{E_j}$  作为损伤定位指标。

### 3 损伤定量及其改进策略

引入损伤后的刚度矩阵  $[K_j^d] = (1 - D_j)[K_j]$ , 对模态应变能耗散率定量识别理论进行改进: 假设第  $j$  个单元发生  $D_j$  损伤, 将  $[K_j^d] = (1 - D_j)[K_j]$  代入式(1)中的第 2 个式子, 并求单元模态应变能变化得(略去高阶项)

$$E_{cij} = E_{ij}^d - E_{ij} = (1 - D_j) \{\Phi_i^d\}^T [K_j] \{\Phi_i^d\} - \{\Phi_i\}^T [K_j] \{\Phi_i\}. \quad (9)$$

考虑多阶模态同时参与可以用式(8)替换式(9)中损伤前后的模态应变能并令:

$$d = \sum_{i=1}^m \{\Phi_i^d\}^T [K_j] \{\Phi_i^d\}, u = \sum_{i=1}^m \{\Phi_i\}^T [K_j] \{\Phi_i\}. \quad (10)$$

则式(9)可改写为

$$E_{cij} = (1 - D_j)d - u. \quad (11)$$

根据应变等效原理可知整个构件和结构在  $t$  时刻由损伤变量所引起的应变能耗散率为

$$\varphi(t) = \frac{-\dot{D}(t)}{[1 - D(t)]^2} \int_V (\sigma^T \varepsilon) dv, \quad (12)$$

其中:  $\sigma, \varepsilon$  分别为构件中内部某点的应力和应变向量; 上标 T 表示转置;  $v$  表示整个构件的体积。

可认为结构的损伤过程是结构的未损伤单元的模态应变能耗散过程, 将第  $j$  单元的模态应变能耗散率表示为

$$\varphi_j(t) = \frac{-\dot{D}_j(t)}{[1 - D_j(t)]^2} u. \quad (13)$$

当时间  $t=0$  时表示结构没有发生损伤,  $D_j(0) =$

0;  $D_j(t)$  与  $t$  成线性关系, 当  $t=t^d$  时, 设结构的第  $j$  个单元发生  $D_j$  的损伤, 则损伤结构的第  $j$  个单元应变能变化为

$$\int_0^{t^d} \varphi_j(t) dt = u \int_0^{t^d} \frac{-\dot{D}_j(t)}{[1 - D_j(t)]^2} dt = u \frac{-D_j}{1 - D_j}. \quad (14)$$

根据模态应变能耗散量和相应的结构损伤前后的应变能变化等价关系可知式(11)和式(14)相等:

$$|(1 - D_j)d - u| = \left| u \frac{-D_j}{1 - D_j} \right|. \quad (15)$$

将上式两边平方去绝对值符号, 并化简得

$$d^2 D_j^4 + 2d(u - 2d)D_j^3 + 6d(d - u)D_j^2 + 2(u - 2d)(d - u)D_j + (d - u)^2 = 0. \quad (16)$$

通过上面一元四次方程求解出该单元的损伤变量  $D_j$  (即该单元的损伤程度), 可以证明上面一元四次方程有且仅有 1 个存在于  $[0, 1]$  区间内的实根<sup>[21]</sup>。利用损伤前后的单元模态应变能建立的一元四次方程式(16)可以准确地求出每个已知发生损伤的构件的损伤程度。

### 4 数值分析

以一酒杯形输电塔为例说明上述方法的有效性。如图 1 所示, 结构有限元模型为桁架模型由 903 根杆件构成, 共 281 个节点, 钢材弹性模量为  $2.0 \times 10^{11}$  Pa, 密度为  $7849 \text{ kg/m}^3$ , 截面尺寸根据实际结构确定, 为了简单说明问题暂不考虑阻尼。一般损伤多发生在塔脚和塔身, 且实际情况主要是竖向构件损伤对结构影响较大, 所以文中主要对塔脚和塔身的竖向主要杆件进行损伤识别研究。

考虑 2 种工况: 工况 1, 第 35 和 61 号单元分别发生 35% 和 70% 的损伤; 工况 2, 第 3、9、15 号单元分别发生 35%、73%、57% 的损伤。结构损伤定位和定量识别分别取结构 X 方向前 5 阶振型模态和结构 X 方向第一阶振型模态为诊断信息, 为了分析测量噪声的影响对振型模态分别加入了 1%、2% 和 3% 的测量噪声。噪声表达式如下:

$$\Phi_n = \Phi(1 + \xi\gamma), \quad (17)$$

式中:  $\Phi_n$  为被噪声污染后的模态参数;  $\Phi$  为理论分析的模态参数;  $\gamma$  为具有零均值, 方差为 1 的正态分布随机数, 在 Matlab 中利用函数 randn 模拟;  $\xi$  为误差的噪声水平(如加入 1% 的噪声,  $\xi=0.01$ )。

