

doi:10.11835/j.jssn.1000-582X.2013.08.017

# 角铺设复合材料层合板的后屈曲和模态跃迁

钟轶峰<sup>1</sup>, 陈磊<sup>1</sup>, 余文斌<sup>2</sup>, 张亮亮<sup>1</sup>

(1. 重庆大学 a. 土木工程学院; b. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045;  
2. Department of mechanics and aerospace engineering, Utah state University, U. S.)

**摘要:** 为研究双轴受压反对称角铺设复合材料层压板的后屈曲和模态跳迁性能, 由渐近修正几何非线性理论推导其双耦合四阶控制偏微分方程(即协调方程和动态控制方程); 通过采用广义 Galerkin 方法将层合板的耦合非线性控制偏微分方程转换为系列非线性常微分方程组; 然后, 采用解的延拓方法软件对层合板的后屈曲行为进行分析, 确定面内直边边界下层合板出现屈曲模态跃迁的路径和临界载荷。通过对四层简支复合层合板算例计算表明: 该方法数值结果与有限元分析(FEA)相比, 在主后屈曲区域有很好的吻合性; 而当解接近第 2 分岔点时, 有限元分析失去收敛性, 而所提分析方法仍具有深入探索二次分岔后屈曲区域和准确捕捉模态跃迁现象的能力。

**关键词:** 复合材料力学; 层合板; 后屈曲; 模态跃迁

中图分类号: TB332

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2013)08-111-07

## Post-buckling and mode jumping analysis of angle-ply composite laminates

ZHONG Yifeng<sup>1</sup>, CHEN Lei<sup>1</sup>, YU Wenbin<sup>2</sup>, ZHANG Liangliang<sup>1</sup>

(1 a. School of Civil Engineering; b. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, China;  
2. Department of Mechanics and Aerospace Engineering, Utah State University, U. S.)

**Abstract:** The governing partial differential equations (PDEs) are deduced from the asymptotically correct, geometrically nonlinear theory to research the buckling and mode jumping behavior of biaxially antisymmetric angle-ply composite laminates. The PDEs are transformed into a system of nonlinear ordinary differential equations (ODEs) by using the generalized Galerkin method. Then, the post-buckling behavior is analyzed by using the solution extension software. At last, the paths of buckling mode jumping and critical loads for the composite laminates under the in-plane boundary condition of straight edge are determined. An example of 4-layer composite laminates shows that the numerical results in the primary post-buckling region from the present method agree with the finite element analysis (FEA); while the FEA may lose its convergence when solution comes close to the secondary bifurcation point, the analytic method has the capability to explore deeply into the post-secondary buckling realm and capture the mode jumping phenomenon.

**Key words:** mechanics of composite materials; laminates; post-buckling; mode jumping

收稿日期: 2013-02-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11272363; 51279218; 51078371); 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJZR12200062); 中国博士后科学基金资助项目(2011M501386); 岩土与结构工程安全湖北省重点实验室开放研究基金资助项目(HBKLCIV201206)

作者简介: 钟轶峰(1975-), 男, 重庆大学副教授, 博士, 从事复合材料力学、多尺度建模研究,  
(E-mail) zhongjy58@sina.com。

