

文章编号:1000-582X(2012)12-112-08

具有分级感染率的 4 仓室计算机病毒传播模型

杨茂斌^{1,2a}, 杨小帆^{2a}, 祝清意^{2a}, 杨榕星^{2a,2b}

(1. 重庆邮电大学 通信与工程学院, 重庆 400065; 2. 重庆大学 a. 计算机学院; b. 数理统计学院, 重庆 400044)

摘要:根据计算机病毒的性质, 针对常驻病毒所经历 2 个重要阶段的特点: 在潜伏阶段病毒因未加载入内存而不具有感染力; 在活跃阶段, 病毒驻留于内存并伺机感染目标文件, 划分了 2 个新的具有不同感染率的计算机仓室, 建立了一种新的具有分级感染率的常驻病毒传播模型, 并应用稳定性理论和仿真实验研究了该模型的动力性质, 研究结果表明所提模型的动力行为完全由基本再生率决定, 如果基本再生率小于等于一, 则无病毒平衡点的全局稳定, 如果基本再生率大于一, 则有毒平衡点局部稳定, 并根据仿真实验猜测其全局稳定, 通过对基本再生率进行系统参数敏感性分析, 提出了有效阻止病毒网络传播的控制策略。

关键词:计算机病毒; 常驻病毒; 动力模型; 稳定性; SLARS 模型

中图分类号: TP309.5

文献标志码: A

A four-compartment computer virus propagation model with graded infection rate

YANG Maobin^{1,2a}, YANG Xiaofan^{2a}, ZHU Qingyi^{2a}, YANG Luxing^{2a,2b}

(1. School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts & Telecommunications, Chongqing 400065, China; 2a. College of Computer Science; b. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: A new resident virus propagation model with graded infection rate is established based on the properties of two important stages undergoing by resident virus, which are the latent phase, in which resident virus cannot infect other hosts because it has not yet been loaded into memory and the active phase, in which resident virus resides in memory and infects any suitable program that is executed on the computer. Two computer compartments with different infection rate are established. Furthermore, the dynamic behaviors of this model are investigated by stability theory and numerical simulations. It is found that the dynamical properties of this model are determined by basic reproductive rate. Specifically, virus-free equilibrium is globally asymptotically stable if basic reproductive rate is less than or equal to one, whereas the local asymptotical stability of the viral equilibrium is guaranteed if basic reproductive rate is bigger than one, followed by a conjecture on its global stability. Then the sensitivity analysis of basic reproductive rate to the system parameters is investigated and a collection of policies is advised to control the spread of computer virus over the Internet.

Key words: computer viruses; resident virus; dynamic model; stability; SLARS model

收稿日期: 2012-06-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771227); 教育部博士基金资助项目(20110191110022)

作者简介: 杨茂斌(1974-), 男, 重庆大学博士研究生, 主要从事计算机病毒、动力系统、云计算、并行计算等方向研究, (Tel)13527502640; (E-mail) mbyang0808@gmail.com。

随着人类广泛地运用网络实现信息共享,特别是物联网和泛在网时代的来临,计算机病毒的传播途径呈现出多元化、隐蔽化、迅捷化、智能化等特点,这给信息社会带来了巨大的威胁^[1-2]。因此,研究计算机病毒在 Internet 上的传播行为并提出有效的控制策略以便最大程度地阻止病毒在 Internet 上的扩散、降低病毒的危害是一项重要任务。

解决病毒问题需要从微观与宏观 2 个方面去考虑^[3],微观方面主要研究计算机病毒的程序结构提出反病毒技术并努力清除不断产生的新病毒,其应用通常表现为杀毒软件、防火墙等产品。但是,根据 Cohen^[4]的开创性理论,基于 VonNeumann^[5]体系结构的计算机病毒程序与其它程序完全一样,在计算机病毒没有表现出明显的危害之前,人们对新计算机病毒几乎一无所知,因此不存在可以查杀所有未知病毒的杀毒软件,从这个意义上来说,仅从微观方面研究计算机病毒具有一定的局限性。

宏观方面主要研究病毒的传播规律并提出控制策略。借鉴生物流行病毒宏观研究所取得的巨大成功,根据计算机病毒与生物病毒在传播方面的相似性^[3],借鉴生物病毒传播模型,计算机病毒传播模型得到了广泛的研究。Kephart 等^[6]最早提出 SIS 模型,该模型运用生物流行病学方法首次从宏观上将网络中的计算机划分为易感染(Susceptible)和感染(Infected)2 种状态,而不考虑计算机病毒在机内的细节问题,认为一个处于易感染状态的计算机被病毒感染后会变成感染状态,在感染状态中的计算机通过某种措施(例如安装杀毒软件进行杀毒或重新安装操作系统)将该计算机病毒清除后,该计算机又重新成为易感染计算机,该模型简单地描述了计算机病毒在网络中传播的情况,没有能很好地反映出实际的情况,但是它为后续计算机病毒模型的研究奠定了基础。随后, Kim 等^[7]提出了 SIR 模型,考虑杀毒软件的效果,并假定 R 计算机一旦从计算机病毒中恢复过来便不会再被相同的病毒所感染,也不会向其他计算机传播病毒,该模型在 SIS 模型的基础上增加了一个恢复状态(Recovered),为以后计算机病毒模型的研究拓展了研究思路。随着 SIS 模型和 SIR 模型等经典模型深入广泛的研究,人们开始考虑更多的现实因素。SIRS^[8-12]模型综合了 SIS 和 SIR2 种模型,更好地刻画了计算机状态。考虑病毒传播的潜伏性,增加一类潜伏计算机(Exposed),建立了 SEIR 模型^[13-14],该类模型认为已感染病毒的潜伏状态计算机由于病毒并没有爆发或者被激活而不具有传染性的,以此区别于感染状态的计算机,该

