

文章编号:1000-582X(2013)01-035-08

离散齿谐波传动啮合力及接触应力分析

王素^a, 白鑫^a, 陈仕贤^b, 王春艳^a

(北京航空航天大学 a. 交通科学与工程学院; b. 机械学院, 北京 100191)

摘要:对离散齿谐波传动啮合副进行力学分析, 基于变形协调方程计算作用于离散齿上的力, 并根据赫兹方程求解啮合副处的接触应力。由离散齿谐波传动的周期性, 通过连续取波发生器的输入角值, 得到离散齿谐波传动啮合力和接触应力在刚轮齿廓、波发生器和离散齿体上的分布。对刚轮齿廓出现与未出现顶切现象, 得到啮合力和接触应力在接触面上的变化趋势, 以及传动中出现高啮合力和高接触应力的位置, 为进一步的强度校核和结构优化设计提供依据。

关键词:离散齿谐波传动; 啮合力; 接触应力; 重合度; 顶切现象

中图分类号:TH132.43

文献标志码:A

Research on analysis of force and contacting stress for the discrete teeth harmonic drives

WANG Su^a, BAI Xin^a, CHEN Shixian^b, WANG Chunyan^a

(a. School of Transportation Science and Engineering;

b. School of Mechanical Engineering, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Mechanical analysis for the discrete teeth harmonic drive gear pair is carried out. The force on discrete teeth is calculated based on the deformation coordination equation, and the contact stress of meshing pair is obtained by Hertz equation. According to transmission periodicity of the discrete gear harmonic wave and the input angle values of continuous sampling wave generator, the distribution of discrete teeth harmonic drive meshing force and contract stress in rigid tooth profile, tooth wave generator and discrete teeth is obtained. By studying the top cutting phenomena in rigid tooth profiles, the change trend of meshing force and contact stress on the contact surface is found, and positions for high meshing force and high contact stress in transmission are also found, in order to provide reference for further intensity and structure optimization design.

Key words: discrete teeth harmonic drive; meshing force; contact stress; coincidence degree; top cutting phenomenon

收稿日期:2012-08-20

基金项目:航空科学基金资助项目(2010ZE51053);重庆大学机械传动国家重点实验室开发基金(SKLM-T-KFKT-201009)

作者简介:王素(1963-),男,北京航空航天大学教授,博士生导师,研究方向:计算机辅助设计与制造技术,
(E-mail)wangsusu2000@buaa.edu.cn。

谐波传动广泛应用于航空航天、数控机床和各种自动控制系统等领域。谐波传动由于采用了柔轮结构使其能够获得速比大和结构紧凑等一系列其他传动形式无法取代的优点,也正是因为柔轮特性使得谐波传动存在传动刚度差、近似啮合传动质量不理想及轴向尺寸略大等问题;同时由于柔轮材料强度的限制,谐波传动单级传动比下限在 80 左右,而传动比在 18 至 60 范围的减速需求量占 68%,因此降低单级传动比以及如何提高谐波传动性能方面的研究大多围绕柔轮进行,如改善齿廓曲线,提高啮合质量。

离散齿谐波传动是对谐波传动结构的改进和扩展:用离散齿轮代替柔轮,解决采用柔轮带来的刚度问题;刚轮曲线不是渐开线而是按等速共轭原理设计的离散齿包络线,并且啮合齿数多,解决了谐波传动精度问题;离散齿谐波传动比的范围可在 12 至 80 范围内,这是谐波传动不能达到的,以满足实际应用的需求。因此,对离散齿谐波传动的研究极具理论价值和前景^[1-3]。

1 离散齿谐波传动结构

离散齿谐波传动由离散齿轮、刚轮和波发生器 3 个基本构件组成,图 1 为离散齿谐波传动结构简图。

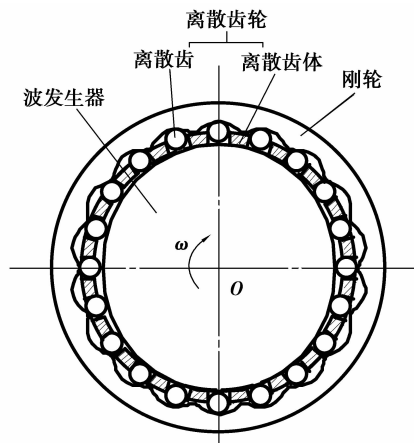


图 1 离散齿谐波传动结构简图

其中,波发生器与谐波传动相同,由一个双波或多波的凸轮外套—薄壁轴承组成,以椭圆凸轮最为常用;离散齿是由一个开有若干径向槽的圆环和置于槽中的一组中间可动件——离散齿组成,离散齿可以是球形、圆柱形或两侧做成平面的圆柱体,以圆柱形较好,齿槽则与离散齿相匹配;刚轮与谐波传动类似,为一刚性厚环,环内壁开有轮齿。刚轮齿廓曲线不是渐开线而是按等速共轭原理设计的离散齿