复合材料层合板受面内压缩荷载作用发生屈曲后,由于有边界约束作用,仍具有很大的承载能力,充分利用这个特点对提高抗屈曲破坏能力、改进结构设计具有重要的经济效益和现实意义。受 Stein<sup>[1]</sup>在均匀受压多层铝板试验中第一次观察到屈曲模态突然动态变化的启发,许多学者一直致力于研究各向同性板/壳二次稳定性和模式跳跃现象。Stoll<sup>[2]</sup>将精选的振型分析结果与 Stein 的实验数据进行了对比分析,但未对该方法的限制条件进行充分研究;Overall<sup>[3-4]</sup>将特定长宽比得到的结果扩展到一定长度范围的板中,并使用参数空间研究了板在特定边界条件下的屈曲模态跃迁;Nachiketa<sup>[5]</sup>采用远离主后屈曲平衡的猜测解作为计算跃迁分支的出发点,解收敛后再采用标准路径跟踪法找到跃迁路径;Riks<sup>[6]</sup>使用准静态路径跟踪方法追踪稳定主屈曲分支直至第 2 分岔点,并用阶跃瞬态响应分析找到远程跃迁路径,但当荷载与板变形耦合时可能会产生伪收敛问题;Chen<sup>[7]</sup>用渐近有限元法和准静态法分析了局部后屈曲性能和模态跃迁的全局性能;Jensen<sup>[8]</sup>和 Orifici<sup>[9]</sup>研究了复合结构在试验中出现的模态跃迁;陈伟等<sup>[10]</sup>基于 ABAQUS 软件分析平台,采用非线性有限元法研究了横向荷载作用下复合材料双曲率壳的屈曲和后屈曲行为。但在相应的数值对比研究中,仅文献[5]中的数值方法能成功预测模态跃迁现象。最近德国航空航天中心(DLR)对由 4 片叶片加劲的弧形复合面板后屈曲区域进行加载试验,试验中发现在第 3 分岔点出现模态跃迁;与此相反,各种商业有限元软件即使是进行全模态模拟也未能预测到这种明显的现象,这表明数值分析的困难仍来自于深入后屈曲区域荷载产生的巨大几何非线性和缺乏有效的分支转换算法。

文中采用严谨的数学方法——变分渐近法<sup>[11]</sup>、渐近修正几何非线性理论和广义 Galerkin 方法求解反对称角铺设层合板在面内直边边界条件下的后屈曲解析解,构建相对简单、便于实际应用的层合板后屈曲响应和模态跃迁分析计算方法,以解决复合材料层合板各向异性、非线性带来结构复杂性的关键技术问题,为今后复合材料层合板进一步研究与应用提供新的思路和理论依据。

## 1 渐近修正几何非线性理论

三维板动态分析的 Hamilton 扩展原理可写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_v [\delta(K - U) + \delta\bar{W}] dv dt = \delta\bar{A}, \quad (1)$$

式中: $\delta$ 为变分符号; $v$ 是未变形体积; $t_1, t_2$ 是任意

两固定时刻; $K, U$ 分别为动能和应变能密度; $\delta\bar{W}$ 为载荷虚功; $\delta\bar{A}$ 为边界虚拟作用;最后 2 项上的横线表示不需对泛函变分。为绕开繁琐的三维公式计算,基于变分渐近法利用如下 2 个板结构固有小参数对变分量进行渐近扩展以达到降维目的。

$$h/b \ll 1, \quad h/ct_c \ll 1, \quad (2)$$

式中: $h, b$ 分别表示板的厚度和长度; $t_c$ 为位移随时间变化的特征尺度; $c$ 为板平面内的最小波速。第 1 个小参数表征板的几何特性,第 2 个小参数表征只考虑低频振动。

取板中面为参考面,由三维板渐近降维为二维板的具体过程参见文献[12]。降维模型的 Hamilton 扩展原理可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [\delta(K_{2D} - U_{2D}) + \delta\bar{W}_{2D}] d\Omega dt = \delta\bar{A}_{2D}, \quad (3)$$

式中: $\Omega$ 表示参考面域; $\delta\bar{W}_{2D}, \delta\bar{A}_{2D}$ 分别表示二维板载荷虚功和边界虚拟作用; $K_{2D}, U_{2D}$ 表示二维板单位面积的动能和应变能,其值为

$$K_{2D} = (\mu \sum_{i=1}^3 \dot{U}_i^2) / 2, \quad (4)$$

$$U_{2D} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

式中: $\mu$ 为单位面积质量; $U_i$ 为参考面上沿  $x_i$  轴的位移(下标  $i$  代表 1、2、3;希腊字母下标  $\alpha, \beta$  代表 1、2,下同);位移上的点表示对时间导数; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ 分别为面内、耦合和弯曲刚度矩阵,其表达形式与古典层合理论相应矩阵一致,见文献[13]; $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22}]^T$ 为平面应变列阵; $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_{11} \quad 2\kappa_{12} \quad \kappa_{22}]^T$ 为初始曲率列阵。