模型较之以前的模型,更加全面地刻画了计算机种群的划分和仓室状态。随后 Mishra 等^[15-16]引入了 SEIRS 潜伏模型,该模型主要是在 SEIR 模型的基础上考虑了在感染状态中的计算机通过安装杀毒软件进行杀毒或重新安装操作系统等方式将该计算机病毒清除后,该计算机又重新成为易感染计算机(S)。考虑到在感染状态中的计算机通过某种措施将该计算机进行隔离,并由此引入隔离计算机(简称 Q 计算机),在计算机病毒清除后,该计算机又重新成为具有永久免疫力的计算机(R),在 SEIR 模型的基础上, Mishra 等^[17]提出了 SEIQR 模型,该模型既考虑了计算机病毒的潜伏性,也考虑了仓室的免疫性,比较全面地刻画了计算机病毒传播的过程。随后, Mishra 等^[18]提出了 SEIQRS 模型,该模型在 SEIQR 的基础上考虑了最新杀毒软件的时效性, R 计算机在经过一段时间后又转变为易感染计算机,更加全面地刻画了计算机病毒传播的过程。仿照生物接种, Wang 等^[19]研究了 SEIQV 模型,通过对计算机进行病毒程序接种,使接种计算机具有病毒永久免疫力,该模型首次考虑了 5 种状态, 8 个状态转移参数,细致地描述了计算机病毒的传播过程。

综合目前这些研究模型,比较全面地刻画了计算机病毒的传播过程,主要研究了这些模型的动力稳定性行为,其研究方法具有重要的参考价值,结果也具有较高的理论价值。但是,这些模型只是简单地调整与修改了相对应的生物传播模型,最为明显的一点是认为处于病毒潜伏期的计算机完全类似于处于潜伏期的生物病毒,不具有病毒传染能力,这与计算机病毒的网络传播实际情况并不完全相符;而且,大多研究没有明确提出指导实际的反病毒方法与策略。

在前人的研究基础上,借鉴生物病毒传播的本质思想,深入分析计算机病毒的特点,结合计算机病毒网络传播的实际情况,深刻理解影响计算机病毒传播的因素,进行合理的计算机状态划分,提出更加符合计算机病毒特点的新型传播模型,运用稳定性相关理论研究该模型的动力行为,在此基础上提出阻止计算机病毒传播的控制策略。

1 病毒传播模型

计算机病毒是指编制或者在计算机程序中插入的破坏计算机功能或者毁坏数据、影响计算机使用、并能自我复制的一组计算机指令或者程序代码。为了能够复制其自身,计算机病毒必须能够执行复制代码并能够对内存执行写操作。基于这个原理,许

多计算机病毒都是将自己附着在合法的可被计算机运行的文件上,如果使用者企图执行这些文件,那么计算机病毒就有机会运行并感染目标文件。通常根据计算机病毒执行时所表现出来的行为将计算机病毒分成常驻型病毒和非常驻型病毒两种类型。非常驻型病毒一旦被载入内存会立即寻找其它宿主并加以感染,随后将控制权交给被感染的应用程序,因此很容易被计算机用户识别并被快速清除。相反,常驻型病毒被载入内存后不会夺取宿主程序的控制权,在宿主程序执行期间一直驻留在内存后台并不断地伺机感染其它目标,因此它具有更大的隐蔽性和危害性。

常驻病毒通常要经历 2 个典型的阶段:潜伏阶段与活跃阶段。在潜伏阶段,常驻病毒未载入内存,从而不具有感染能力,但仍可通过信息共享等方式被传播到其他计算机;在活跃阶段,常驻病毒驻留于内存,并可通过感染新的目标宿主程序去感染其他计算机。从这种意义上来说,常驻病毒处于活跃期的计算机比常驻病毒处于潜伏期的计算机具有更强的病毒感染力。

为了便于研究,在模型中只考虑常驻病毒,计算机总体由连接在 Internet 上的计算机组成,其中每一台计算机都能与网络上的其它任一计算机通信并可能相互感染,针对常驻病毒的特点,考虑杀毒软件的时效性,将所有连接在 Internet 上的计算机分为 4 类:易感染(susceptible)计算机(S 计算机)、常驻病毒仍处于潜伏期(latent)的计算机(L 计算机)、常驻病毒处于活跃期(active)的计算机(A 计算机)以及刚清除病毒处于恢复状态(recovered)的计算机(R 计算机),并建立一种新的 4 仓室传播模型(SLARS 模型)。用 $S(t)$ 、 $L(t)$ 、 $A(t)$ 以及 $R(t)$ 分别表示在 t 时刻的易感染计算机、潜伏计算机、活跃计算机以及恢复计算机在总体计算机中所占的百分比,如无特别说明,文中用简写的 S 、 L 、 A 以及 R 分别予以代替,则 $S+L+A+R=1$ 。