包络线,即选定离散齿形状后,在椭圆凸轮波发生器驱动下,用等速共轭原理计算出离散齿的包络线,即刚轮的齿廓曲线。运动传递是在波发生器的作用下,使离散齿运动,与刚轮、离散齿体互相作用实现传动。不同的输入输出构件、波发生器波数以及刚轮齿廓工作区间等,可以得到多种不同的离散齿传动方案,设计者根据使用需求进行选择。

2 离散齿啮合副受力分析与计算

离散齿谐波传动是过约束机构,受力复杂,在分析受力时需要考虑变形协调方程。以椭圆凸轮波发生器、圆柱形离散齿为例,对离散齿谐波传动进行受力分析,令波发生器作为输入构件,离散齿体作为输出构件,刚轮固定。椭圆凸轮波发生器中心对称,运动时,处于啮合状态的离散齿位于相对转动轴中心对称的两个区域内,且两啮合区内相应的离散齿受力等值反向。为了减少计算量,只计算其中一个啮合区内离散齿的受力^[4-5]。

图 2 为离散齿受力图。 xoy 为固定坐标系; $x'oy'$ 为波发生器的连体坐标系, x' 轴对应波发生器的短半轴, y' 轴对应波发生器的长半轴。假设波发生器的输入角 $j=0$ 为运动的起始位置,令与波发生器长半轴接触的离散齿标号为 0,顺时针依次递推,第 i 个离散齿中心与 y 轴的夹角为 h_i 。

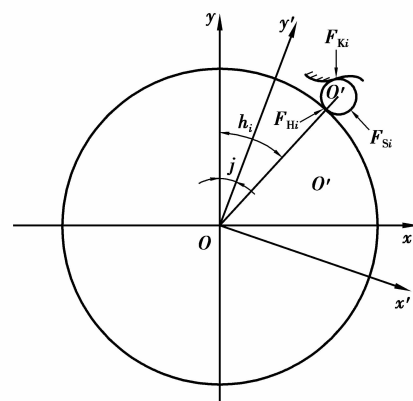


图 2 单个离散齿受力图

2.1 受力平衡方程

离散齿受波发生器、离散齿体和刚轮三方面的作用力。离散齿谐波传动的传动效率高;其共轭齿廓间的运动不是纯滑动的,而是滚动或者滚动带有滑动;啮合零部件的表面加工质量要求高,摩擦系数小。摩擦力对整个结构受力状态的影响很小,在计算时,忽略相互接触物体间的摩擦。略去物体本身

的重力以及物体运动所受的惯性力,离散齿的受力平衡方程为^[6-7]。

$$\begin{cases} F_{Hi} \cos \theta_{Hi} + F_{Ki} \cos \theta_{Ki} + F_{Si} \cos \theta_{Si} = 0, \\ F_{Hi} \sin \theta_{Hi} + F_{Ki} \sin \theta_{Ki} + F_{Si} \sin \theta_{Si} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中: F_{Hi} 、 F_{Ki} 、 F_{Si} 分别为波发生器、刚轮和离散齿体对离散齿的法向作用力; θ_{Hi} 、 θ_{Ki} 、 θ_{Si} (图 3)为 3 个作用力方向与 x 轴的夹角,是离散齿传动结构尺寸和运动位置的函数,可由几何参数计算。

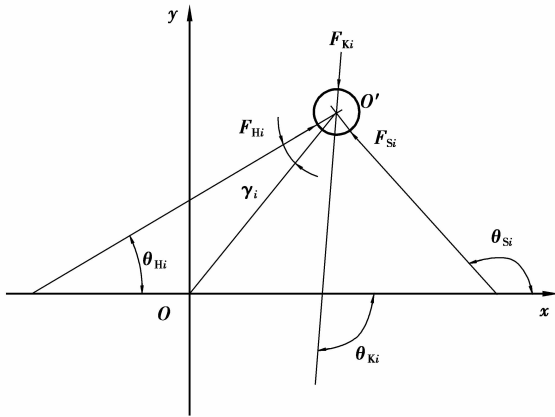


图 3 离散齿受力与作用角

设输入力矩为 M_0 , 每个啮合区内啮合齿数为 n 。由于 F_{Hi} 的反作用力 F'_{Hi} 对转动轴的力矩之和等于作用在波发生器上的输入力矩 M_0 , 两个啮合区域具有对称性, 则力矩平衡方程为