由式(5)可定义板上力和力矩合力为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

式中: $\mathbf{N} = [N_{11} \quad N_{12} \quad N_{22}]^T$ 为每单位长度的平面力矢量列阵; $\mathbf{M} = [M_{11} \quad M_{12} \quad M_{22}]^T$ 为每单位长度的弯矩矢量。

沿板边界曲线  $\Gamma$  外法线方向的合力和合力矩定义为  $\hat{N}_{\nu\nu}, \hat{M}_{\nu\nu}$ ,沿切线方向的合力和合力矩定义为  $\hat{N}_{\tau\tau}, \hat{M}_{\tau\tau}$ ,沿参考面法向的合力定义为  $\hat{N}_{v3}$ 。体积力、表面力和边界虚拟作用所作的虚功可分别表示为

$$\delta\bar{W}_{2D} = \delta U_i f_i + \delta \bar{\psi}_\alpha m_\alpha, \quad (7)$$

$$\delta\bar{A}_{2D} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} (\hat{N}_{\nu\nu} \delta U_\nu + \hat{N}_{\tau\tau} \delta U_\tau + \hat{N}_{v3} \delta U_3 + \hat{M}_{\nu\nu} \delta \bar{\psi}_\nu + \hat{M}_{\tau\tau} \delta \bar{\psi}_\tau) d\Gamma dt = 0, \quad (8)$$

式中:沿  $x_i$  方向的力  $f_i$  和力矩  $m_a$  可由体积力和表面力计算得到; $\delta\bar{\psi}_a = -\delta U_{3,a}$  为虚拟旋转; $\delta U_v, \delta U_\tau, \delta\bar{\psi}_v, \delta\bar{\psi}_\tau$  可由  $U_a, \delta\bar{\psi}_a$  通过简单转换计算得到。

与各向同性板 von kámán 理论所做假设类似,可认为应变相对于旋转很小,板应变表达式为

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= U_{1,1} + \frac{1}{2}U_{3,1}^2, 2\epsilon_{12} = U_{1,2} + U_{2,1} + U_{3,1}U_{3,2}, \\ \epsilon_{22} &= U_{2,2} + \frac{1}{2}U_{3,2}^2, \kappa_{11} = -U_{3,11}, \\ \kappa_{12} &= -U_{3,12}, \kappa_{22} = -U_{3,22}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $(\ )_{,a} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_a}, (\ )_{,a\beta} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_a \partial x_\beta}$ ,下同;

借助这些表达式,可推导出式(3)的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,1} + f_1 &= \mu\ddot{U}_1 \\ N_{12,1} + N_{22,1} + f_1 &= \mu\ddot{U}_2 \\ M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + N_3 + f_3 + m_{1,1} + m_{2,2} &= \mu\ddot{U}_3 \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

式中:

$$N_3 = (N_{11}U_{3,1} + N_{12}U_{3,2})_1 + (N_{12}U_{3,1} + N_{22}U_{3,2})_2. \quad (11)$$

与边界条件相关的力和力矩可定义为

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_{vw} &= n_1^2 N_{11} + 2n_1 n_2 N_{12} + n_2^2 N_{22} \\ \hat{N}_{\tau\tau} &= n_1 n_2 (N_{22} - N_{11}) + (n_1^2 - n_2^2) N_{12} \\ \hat{N}_{\tau\tau} + \hat{M}_{\tau\tau,\tau} &= (N_{11}U_{3,1} + N_{12}U_{3,2} + M_{11,1} + M_{12,2})n_1 + \\ &\quad (N_{12}U_{3,1} + N_{22}U_{3,2} + M_{12,1} + M_{22,2})n_2 + \\ &\quad m_1 n_1 + m_2 n_2 + M_{\tau\tau,\tau} \\ \hat{M}_{vw} &= M_{vw} \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