经过对其他因素的仔细综合考虑,现作如下规范性假设

H(1)所有新接入网络的计算机都是 S 计算机;

H(2)外部计算机接入网络的速率为正常数 μ ,同时,在网计算机的断开率也为 μ ;

H(3)网内 S 计算机在 t 时刻被感染的增长率为 $\beta_1 SL + \beta_2 SA$,其中 β_1 和 β_2 是正常数。事实上,A 计算机比 L 计算机具有更高的感染力,因此,可以合理地假设 $\beta_2 > \beta_1$;

H(4)L 计算机中的驻留病毒以 1 个非负速率 ϵ

载入计算机内存;

H(5)A 计算机以 1 个非负速率 γ 得到治愈;

H(6)R 计算机以 1 个非负速率 α 转变为 S 计算机。

综合以上假设,可建立如下常驻病毒传播模型

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu - \beta_1 SL - \beta_2 SA + \alpha R - \mu S, \\ \dot{L} = \beta_1 SL + \beta_2 SA - \epsilon L - \mu L, \\ \dot{A} = \epsilon L - \gamma A - \mu A, \\ \dot{R} = \gamma A - \alpha R - \mu R. \end{cases} \quad (1)$$

因为 $S+L+A+R=1$,系统(1)可以简化为下列三维子系统

$$\begin{cases} \dot{L} = \beta_1(1-L-A-R)L + \beta_2(1-L-A-R)A - \epsilon L - \mu L, \\ \dot{A} = \epsilon L - \gamma A - \mu A, \\ \dot{R} = \gamma A - \alpha R - \mu R. \end{cases} \quad (2)$$

则该系统满足初始条件 $L(0) \geq 0, A(0) \geq 0, R(0) \geq 0$ 。

2 平衡状态及基本再生率

研究计算系统(2)所有的稳定状态以及基本再生率。因为 $S+L+A+R=1$,所以系统(2)的可行区域为

$$\Omega = \{(L, A, R) : L \geq 0, A \geq 0, R \geq 0, L + A + R \leq 1\},$$

这是一个正的不变集,保证了初始条件在区域 Ω 中的解的存在性和唯一性。

显然,系统(2)有无毒平衡点

$$E_0 = (L_0, A_0, R_0) = (0, 0, 0),$$

这意味着 $S_0 = 1 - L_0 - A_0 - R_0 = 1$,表示系统的无毒状态。

基本再生率^[20]是一个重要的参数,它从数学角度决定了常驻病毒是否会在 Internet 上扩散。采用文献[20]中的方法来计算基本再生率,设 $\mathbf{X} = (L, A)$,从系统(1)可知

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{V},$$

其中,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta_1 SL & \beta_2 SA \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} (\mu + \epsilon)L \\ -\epsilon L + (\mu + \gamma)A \end{bmatrix}.$$

设 \mathbf{J}_F 和 \mathbf{J}_V 分别表示 \mathbf{F} 和 \mathbf{V} 在无毒平衡点 E_0 处的雅可比矩阵(jacobian matrix),则

$$J_F = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_V = \begin{bmatrix} \mu + \epsilon & 0 \\ -\epsilon & \mu + \gamma \end{bmatrix}.$$

矩阵 $K = J_F J_V^{-1}$ 的谱半径 (spectral radius) 正好等于 SLARS 模型的基本再生率 R^0 , 即 $R^0 = \rho(J_F J_V^{-1})$ 。经计算

$$R^0 = \frac{\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon}{(\mu + \epsilon)(\mu + \gamma)}, \quad (3)$$

另外, 计算得知系统 (2) 还有一个内部平衡点, 称该平衡点为有毒平衡点, 表示如下

$$E_* = (L_*, A_*, R_*),$$

其中

$$L_* = K^*(\mu + \gamma)(\mu + \alpha);$$

$$A_* = K^*\epsilon(\mu + \alpha);$$

$$R_* = K^*\gamma\epsilon,$$

以及

$$K^* = \frac{(\mu + \epsilon)(\mu + \gamma)(R^0 - 1)}{[\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon][\epsilon\gamma + (\mu + \alpha)(\gamma + \mu + \epsilon)]}.$$

所以, $E_* = (L_*, A_*, R_*) \in \Omega' = \Omega - E_0$, 显然, 有毒平衡点存在当且仅当 $R^0 > 1$ 。

3 无毒平衡点的稳定性

主要研究无毒平衡点的局部和全局稳定性, 首先, 提出如下定理

定理 1 如果 $R^0 \leq 1$, 则无毒平衡点 E_0 局部渐进稳定。

证明: 线性化系统 (2), 得到系统 (2) 关于无毒平衡点 E_0 的雅可比矩阵,

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} \beta_1 - \mu - \epsilon & \beta_2 & 0 \\ \epsilon & -\mu - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu - \alpha \end{bmatrix},$$