$$M_0 = 2 \sum_{i=1}^n F'_{Hi} |d_i| \sin \gamma_i. \quad (2)$$

式中 d_i 表示离散齿中心到旋转轴的距离。

2.2 变形协调方程

每个离散齿的 3 个啮合点处会产生接触变形, 3 个接触变形共同作用导致波发生器旋转一个很小的角度 $\Delta\phi_i$ 。在离散齿与波发生器的接触点, 由于 3 个接触变形量导致该点沿 F_{Hi} 方向的位移 ξ_{1i} 等于波发生器旋转一个微角度, 该点沿 F_{Hi} 方向的位移为

$$\xi_{1i} = \delta_{Hi} + \delta_{Ki} \cos(\pi + \theta_{Ki} - \theta_{Hi}) + \delta_{Si} \cos(\pi/2 - \gamma_i), \quad (3)$$

$$\xi_{2i} = \Delta\phi_i |d_i| \sin \gamma_i, \quad (4)$$

$$\xi_{3i} = \xi_{2i}, \quad (5)$$

式中: δ_{Hi} 、 δ_{Ki} 、 δ_{Si} 分别为离散齿与波发生器、刚轮和离散齿体的法向接触变形量; $i=1, 2, \dots, n$ 。图 4、5 分别为 ξ_{1i} 与 ξ_{2i} 的示意图。

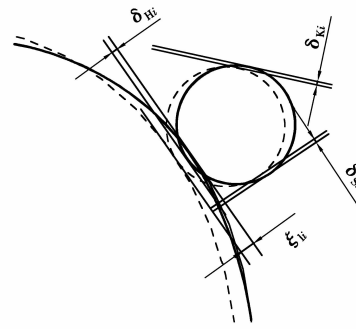


图 4 ξ_{1i} 的示意图

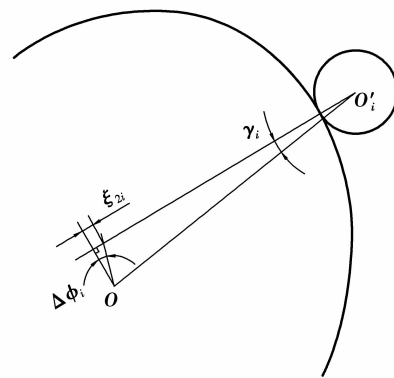


图 5 ξ_{2i} 的示意图

根据变形协调条件^[8], 在某瞬时, 处于啮合状态的各离散齿其接触变形导致波发生器旋转的微小角度是相同的 $\Delta\phi_i = \Delta\phi_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), 如图 6, 带入式(3)、(4)、(5)可得同一啮合瞬时处于啮合状态的相邻两个离散齿的变形协调关系。

$$\frac{|d_i| \sin \gamma_i}{|d_{i+1}| \sin \gamma_{i+1}} = \frac{\delta_{Hi} + \delta_{Ki} \cos(\pi + \theta_{Ki} - \theta_{Hi}) + \delta_{Si} \cos(\pi/2 - \gamma_i)}{\delta_{Hi+1} + \delta_{Ki+1} \cos(\pi + \theta_{Ki+1} - \theta_{Hi+1}) + \delta_{Si+1} \cos(\pi/2 - \gamma_{i+1})}, \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (6)$$

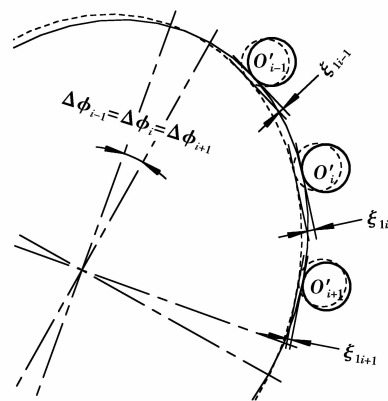


图 6 啮合离散齿间变形协调关系

2.3 作用力与接触变形的关系

由力与弹性变形关系知^[9-10],3处啮合副作用力与接触变形的关系为

$$\begin{cases} F_{Hi} = k_H \delta_{Hi}, \\ F_{Ki} = k_K \delta_{Ki}, \\ F_{Si} = k_S \delta_{Si}. \end{cases} \quad (7)$$

某一啮合瞬时,处于啮合状态的所有离散齿的受力可由式(7)求出,每个离散齿受三方面作用力,有 n 个齿啮合,共 $3n$ 个未知数。由受力平衡方程(1)可以确定 $2n$ 个方程;由力矩平衡方程(2)可确定一个方程;由变形协调方程(6)可确定 $n-1$ 个方程,共 $3n$ 个方程。未知数与方程数相等,可求出波发生器某输入角下处于啮合状态的所有离散齿受力。

3 啮合处接触应力的计算

计算离散齿与刚轮、波发生器和离散齿体的接触应力时,将3处啮合副看成轴线平行的两圆柱体接触。由赫兹公式可知

$$\sigma = \sqrt{\frac{F}{\pi L_1} \cdot \frac{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}}}, \quad (8)$$