式中: $n_1 = \cos \varphi, n_2 = \sin \varphi, \varphi$  为边界外法线与  $x_1$  轴的夹角;

$$\left. \begin{aligned} M_{vw} &= n_1^2 M_{11} + 2n_2 n_1 M_{12} + n_2^2 M_{22}, \\ M_{\tau\tau} &= n_1 n_2 (M_{22} - M_{11}) + (n_1^2 - n_2^2) M_{12} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

## 2 面内直边边界下后屈曲解析解

考虑图 1 所示双轴受压( $\hat{N}_{11}, \hat{N}_{22}$ )的四边简支反对称角铺设简支矩形层合板,长 $\times$ 宽 $=a \times b$ ,厚为  $h$ 。无面内分布载荷和弯矩, $f_1 = f_2 = m_1 = m_2 = 0$ 。

面内加速度  $\ddot{U}_1, \ddot{U}_2$  与  $\ddot{U}_3$  相比可忽略不计。限于篇幅,仅推导面内直边边界下的反对称角铺设层合板的后屈曲解析解。由推导过程可知,实际上提供了一种通用的后屈曲解析方法,可很容易地扩展到

其它面内/面外边界条件和任意铺层布置的层合板后屈曲分析中。

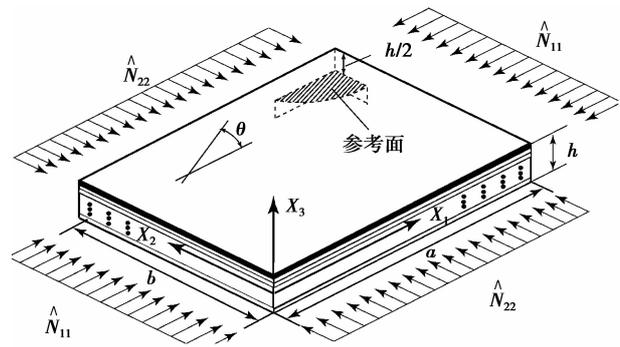


图 1 简支矩形层合板模型

### 2.1 控制偏微分方程

式(6)复合层合板本构方程的半逆式为

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{H}^* & \mathbf{D}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

式中: $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{H}^* = -\mathbf{B}^{*T}\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 。

引入 Airy 应力函数

$$N_{11} = F_{22}, N_{12} = -F_{12}, N_{22} = F_{11}. \quad (15)$$

由式(9)前 3 个方程可得到层合板 von kámán 协调方程为

$$\begin{aligned} A_{22}^* F_{1111} + (2A_{12}^* + A_{66}^*) F_{1122} + A_{11}^* F_{2222} - 2A_{16}^* F_{1222} - \\ 2A_{26}^* F_{1122} = U_{3,12}^2 - U_{3,11}U_{3,22} + B_{21}^* U_{3,1111} + \\ (B_{11}^* - 2B_{66}^* + B_{22}^*) U_{3,1122} + B_{12}^* U_{3,2222} + \\ (2B_{26}^* - B_{61}^*) U_{3,1112} + (2B_{16}^* - B_{62}^*) U_{3,1222}. \end{aligned} \quad (16)$$

根据所作假设, Airy 应力函数自动满足式(10)前 2 个运动方程。式(10)的最后一个方程可改写为

$$\begin{aligned} \mu\ddot{U}_3 + D_{11}^* U_{3,1111} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) U_{3,1122} + D_{22}^* U_{3,2222} + \\ 4D_{16}^* U_{3,1112} + 4D_{26}^* U_{3,1222} + B_{21}^* F_{1111} + \\ (B_{11}^* - 2B_{66}^* + B_{22}^*) F_{1122} + B_{12}^* F_{2222} + \\ (2B_{26}^* - B_{61}^*) F_{1112} + (2B_{16}^* - B_{62}^*) F_{1222} = \\ f_3 + F_{22}U_{3,11} - 2F_{12}U_{3,12} + F_{11}U_{3,22}. \end{aligned} \quad (17)$$