其特征方程为 $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$, 其中,

$$a_2 = 3\mu + \epsilon + \gamma + \alpha - \beta_1,$$

$$a_1 = (\mu + \alpha)(2\mu + \epsilon + \gamma - \beta_1) + (\mu + \gamma)(\mu + \epsilon - \beta_1) - \beta_2\epsilon,$$

$$a_0 = (\mu + \alpha)[(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon - \beta_1) - \beta_2\epsilon].$$

据此可得

$$a_2 a_1 - a_0 = (\mu + \alpha)(2\mu + \epsilon + \gamma - \beta_1)(3\mu + \epsilon + \gamma + \alpha - \beta_1) + [(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon - \beta_1) - \beta_2\epsilon](2\mu + \epsilon + \gamma - \beta_1).$$

利用 $R^0 \leq 1$, 经过简单计算, 可以得出: 如果 $R^0 \leq 1$, 则 $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$, 以及 $a_2 a_1 - a_0 > 0$ 。根据 Routh-Hurwitz 判定准则^[21], 无毒平衡点 E_0

是局部渐进稳定的, 定理证明完毕。

利用直接李·雅谱诺夫函数法 (Lyapunov function) 来证明无毒平衡点的全局稳定性。

定理 2 如果 $R^0 \leq 1$, 则无毒平衡点 E_0 关于 Ω 全局稳定。

证明: 构造函数

$$V(L, A) = \frac{1}{2}(L^2 + kA^2), \quad (4)$$

其中, k 是待定正常数。显然, V 正定的, 根据系统 (2) 计算得到

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2)} &= \beta_1 SL^2 + \beta_2 SLA - (\mu + \epsilon)L^2 + \\ &kA[\epsilon L - (\mu + \gamma)A] = \\ &\beta_1 \left[S - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon)}{\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon} \right] L^2 + \\ &\beta_2 \left[S - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon)}{\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon} \right] LA + \\ &\beta_1 \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon)}{\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon} L^2 + \\ &\beta_2 \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon)}{\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon} LA - \\ &(\epsilon + \mu)L^2 + k\epsilon LA - k(\mu + \gamma)A^2. \end{aligned}$$

因为,

$$\epsilon + \mu - \frac{\beta_1}{R^0} = \epsilon + \mu - \frac{\beta_1(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon)}{\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon} > 0,$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式, 有

$$\left(\frac{\beta_2}{R^0} + k\epsilon \right) LA \leq \left(\epsilon + \mu - \frac{\beta_1}{R^0} \right) L^2 + \frac{\left(\frac{\beta_2}{R^0} + k\epsilon \right)^2}{4 \left(\epsilon + \mu - \frac{\beta_1}{R^0} \right)} A^2.$$

设 $k = \frac{\beta_2(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon)}{\epsilon(\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon)}$, 那么

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2)} &\leq \beta_1 \left[S - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon)}{\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon} \right] L^2 + \\ &\beta_2 \left[S - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \epsilon)}{\beta_1(\mu + \gamma) + \beta_2\epsilon} \right] LA. \end{aligned}$$

由 $R^0 \leq 1$, 可知 $dV/dt \leq 0$ 对 $(L, A, R) \in \Omega$ 成立。而且, $dV/dt = 0$ 当且仅当 $(L, A) = (0, 0)$ 。另外, 当 $L \rightarrow \infty$ 或 $A \rightarrow \infty, V(L, A) \rightarrow \infty$ 。根据 LaSalle 不变原理^[21], 如果 $R^0 \leq 1$, 则 E_0 关于 Ω 是全局渐进稳定的, 定理证明完毕。

仿真 1 考虑系统 (2) 的 2 个具体实例, 其参数如下

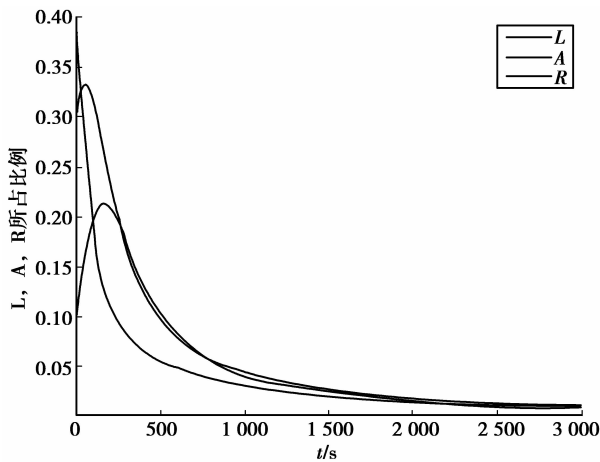
表 1 2 个典型的 R^0

| R^0 | ≈ 0 | ≈ 1 |
|-------|---------------|---------------|
| 值 | 0.246 785 873 | 0.911 519 723 |