式中: F 分别代表 F_{Hi} 、 F_{Ki} 、 F_{Si} 、 ρ_1 、 ρ_2 通过离散齿的结构参数计算。

4 作用力和接触应力分布

运用上述受力分析方法^[11-12],可以求出波发生器某输入角下处于啮合状态的所有离散齿受力。通过取大量的 j 值,即可得到作用力沿波发生器、离散齿体和刚轮的分布。

在椭圆凸轮波发生器离散齿传动过程中,单个离散齿从进入到退出啮合需要波发生器转过 $\pi/2$ (刚轮齿廓未发生顶切),由于在这个过程中不断会有其他离散齿进入退出啮合,每个离散齿的受力是所有处于啮合状态离散齿共同作用的结果,因此在这种情况下建立方程组求受力分布很繁琐。现采用另外一种方法,即波发生器每转过 $2\pi/Z_K$ (Z_K 是刚轮齿数),齿顶处有一个离散齿进入啮合,齿根处另一个离散齿退出啮合,将这个过程每个处于啮合状态的离散齿作为单个离散齿进入退出啮合过程的一部分进行组合,进而使之能够表达单个离散齿从进入到退出啮合作用力在接触面上的分布。

如图7所示,实线表示周期起始时各离散齿的位置,虚线表示波发生器转过 $2\pi/Z_K$ 后各离散齿的位置。

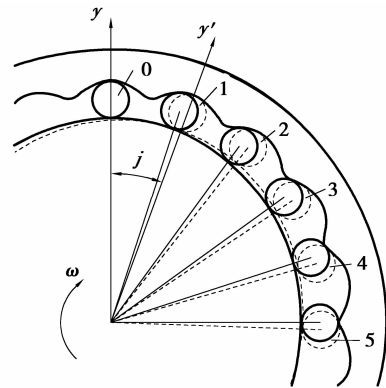


图7 波发生器转过 $2\pi/Z_K$ 前后各离散齿位置示意图

当波发生器转过 $2\pi/Z_K$,离散齿带动离散齿体旋转 $2\pi/(Z_K \times i_{HG}^K)$ (i_{HG}^K 为传动比)。由图7知,离散齿1转过 $2\pi/(Z_K \times i_{HG}^K)$ 即离散齿2周期起始时的位置,离散齿2转过 $2\pi/(Z_K \times i_{HG}^K)$ 即离散齿3周期起始的位置,以此类推。处于啮合状态的每个离散齿都可以表示单个离散齿从进入到退出啮合过程中的一部分,组合到一起即为单个离散齿由进入到退出啮合的过程。如图(8)、(9)、(10)所示,图上的数字1、2、3、4、5表示波发生器旋转 $2\pi/Z_K$ 相应标号的离散齿在各自刚轮、波发生器和离散齿体的运动路径,以5、4、3、2、1的顺序进行组合为一个离散齿由进入到退出啮合的运动路径。在此基础上将输入角 $2\pi/Z_K$ 进行等分 N ,计算处于啮合状态的 n 个离散齿在这 $N+1$ 个输入点的受力,将这 n 段受力值进行叠加即可。