上述偏微分方程中因系数阶数大小的差异可能会在通过分岔点跟踪后屈曲路径时产生不收敛问题,可通过引入如下无量纲量以使方程系数缩放为同一阶数,同时保存各自的物理属性。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_a &= x_a/a, \tilde{U}_3 = U_3 / \sqrt{A_{22}^* D_{11}^*}, r = b/a, \tilde{F} = F/D_{11}^*, \\ \tilde{f}_3 &= a^4 f_3 / (D_{11}^* \sqrt{D_{11}^* A_{22}^*}), \\ \tilde{t} &= t \sqrt{D_{11}^* / a^4 \mu}, (\ )'' = \partial^2 (\ ) / \partial \tilde{t}^2, \\ \tilde{\mathbf{A}} &= (1/A_{22}^*) \mathbf{A}^*, \tilde{\mathbf{B}} = (1/\sqrt{A_{22}^* D_{11}^*}) \mathbf{B}^*, \end{aligned}$$

$$\tilde{D} = (1/D_{11}^*)D^*, \quad (18)$$

式中,  $r$  为板的长宽比。

式(16)协调方程和式(17)控制方程可由上述无量纲量表示为

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_{22}\tilde{F}_{\tilde{\Gamma}11} + (2\tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{66})\tilde{F}_{\tilde{\Gamma}22} + \tilde{A}_{11}\tilde{F}_{\tilde{2}22} - \\ & 2\tilde{A}_{26}\tilde{F}_{\tilde{\Gamma}12} - 2\tilde{A}_{16}\tilde{F}_{\tilde{2}22} = \tilde{U}_{3,\tilde{1}2}^2 - \tilde{U}_{3,\tilde{\Gamma}}\tilde{U}_{3,\tilde{2}2} + \\ & \tilde{B}_{21}\tilde{U}_{3,\tilde{\Gamma}11} + (\tilde{B}_{11} - 2\tilde{B}_{66} + \tilde{B}_{22})\tilde{U}_{3,\tilde{\Gamma}22} + \\ & \tilde{B}_{12}\tilde{U}_{3,\tilde{2}22} + (2\tilde{B}_{26} - \tilde{B}_{61})\tilde{U}_{3,\tilde{\Gamma}12} + (2\tilde{B}_{16} - \tilde{B}_{62})\tilde{U}_{3,\tilde{1}22}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{U}''_3 + \tilde{D}_{11}\tilde{U}_{3,\tilde{\Gamma}11} + 2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})\tilde{U}_{3,\tilde{\Gamma}22} + \\ & \tilde{D}_{22}\tilde{U}_{3,\tilde{2}22} + 4\tilde{D}_{16}\tilde{U}_{3,\tilde{\Gamma}12} + 4\tilde{D}_{26}\tilde{U}_{3,\tilde{1}22} + \\ & \tilde{B}_{21}\tilde{F}_{\tilde{\Gamma}11} + (\tilde{B}_{11} - 2\tilde{B}_{66} + \tilde{B}_{22})\tilde{F}_{\tilde{\Gamma}22} + \\ & \tilde{B}_{12}\tilde{F}_{\tilde{2}22} + (2\tilde{B}_{26} - \tilde{B}_{16})\tilde{F}_{\tilde{\Gamma}12} + (2\tilde{B}_{16} - \tilde{B}_{62})\tilde{F}_{\tilde{1}22} \\ & = f_3 + \tilde{F}_{\tilde{2}2}\tilde{U}_{3,\tilde{\Gamma}} - 2\tilde{F}_{\tilde{1}2}\tilde{U}_{3,\tilde{1}2} + \tilde{F}_{\tilde{\Gamma}}\tilde{U}_{3,\tilde{2}2}. \end{aligned} \quad (20)$$