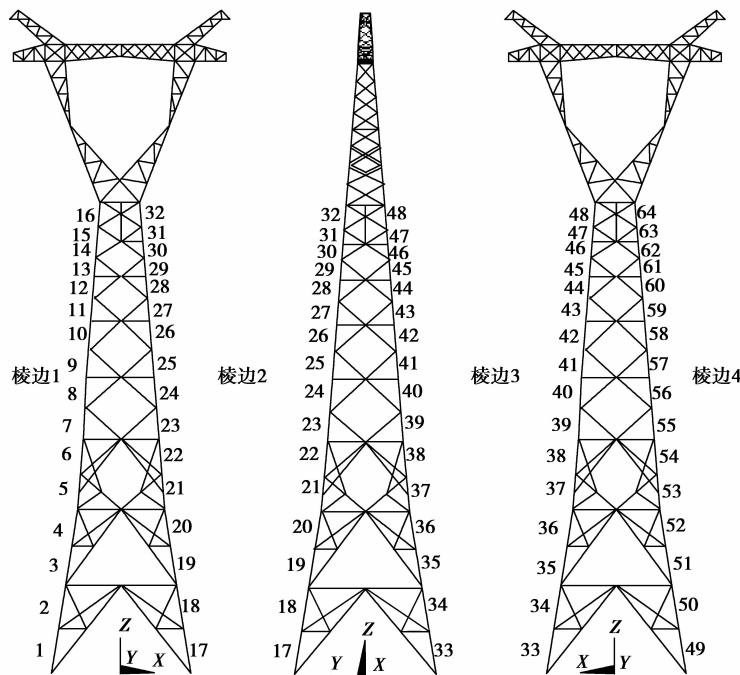


图 1 输电塔结构模型

#### 4.1 定位识别结果

识别结果如图 2 和图 3 所示,可看出发生损伤的单元对应的  $E_R$  值明显大于其他非损伤单元,同时随着噪声的增大非损伤单元对应的  $E_R$  值会逐渐增大,但是仍然能够很清楚地判断损伤的位置。图 2 为工况 1 的识别结果,可以发现第 35 和 61 号单元对应的  $E_R$  值远远大于其它非损伤单元,由于 35 号单元的损伤程度比 61 号单元小,所以  $E_R$  值也相应比较小;随着噪声的增大识别效果有所下降,尤其是损伤较小的位置,但这种影响不大,由图中可以看出当噪声水平为 3% 时识别效果仍为理想。图 3 为工况 2 的识别结果,同样可以明显判断出单元 3、9 和 15 发生损伤,而且这 3 个单元分别处于结构的上中下 3 个位置,说明该方法对损伤出现的任何位置识别效果都比较理想;同时可以发现损伤程度越大  $E_R$  值越大,并且各损伤程度越相近识别效果越好;该方法不受结构对称性影响。为了说明该方法的有效性对所有单损伤情况(损伤程度均为 50%)的识别结果进行统计,结果表明无噪声情况识别正确率为 100%,当噪声水平为 3% 时正确率为 93.75%;未识别出来的单元主要位于支座附近的几个单元,这是由于边界条件的影响,但是这些单元也并非完全无法判断,只是识别效果不那么明显。

#### 4.2 定量识别结果

表 1 为工况 2 使用不同数量模态时的识别结果比较,可以看出使用 X 方向前 3 阶模态的识别结果

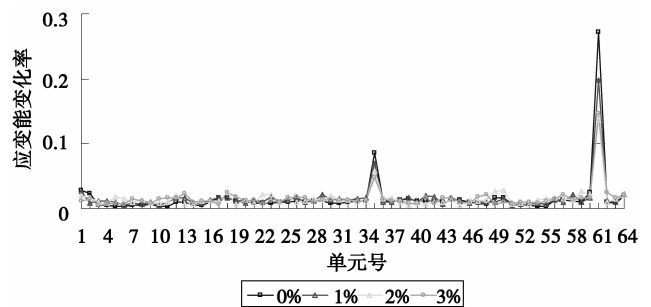


图 2 不同噪声水平下工况 1 的损伤定位识别结果

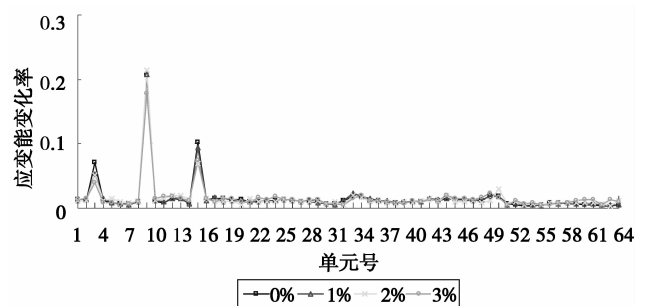


图 3 不同噪声水平下工况 2 的损伤定位识别结果

最好平均误差均在 10% 以内,比仅使用 1 阶模态的识别结果好,但是当模态继续增加到 5 阶模态时,识别效果突然下降,平均误差超过 30%。由此可知模态数目不是越多越好,这是由于高阶模态对损伤识别贡献较小识别效果差,同时高阶模态的测量误差较大,因此盲目增加模态数目是不明智的,认为使用