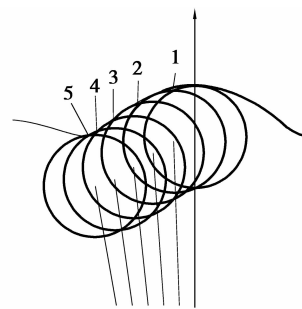


图8 各离散齿的运动路径在刚轮上的叠加

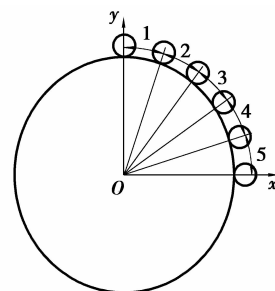


图9 各离散齿运动路径在波发生器上的叠加

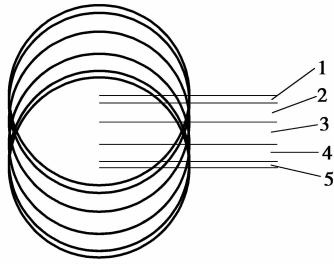


图 10 各离散齿的运动路径在离散齿体上的叠加

5 实例与分析

5.1 刚轮齿廓未发生顶切的受力分析

已知一离散齿谐波传动机构,运动由波发生器输入,离散齿体输出,刚轮固定。传动主要结构参数为波发生器长半轴和短半轴分别为 $a=58\text{ mm}$ 、 $b=56\text{ mm}$,离散齿半径 $r=5\text{ mm}$,离散齿宽度 $L_1=15\text{ mm}$,离散齿齿数 $Z_G=28$,刚轮齿数 $Z_K=26$;假设弹性模量 $E=210\text{ GPa}$,泊松比 $\mu=0.3$;输入力矩 $M_0=20\text{ N}\cdot\text{m}$ 。此时,刚轮齿廓未发生顶切,传动重合度为 $Z_G/2$,离散齿啮合数量保持不变。取波发生器旋转 $j=2\pi/Z_K$ 过程中的 50 个等距点进行计算,得到 50×7 组 F_{Hi} 、 F_{Ki} 、 F_{Si} 和 σ_{Hi} 、 σ_{Ki} 、 σ_{Si} 值,并使之与其啮合位置对应,计算结果如图 11~18 所示。 φ_K 表示离散齿和刚轮的啮合点与刚轮齿顶相对于旋转轴的夹角; φ_H 表示离散齿和波发生器的啮合点与波发生器短半轴相对于旋转轴的夹角。