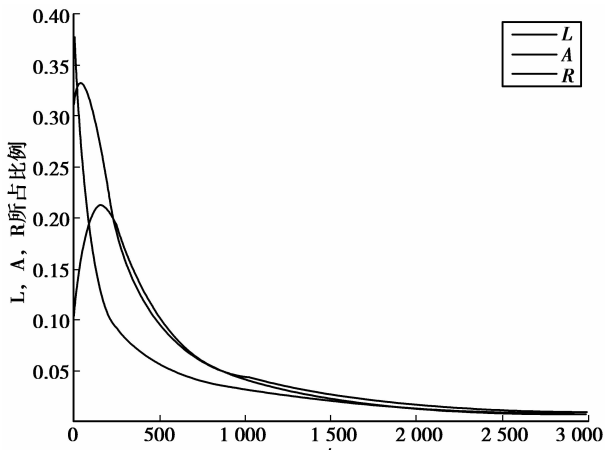
表 2 相应 R^0 取值的系统参数值及初始值

| R^0 | P | | | | | | $x(0)$ | | |
|-------------|-----------|-----------|------------|----------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | β_1 | β_2 | ϵ | γ | α | μ | $L(0)$ | $A(0)$ | $R(0)$ |
| ≈ 0 | 0.0010 | 0.002 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.001 | 0.4 | 0.3 | 0.1 |
| ≈ 1 | 0.0030 | 0.005 | 0.01 | 0.08 | 0.01 | 0.0008 | 0.4 | 0.3 | 0.1 |

根据定理 2, 当 $R^0 \leq 1$ 时, 初始值为表二中的点将随着时间的演化最终趋于无毒平衡点 $E_0 = (0, 0, 0)$ 。图 1(a)、(b) 分别示意了在这 2 种情况下, $L(t), A(t), R(t)$ 随着时间的演化趋势。



(a) $R^0=0.246785873$ 时 $L(t), A(t), R(t)$ 的演化



(b) $R^0=0.911519723$ 时 $L(t), A(t), R(t)$ 的演化

图 1 $R^0 < 1$ 时 $L(t), A(t), R(t)$ 的演化

4 有毒平衡点的稳定性

讨论有毒平衡点的稳定性。首先, 作如下定理:

定理 3 如果 $R^0 > 1$, 则有毒平衡点 E_* 关于 Ω' 局部渐进稳定。

证明: 通过线性化系统 (2), 可得到系统 (2) 关于有毒平衡点 E_* 的雅可比矩阵

$$J_{E_*} = (J_1, J_2, J_3),$$

其中,

$$J_1 = (-\beta_1(L_* - S_*) - \beta_2 A_* - \mu - \epsilon, \epsilon, 0)^T,$$

$$J_2 = (-\beta_1 L_* - \beta_2(A_* - S_*), -\mu - \gamma, \gamma)^T,$$

$$J_3 = (-\beta_1 L_* - \beta_2 A_*, 0, -\mu - \alpha)^T.$$

其特征方程为 $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$, 其中,

$$a_2 = \beta_1 L_* + \beta_2 \left(A_* + \frac{S_* A_*}{L_*} \right) + \frac{\gamma A_*}{R_*} + \epsilon \frac{L_*}{A_*},$$

$$a_1 = \gamma \epsilon \frac{L_*}{R_*} + \gamma \frac{A_*}{R_*} \left(\beta_1 L_* + \beta_2 A_* + \beta_2 \frac{S_* A_*}{L_*} \right) +$$

$$\epsilon \frac{L_*}{A_*} (\beta_1 L_* + \beta_2 A_*) + \epsilon (\beta_1 L_* + \beta_2 A_*),$$

$$a_0 = \gamma \epsilon (\beta_1 L_* + \beta_2 A_*) \frac{R_* + A_* + L_*}{R_*}.$$

据此可得

$$a_2 a_1 - a_0 = \left(\beta_1 L_* + \beta_2 A_* + \beta_2 \frac{S_* A_*}{L_*} \right) a_1 +$$

$$\epsilon \mu (\beta_1 L_* + \beta_2 A_*) + \epsilon \frac{L_*}{A_*} \left[\gamma \frac{L_*}{A_*} +$$

$$\gamma \frac{A_*}{R_*} \left(\beta_1 L_* + \beta_2 A_* + \beta_2 \frac{S_* A_*}{L_*} \right) +$$

$$\epsilon \frac{L_*}{A_*} (\beta_1 L_* + \beta_2 A_*) \right] + \gamma \frac{A_*}{R_*}$$

$$\left[\gamma \frac{L_*}{A_*} + \gamma \frac{A_*}{R_*} \left(\beta_1 L_* + \beta_2 A_* + \beta_2 \frac{S_* A_*}{L_*} \right) \right].$$

根据 $R^0 > 1$, 显然 $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$ 以及 $(a_2 a_1 - a_0) > 0$ 。根据 Routh-Hurwitz 判定准则^[21], 有毒平衡点是局部渐进稳定的。

对于系统 (2), 要直接构造李·雅谱诺夫函数来证明有毒平衡点的全局稳定性是相当困难的, 几乎试验了目前所知的各种构造方法, 但仍然失败了。分析其主要原因在于系统 (2) 较之传统的病毒模型^[8-19] 多出一非线性项 $\beta_2 SA$ 。鉴于此, 做了大量的数值仿真实验以观察在 $R^0 > 1$ 时 $L(t), A(t), R(t)$ 对不同的初始值随着时间的演化趋势, 其中, 选取了如下 3 个典型实例。如表 3, 4 所示。