X 方向前 3 阶模态进行损伤定量识别较为合理。此外,可以发现 3 阶模态的不同噪声水平的识别结果差距不大,说明噪声对该方法的影响不大,只要噪声水平控制在 3% 内识别结果仍为比较理想。

表 1 工况 2 使用不同模态数的识别结果 %

模态	噪声水平	单元损伤程度			平均相对误差
		单元 3	单元 9	单元 15	
1 阶模态 识别结果	无噪声	46.38	74.09	64.48	15.71
	1	47.35	76.36	61.19	15.75
	2	50.82	76.42	49.46	21.04
	3	40.07	73.32	35.90	17.32
3 阶模态 识别结果	无噪声	41.27	69.22	57.34	7.90
	1	40.25	68.79	51.74	9.99
	2	39.04	67.81	58.57	7.14
	3	37.23	67.63	65.84	9.75
5 阶模态 识别结果	无噪声	8.40	64.20	49.67	33.64
	1	6.96	64.49	50.42	34.44
	2	2.80	63.90	49.67	39.12
	3	25.42	63.07	55.47	14.56

表 2 将文中提出的损伤定量方法和文献[12]中的方法进行比较,给出了 2 种方法分别对工况 1 进行损伤定量分析的结果,并分别算出平均误差。文中方法的误差均在 10% 左右而文献[12]的定量方法的误差超过了 30%,显然文中提出的方法更精确;这是因为文献[12]中的方法假设了损伤后单元刚度矩阵不变,导致计算结果偏大,误差较大。文中引入了损伤后单元刚度矩阵消除这部分误差影响,所以识别结果较为理想。由识别结果看 2 种方法对

表 2 文中损伤定量方法和文献[12]中方法比较 %

方法	噪声水平	单元损伤程度		平均相对误差	最大绝对误差
		单元 35	单元 61		
文中方法	无噪声	29.72	66.19	10.27	5.28
	1	31.28	66.03	8.15	3.97
	2	39.16	65.05	9.48	4.95
	3	40.09	64.95	10.87	5.09
文献[12] 方法	无噪声	50.61	87.17	34.57	17.17
	1	53.13	87.05	38.08	18.13
	2	49.69	89.45	34.87	19.45
	3	47.48	85.32	28.77	15.32

噪声的影响都不太敏感,此外为了充分说明文中提出方法的有效性,对所有单损伤情况(损伤程度均为 50%)的识别结果进行统计分析,发现噪声水平在 3% 以内最大相对误差为 10% 左右,最大绝对误差不大于 5,识别结果较为理想。

## 5 结 论

文中利用模态应变能变化率先对结构进行较为准确的损伤定位,在已确定损伤位置的前提下,将损伤后刚度矩阵引入到模态应变能耗散率理论中,避免用未损伤结构刚度矩阵代替所带来的误差,并利用模态应变能变化和模态应变能耗散率的关系推导出更精确的损伤定量方程方法。该方法只需要前几阶振型模态,避免高阶模态的测量误差,减少了测量噪声的影响;通过算例证明此方法能有效的进行损伤位置和损伤程度识别,为该方法的实际运用提供了理论基础。

### 参考文献:

- [1] Lou W J, Lin B L. Wavelet transform based method for detecting damage location of electricity transmission towers[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23 (Sup): 157-162,168.
- [2] 郭惠勇,李正良,彭川. 结构损伤动力识别技术的研究与进展[J]. 重庆建筑大学学报,2008,30(1):140-145.  
GUO Huiyong, LI Zhengliang, PENG Chuan. Researches and advances in structural damage dynamic identification technology [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2008, 30(1): 140-145
- [3] Yin T, Lam H F, Chow H M, et al. Dynamic reduction-based structural damage detection of transmission tower utilizing ambient vibration data [J]. Engineering Structures, 2009, 31(9):2009-2019.
- [4] 郭惠勇,张陵,蒋建. 基于遗传算法的二阶段结构损伤探测方法[J]. 西安交通大学学报,2005, 39(5): 485-489.  
GUO Huiyong, ZHANG Ling, JIANG Jian. Two-stage structural damage detection method with Genetic algorithms[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(5): 485-489.
- [5] Siringoringo D M, Fujino Y. System identification of suspension bridge from ambient vibration response[J]. Engineering Structures, 2008,30(2):462-477.
- [6] Elshafey A A, Haddara M R, Marzouk H. Identification of the excitation and reaction forces on offshore platforms using the random decrement technique [J]. Ocean Engineering, 2009, 36 (6/7): 521-528.
- [7] Koh B H, Dyke S J. Structural health monitoring for