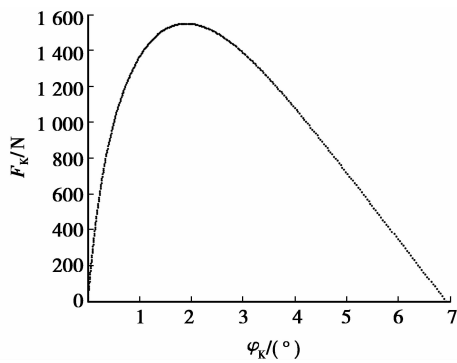


图 11 F_k 在刚轮齿廓上的分布

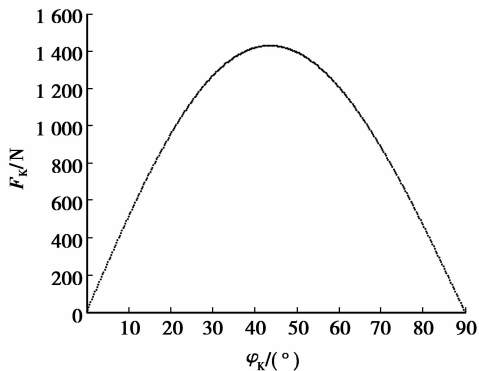


图 12 F_H 在波发生器上的分布

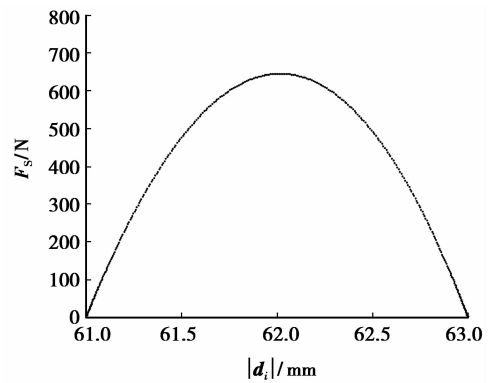


图 13 F_s 在离散齿体上的分布

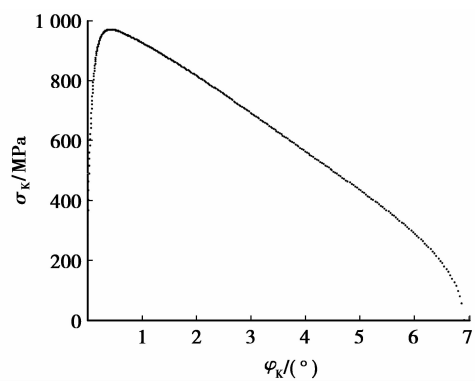


图 14 σ_k 在刚轮齿廓上的分布

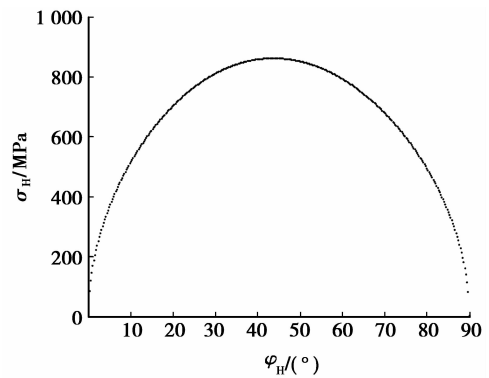


图 15 σ_H 在波发生器上的分布

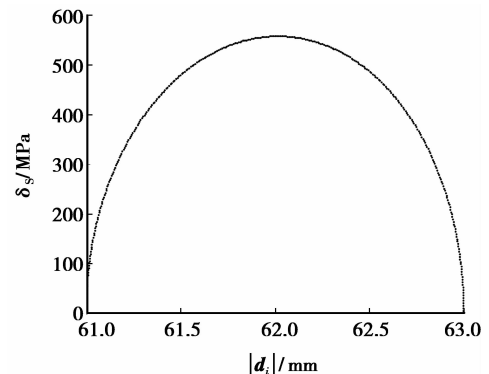


图 16 σ_s 在离散齿体上的分布

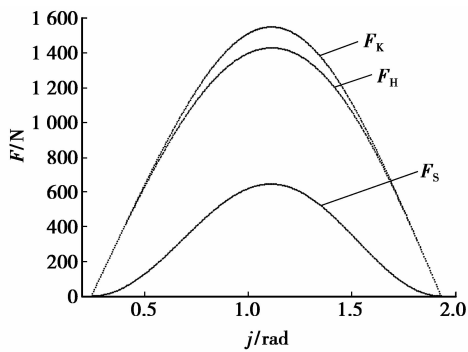


图 17 3 个作用力随波发生器转角的变化

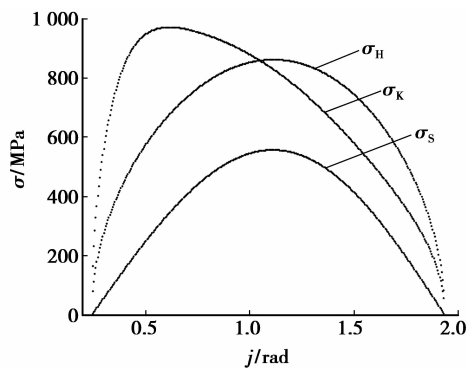


图 18 3 个接触应力随波发生器转角的变化

图 11~16 为作用力与接触应力在各接触面的分布;图 17 和 18 为作用力与接触应力随波发生器转角的变化。可知离散齿从进入到退出啮合,受波发生器、刚轮和离散齿体的作用力以及接触应力表现出从零开始由小变大再变小至零的变化趋势,使传动过程平稳。在刚轮靠近齿顶的部分呈现出接触应力高,承载能力差的特点,对此可以进行齿廓修形改善受力分布,提高承载能力。

5.2 刚轮齿廓发生顶切的受力分析

离散齿运动由波发生器输入,离散齿体输出,刚轮固定。传动主要结构参数:波发生器长半轴和短半轴分别为 $a=50.7\text{ mm}$ 、 $b=49.3\text{ mm}$,离散齿半径 $r=1.5\text{ mm}$,离散齿宽度 $L_1=15\text{ mm}$,离散齿理论齿数 $Z_G=80$,做抽齿处理后实际齿数 $Z'_G=40$,刚轮齿数 $Z_k=78$;弹性模量 $E=210\text{ GPa}$,泊松比 $\mu=0.3$;输入力矩为 $M_0=3\text{ N}\cdot\text{m}$ 。

上述结构参数下,刚轮齿廓发生顶切,如图 19(b),因此在分析离散齿传动受力时,需计算传动重合度,将传动过程按参与啮合的离散齿数量分别计算,再进行整合,即可得到整个过程的啮合力变化情况。

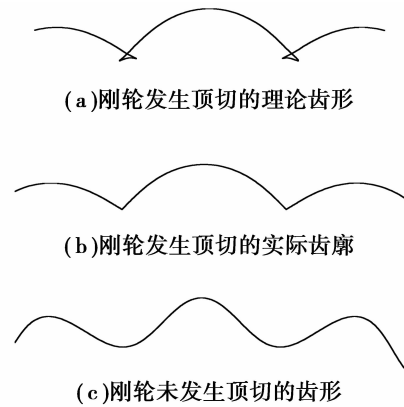


图 19 刚轮齿廓发生与未发生顶切形状

根据重合度的计算^[17]得到上述参数下重合度 $\epsilon=7.5732$ 。对于双波波发生器,同时啮合的离散齿齿数必为偶数,且相对于旋转轴中心对称,因此本例中处于啮合状态的离散齿齿数为 6 或 8;以 $j=0$ 作为运动的起始位置,以 $2\pi/Z_k$ 为周期,运动开始为 6 齿啮合,当波发生器旋转到一定角度,变为 8 齿啮合。由于啮合区域具有对称性,只需计算其中一个啮合区域(3 齿与 4 齿的啮合)。计算同样取 50 个点,计算结果见图 20~25。

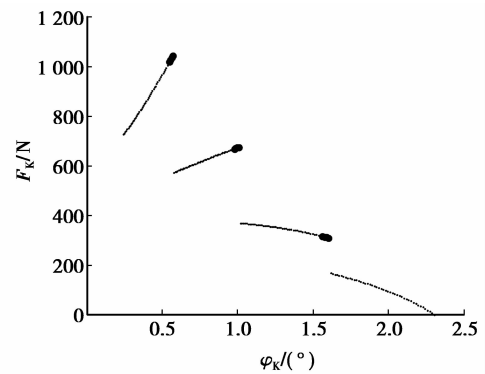


图 20 F_k 在刚轮齿廓上的分布
(刚轮齿廓发生顶切)