表 3 3 个典型的 R^0

| R^0 | ≈ 1 | ≈ 10 | ≈ 100 |
|-------|---------------|---------------|---------------|
| 值 | 1.133 506 208 | 11.335 062 08 | 97.736 625 51 |

表 4 对应取值的系统参数值

| R^0 | Parameters | | | | | |
|---------------|------------|-----------|------------|----------|----------|----------|
| | β_1 | β_2 | ϵ | γ | α | μ |
| ≈ 1 | 0.004 | 0.006 | 0.01 | 0.008 | 0.01 | 0.000 08 |
| ≈ 10 | 0.04 | 0.06 | 0.01 | 0.008 | 0.01 | 0.000 08 |
| ≈ 100 | 0.05 | 0.06 | 0.01 | 0.001 | 0.001 | 0.000 08 |

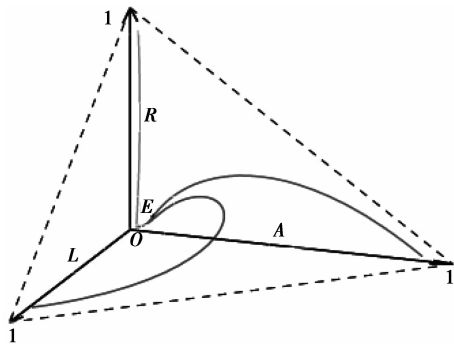
仿真 2 考虑系统(2)在 $R^0 = 1.133\ 506\ 208$ 条件下 $L(t), A(t), R(t)$ 随着时间的演化趋势, 如图 2 所示。及表 4 所对应的系统参数值和表 5 所示的初始值

表 5 14 个典型边界初始值

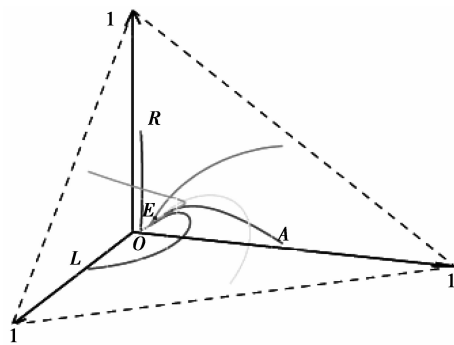
| $X(0)$ | P_1^1 | P_2^1 | P_3^1 | P_4^1 | P_1^2 | P_2^2 | P_3^2 | P_4^2 | P_5^2 | P_6^2 | P_1^3 | P_2^3 | P_3^3 | P_4^3 |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $L(0)$ | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.92 | 0.48 | 0.04 | 0.04 | 0.48 | 0.04 | 0.48 | 0.29 | 0.41 | 0.29 | 0.01 |
| $A(0)$ | 0.04 | 0.92 | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.48 | 0.48 | 0.04 | 0.04 | 0.48 | 0.29 | 0.29 | 0.01 | 0.29 |
| $R(0)$ | 0.04 | 0.04 | 0.92 | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.48 | 0.48 | 0.48 | 0.04 | 0.01 | 0.29 | 0.29 | 0.29 |

仿真 3 考虑系统(2)在 $R^0 = 11.335\ 062\ 08$ 及表 4 所对应的系统参数值和表 5 所示的初始值条件下 $L(t), A(t), R(t)$ 随着时间的演化趋势, 如图 3 所示。

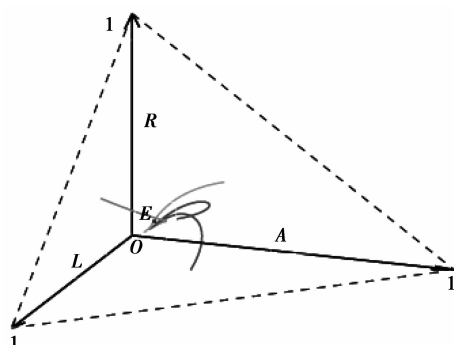
仿真 4 考虑系统(2)在 $R^0 = 97.736\ 625\ 51$ 及表 4 所对应的系统参数值和表 5 所示的初始值条件下 $L(t), A(t), R(t)$ 随着时间的演化趋势, 如图 4 所示。