- flexible bridge structures using correlation and sensitivity of modal data[J]. *Computers & Structures*, 2007, 85(3/4): 117-130.
- [8] Fan W, Qiao P Z. A 2-D continuous wavelet transform of mode shape data for damage detection of plate structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(25/26): 4379-4395.
- [9] 史治宇, 罗绍湘, 张令弥. 结构破损定位的单元模态应变能变化率法[J]. *振动工程学报*, 1998, 11(3): 356-360.  
SHI Zhiyu, LUO Shaoxiang, ZHANG Lingmi. Determination of structural damage location based on elemental modal strain energy change[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1998, 11(3): 356-360.
- [10] 史治宇, 吕令毅. 由模态应变能法诊断结构破损的实验研究[J]. *东南大学学报: 自然科学版*, 1999, 29(2): 134-138.  
SHI Zhiyu, LÜ Lingyi. A test research of structural damage detection by using modal strain energy [J]. *Journal of Southeast University: Natural Science Edition*, 1999, 29(2): 134-138.
- [11] 史治宇, 吕令毅. 基于模态应变能诊断结构破损的修正方法[J]. *东南大学学报: 自然科学版*, 2000, 30(3): 84-87.  
SHI Zhiyu, LÜ Lingyi. Improved structural damage detection method based on modal strain energy [J]. *Journal of Southeast University: Natural Science Edition*, 2000, 30(3): 84-87.
- [12] 刘晖, 瞿伟廉, 袁润章. 基于模态应变能耗散率理论的结构损伤识别方法[J]. *振动与冲击*, 2004, 23(2): 118-121.  
LIU Hui, QU Weilian, YUAN Runzhang. Structural damage detection method based on the theory of dissipation ratio of modal strain energy [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2004, 23(2): 118-121.
- [13] 刘晖, 瞿伟廉, 袁润章. 基于应变能耗散率的结构损伤识别方法研究[J]. *工程力学*, 2004, 21(5): 198-202.  
LIU Hui, QU Weilian, YUAN Runzhang. A structural damage detection method based on modal strain energy dissipation ratio theory [J]. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(5): 198-202.
- [14] 何伟, 陈淮, 王博, 等. 运用改进残余力向量法结构损伤识别研究 [J]. *振动、测试与诊断*, 2009, 29(4): 379-382.  
HE Wei, CHEN Huai, WANG Bo, et al. Structural damage identification by using improved residual force vector [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2009, 29(4): 379-382.
- [15] 陈晓强, 朱宏平, 王丹生, 等. 基于动能密度的结构损伤识别[J]. *振动与冲击*, 2009, 28(8): 35-41.  
CHEN Xiaoqiang, ZHU Hongping, WANG Dansheng, et al. Improved kinetic energy density based structural damage detection [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(8): 35-41.
- [16] 高维成, 刘伟, 钱成. 基于剩余模态力和模态应变能理论的网架结构损伤识别 [J]. *工程力学*, 2007, 24(5): 93-100.  
GAO Weicheng, LIU Wei, QIANG Cheng. Damage detection of space truss using residual modal force and modal strain energy [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(5): 93-100.
- [17] 赵玲, 李爱群. 基于单元应变能变化率的结构损伤识别方法 [J]. *东南大学学报: 自然科学版*, 2007, 37(6): 1052-1056.  
ZHAO Ling, LI Aiqun. Structural damage identification method based on elemental strain energy change ratio [J]. *Journal of Southeast University: Natural Science Edition*, 2007, 37(6): 1052-1056.
- [18] 宋玉普, 张亮, 刘志鑫. 测量模态不完整情况下空间网架结构的损伤识别 [J]. *土木工程学报*, 2009, 42(1): 10-15.  
SONG Yupu, ZHANG Liang, LIU Zhixin. Damage identification of space truss with incomplete measured data [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(1): 10-15.
- [19] Sazonov E, Klinkhachorn P. Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 285(4/5): 783-801.
- [20] Hu H W, Wang B T, Lee C H. Damage detection of surface crack in composite quasi-isotropic laminate using modal analysis and strain energy method [J]. *Key Engineering Materials*, 2006(306/307/308): 757-762.
- [21] Malek F, Vaillancourt R. A composite polynomial zero-finding matrix algorithm [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 1995, 30(2): 37-47.

(编辑 陈移峰)