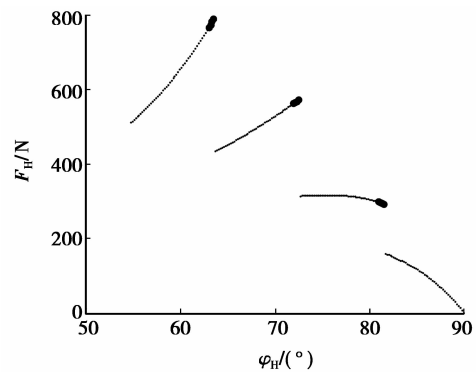


图 21 F_H 在波发生器上的分布
(刚轮齿廓发生顶切)

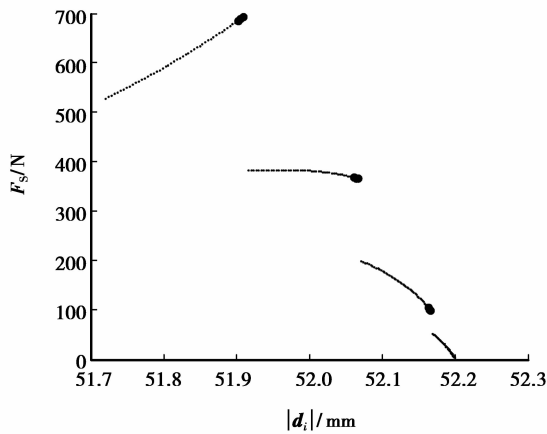


图 22 F_s 在离散齿体上的分布
(刚轮齿廓发生顶切)

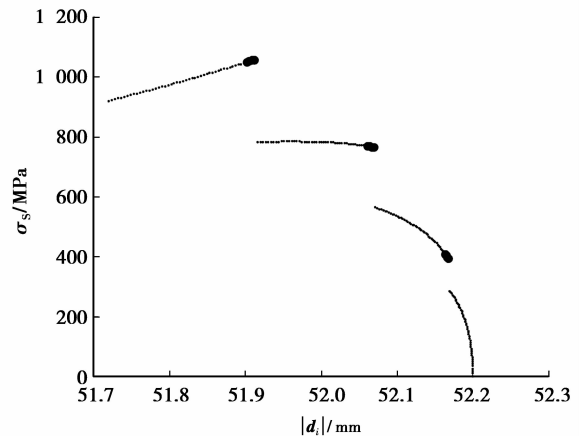


图 25 σ_s 在离散齿体上的分布
(刚轮齿廓发生顶切)

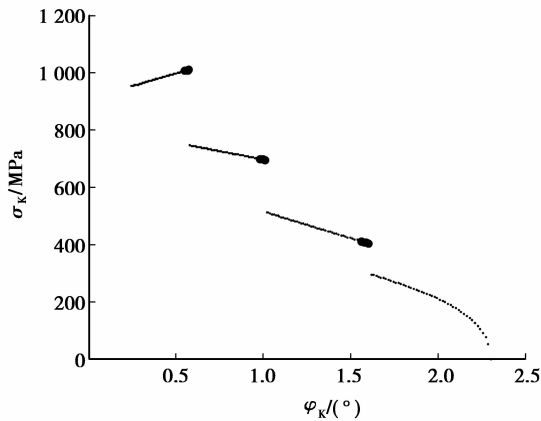


图 23 σ_k 在刚轮齿廓上的分布
(刚轮齿廓发生顶切)

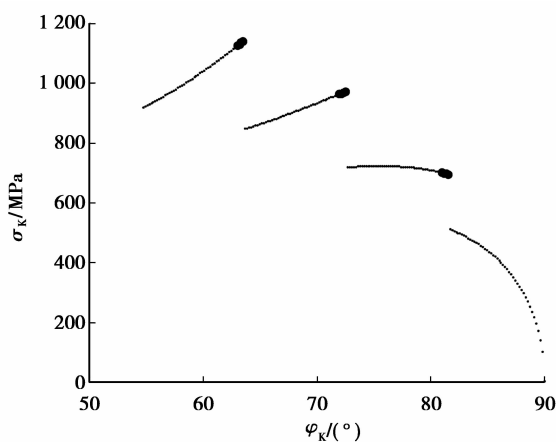


图 24 σ_H 在波发生器上的分布
(刚轮齿廓发生顶切)