(a) 初值为 $P_1^1 - P_4^1$ 的演化

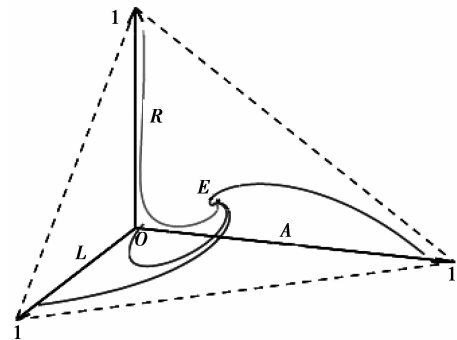


(b) 初值为 $P_1^2 - P_6^2$ 的演化

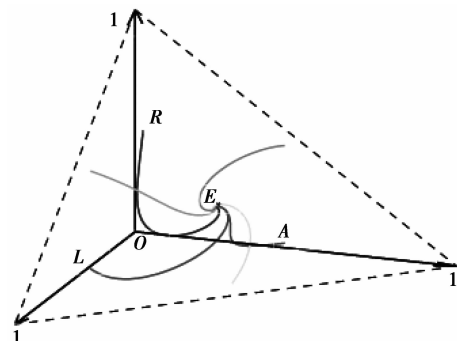


(c) 初值为 $P_1^3 - P_3^3$ 的演化

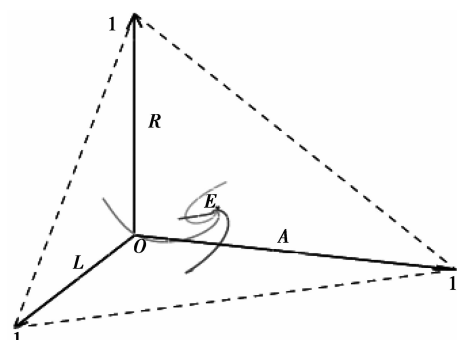
图 2 $R^0 = 1.133\ 506\ 208$ 时有毒平衡点的全局稳定性趋势



(a) 初值为 $P_1^1 - P_4^1$ 的演化



(b) 初值为 $P_1^2 - P_6^2$ 的演化



(c) 初值为 $P_1^3 - P_3^3$ 的演化

图 3 $R^0 = 11.335\ 062\ 08$ 时有毒平衡点的全局稳定性趋势

基于系统(2)的大量数值仿真实验, 提出有毒平衡点 E_* 的全局稳定性猜测:

猜测: 如果 $R^0 > 1$, 则有有毒平衡点 E_* 关于 Ω' 全局渐进稳定。

虽然有毒平衡点的全局稳定性是一个有趣的数学问题, 但是定理 2 和定理 3 表明: 为了阻止常驻病

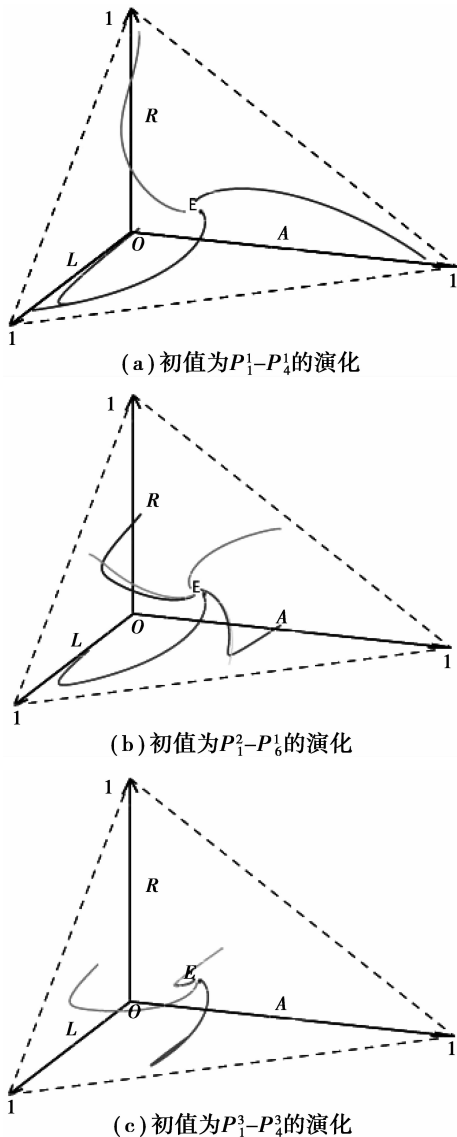


图 4 $R^0=97.736\ 625\ 51$ 时有毒平衡点的全局稳定性趋势

毒在 Internet 上扩散,并最终让常驻病毒趋于消失,应该采取必要的措施以控制系统参数使得 $R^0 \leq 1$ 。

5 讨论

主要作 R^0 关于系统参数 β_1, β_2, γ 和 μ 的敏感性分析,以便提出有效的阻止常驻病毒扩散的控制策略。仿照文献[22-23],对 R^0 的赋范前向敏感性指数分别计算如下

$$\frac{\partial R^0}{\partial \beta_1} = \frac{\beta_1}{R^0} \frac{1}{(\mu + \epsilon)} > 0,$$

$$\frac{\partial R^0}{\partial \beta_2} = \frac{\beta_2}{R^0} \frac{\epsilon}{(\mu + \epsilon)(\mu + \gamma)} > 0,$$

$$\frac{\partial R^0}{\partial \gamma} = \frac{\gamma}{R^0} \frac{\partial R^0}{\partial \gamma_1} = \frac{\gamma}{R^0} \frac{-\beta_2 \epsilon}{(\mu + \epsilon)(\mu + \gamma)} < 0,$$

$$\frac{\partial R^0}{\partial \mu} = \frac{\mu}{R^0} \frac{\partial R^0}{\partial \mu} = \frac{\mu}{R^0} \frac{-\beta_1(\mu + \gamma)^2 - \beta_2 \epsilon(2\mu + \epsilon + \gamma)}{(\mu + \gamma)^2(\mu + \epsilon)^2} < 0,$$