图 20~25 即为离散齿从齿顶进入啮合到齿根退出啮合过程的受力计算结果,假设此离散齿用 A 表示。当离散齿 A 刚进入啮合在齿顶附近,传动为 4 齿啮合,离散齿 A 的受力为图 20~25 中第 1 段细点部分,其受力不是从零开始,而是相对较大的一个值。随着波发生器的转动,另一处在啮合状态并在齿根附近的离散齿 D 退出啮合,其受力是逐渐减小到零至退出的,因此其他离散齿的受力状态不会突变,离散齿 A 的受力如图 20~25 第 1 段粗点到细点的过程,此时为 3 齿啮合。波发生器继续转动,在某一时刻,齿顶处会有新的离散齿 E 参加啮合,离散齿 E 所受作用力不是从零开始,因此其他 3 个离散齿的受力会发生突变,离散齿 A 的受力如图 20~25 第 1 段粗点到第 2 段细点的过程,此时为 4 齿啮合。随着波发生器继续转动,在齿根处会有离散齿退出啮合,齿顶处会有离散齿进入啮合,如此循环下去,直到离散齿 A 运动到齿根退出啮合,其受力及接触应力可由图 20~25 表述。

由结果可以看出,由于刚轮齿廓发生顶切,导致同时啮合齿数减少,使得每个离散齿的负担增加;刚进入啮合的离散齿受力情况恶劣,接触应力高;当齿顶处的离散齿进入啮合时,每个离散齿的受力发生变化,导致传动不平稳。因此在结构设计时,可以通过齿廓修形乃至对波发生器轮廓进行修整,依据包络与反包络原理,使机构的重合度增大,提高传动的承载能力和平稳性。

6 结 论

1)建立了离散齿谐波传动啮合副受力分析模型以及接触应力算法,并给出了啮合力和接触应力在接触面分布的计算与分析方法。

2)对于刚轮齿形未发生顶切的离散齿传动结构,离散齿由进入到退出啮合的过程受力状态呈平稳变化趋势;刚轮靠近齿顶部位出现接触应力高,承载能力差的特点。

3)对于刚轮齿形发生顶切的离散齿传动结构,在传动过程中,离散齿的受力状态会发生突变,影响传动的平稳性;相对于未发生顶切的情况,单个离散齿受力较大,影响传动的承载能力;在离散齿刚进入啮合的一段时间内,离散齿受力较大,接触应力高。

参考文献:

- [1] 毛彬彬,王克武. 谐波齿轮的齿形研究和发展概述[J]. 煤矿机械,2008,29(7):6-8.
MAO Binbin, WANG Kewu. Research and development outlined of tooth profile of harmonic gear[J]. Coal Mine Machinery,2008,29(7):6-8.
- [2] 陈仕贤. 离散齿谐波传动:中国,200810172261.6[P]. 2008-11-04.
- [3] Jiang S P, Zhang D X, Lin J B, et al. Application of harmonic drive gear in the ocean wave twin-floater generator [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2004,17(Sup):107-109.
- [4] Kayabasi O, Erzincanli F. Shape optimization of tooth profile of a flexspline for a harmonic drive by finite element modelling [J]. Materials & Design, 2007, 28(2):441-447.
- [5] Li Z, Melek W W, Clark C. Decentralized robust control of robot manipulators with harmonic drive transmission and application to modular and reconfigurable serial arms[J]. Robotica,2009,27(2):291-302.
- [6] Ostapski W. Analysis of the stress state in the harmonic drive generator-flexspline system in relation to selected structural parameters and manufacturing deviations [J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 2010, 58(4):683-698.
- [7] Dhaouadi R, Ghorbel F H. Modelling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gears [J]. International Journal of Modelling and Simulation, 2008, 28(3):329-336.
- [8] Sensinger J W, Weir R F. Improved torque fidelity in harmonic drive sensors through the union of two existing strategies [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2006, 11(4):457-461.
- [9] 李剑锋,董新蕊. 凸轮激波滚动活齿传动啮合力分析方法[J]. 机械工程学报,2008,44(5):39-44.
LI Jianfeng, DONG Xinrui. Method of meshing force analysis for the movable rolling teeth transmission with cam actuating [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(5):39-44.
- [10] Dong H M, Wang D L, Ting K L. Elastic kinematic and geometric model of harmonic gear drives [C] // Proceedings of the ASME 2008 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, August 3-6, 2008, Brooklyn, New York, USA. New York: ASME, 2008, 2:717-725.
- [11] Kayabasi O, Erzincanli F. Shape optimization of tooth profile of a flexspline for a harmonic drive by finite element modeling [J]. Materials & Design, 2007, 28(2):441-447.
- [12] Dhouib S, Hbaieb R, Chaari F, et al. Free vibration characteristics of compound planetary gear train sets [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, 2008, 228(8):1389-1401.

(编辑 张 苹)