从以上计算结果得知: R^0 正比例与 β_1, β_2 , 因此, R^0 对 β_1, β_2 的改变最为敏感; R^0 与 γ 和 μ 成反比例关系,也就是说 γ, μ 的增加会导致 R^0 的降低。根据以上的敏感性分析,为了阻止常驻病毒的网络扩散可以采取如下措施:通过不断升级防火墙以及部署入侵检测系统等以更有效地阻止常驻病毒在计算机之间的扩展,即降低 β_1, β_2 值;及时更新杀毒软件并不定期进行杀毒检测以清除本机内的常驻病毒,即增加 γ 值;计算机应该按需接入 Internet,即增加 μ 值。

在实际应用中,这些策略应该考虑综合运用,以使 R^0 远远小于 1,从而使 Internet 上的常驻病毒逐渐趋于消失。

6 结论

深入分析计算机病毒的特点,结合计算机病毒网络传播的实际情况,深刻理解影响计算机病毒传播的因素,针对常驻病毒的特点,划分了两个新的计算机状态仓室,提出了更加符合计算机病毒特点的新型传播模型,运用稳定性相关理论研究了该模型的动力稳定性行为,研究表明所提模型的动力行为完全由基本再生率决定,通过对基本再生率进行系统参数敏感性分析,提出了有效阻止病毒网络传播的控制策略。

参考文献:

[1] Ashton K. That 'internet of things' thing[EB/OL]. [2011-12-12]. <http://www.rfidjournal.com/article/view/4986>.

[2] Cohen F B. A short course on computer viruses[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1994.

[3] Kephart J O, White S R, Chess D M. Computers and epidemiology [J]. IEEE Spectrum, 1993, 30(5): 20-26.

[4] Cohen F. Computer viruses; theory and experiments[J]. Computers & Security, 1987, 6(1): 22-35.

[5] Neumann J V. Theory of self-reproducing automata[M]. Urbana, IL: University of Illinois Press, 1966.

[6] Kephart J O, White S R. Directed-graph epidemiological models of computer viruses [C] //

- Proceedings of the 1991 IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy, May 20-22, 1991, Oakland, CA. Piscataway: IEEE Press, 1991: 343-359.
- [7] Kim J, Radhakrishnan S, Dhall S K. Measurement and analysis of worm propagation on internet network topology[C]// Proceedings of the 13th International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN 2004), October 11-13, 2004, Chicago, IL. Piscataway: IEEE Press, 2004: 495-500.
- [8] Han X, Tan Q L. Dynamical behavior of computer virus on internet [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(6): 2520-2526.
- [9] Mishra B K, Jha N. Fixed period of temporary immunity after run of anti-malicious software on computer nodes [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 190(2): 1207-1212.
- [10] Mishra B K, Pandey S K. Fuzzy epidemic model for the transmission of worms in computer network [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(5): 4335-4341.
- [11] Ren J G, Yang X F, Yang L X, et al. A delayed computer virus propagation model and its dynamics[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2012, 45(1): 74-79.
- [12] Ren J G, Yang X F, Zhu Q Y, et al. A novel computer virus model and its dynamics[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13(1): 376-384.
- [13] Mishra B K, Pandey S K. Dynamic model of worms with vertical transmission in computer network [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(21): 8438-8446.
- [14] Yuan H, Chen G Q. Network virus-epidemic model with the point-to-group information propagation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 206(1): 357-367.
- [15] Mishra B K, Saini D K. SEIRS epidemic model with delay for transmission of malicious objects in computer network [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188(2): 1476-1482.
- [16] Mishra B K, Pandey S K. Dynamic model of worms with vertical transmission in computer network [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(21): 8438-8446.
- [17] Mishra B K, Jha N. SEIQRS model for the transmission of malicious objects in computer network [J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(3): 710-715.
- [18] Mishra B K, Jha N. SEIQRS model for the transmission of malicious objects in computer network [J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(3): 710-715.
- [19] Wang F W, Zhang Y K, Wang C G, et al. Stability analysis of a SEIQV epidemic model for rapid spreading worms[J]. Computers & Security, 2010, 29(4): 410-418.
- [20] Brauer F, Driessche P V D, Wu J H. Mathematical epidemiology[M]. Germany: Springer Verlag, 2008.
- [21] Robinson R C. An introduction to dynamical systems: continuous and discrete[M]. NJ: Prentice Hall, 2004.
- [22] 李刚, 李川银, 苏剑擎. 计算机网络系统的安全集成[J]. 四川兵工学报, 2012, 33(2): 104-106.
LI Gang, LI Chuanyin, SU Jianqin. Security integration of computer network system[J]. Journal of Sichuan Ordnance, 2012, 33(2): 104-106.
- [23] Arriola L, Hyman J. Lecture notes, forward and adjoint sensitivity analysis: with applications in dynamical systems, linear algebra and optimisation[J]. Mathematical and Theoretical Biology Institute, Summer, 2005.

(编辑 侯 湘)