## 2.2 边界条件

为便于描述,将沿板边界作用的面内力  $\hat{N}_{11}$ ,  $\hat{N}_{22}$  分为 2 部分:均布力  $\bar{N}_{11}$ ,  $\bar{N}_{22}$  和变化力  $F_{22}^p(x_1, x_2)$ ,  $F_{11}^p(x_1, x_2)$ , 即

$$\hat{N}_{11} = \bar{N}_{11} + F_{22}^p(x_1, x_2), \hat{N}_{22} = \bar{N}_{22} + F_{11}^p(x_1, x_2). \quad (21)$$

对具有单位长度和宽度  $r$  的面内直边界条件(端部收缩量为常数)可定义为

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 0, 1; U_3 = \hat{N}_{12} = \hat{M}_{11} = 0, U_1 = \text{constan } t \\ x_2 = 0, r; U_3 = \hat{N}_{12} = \hat{M}_{22} = 0, U_2 = \text{constan } t \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

## 2.3 转换为非线性常微分方程

至此,将非线性分析转化为边界条件式(22)下双耦合偏微分方程式(19)和(20)的求解问题。对于反对称角铺设层合板,考虑各铺层倾角相对于板参考面的反对称性,  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{D}$  中的一些元素始终为零,式(19)和(20)协调方程和控制方程可简化为(为便于表述,随后公式推导中除  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{D}$  外,其余无量纲量去掉其上的波浪号):

$$\begin{aligned} & A_{22}F_{1111} + (2A_{12} + A_{66})F_{1122} + A_{11}F_{2222} = \\ & U_{3,12}^2 - U_{3,11}U_{3,22} + (2B_{26} - B_{61})U_{3,1112} + \end{aligned}$$

$$(2B_{16} - B_{62})U_{3,1222}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{U}''_3 + \tilde{D}_{11}U_{3,1111} + 2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})U_{3,1122} + \\ & \tilde{D}_{22}U_{3,2222} + (2\tilde{B}_{26} - \tilde{B}_{16})F_{1112} + \\ & (2\tilde{B}_{16} - \tilde{B}_{62})F_{1222} = \\ & f_3 + F_{22}U_{3,11} - 2F_{12}U_{3,12} + F_{11}U_{3,22}. \end{aligned} \quad (24)$$

式中,面外挠度  $U_3$  可用双 Fourier 级数表示为

$$U_3 = \sum_{k,l} W_{kl} \sin(k\pi x_1) \sin(l\pi x_2/r), \quad (25)$$

式中:  $W_{kl}$  表示沿纵向和横向  $k, l$  个半波长的屈曲模态振幅;  $k, l$  为奇数时表示对称模态;  $k, l$  为偶数时表示反对称模态。

首先求解协调方程。参照式(21)的形式,可设式(23)的解由齐次解  $F^h(x_1, x_2)$  和特解  $F^p(x_1, x_2)$  组成

$$F(x_1, x_2) = F^h(x_1, x_2) + F^p(x_1, x_2), \quad (26)$$

式中:  $F^h(x_1, x_2) = -(\bar{N}_{11}x_2^2 + \bar{N}_{22}x_1^2)/2$ 。 (27)

将式(26)代入式(23),进行代数和微积分运算,可得到协调方程的特解为

$$\begin{aligned} F^p(x_1, x_2) = (r^2/4) \sum_{k,l,m,n} W_{kl} W_{mn} \mathbf{S}_{1x}^T \mathbf{C}_{klmn} \mathbf{S}_{1y} + \\ \sum_{k,l} W_{kl} c_{5kl} \cos(k\pi x_1) \cos(l\pi x_2/r), \end{aligned} \quad (28)$$

式中:矩阵  $\mathbf{S}_{1x}$ ,  $\mathbf{S}_{1y}$ ,  $\mathbf{C}_{klmn}$  和系数  $c_{5kl}$  与沿  $x_1, x_2$  方向  $k, l$  个半波长屈曲模态振幅有关。

其次,求解动态控制方程。通过如下加权函数  $\varphi_{pq}(x_1, x_2)$  形式的 Galerkin 程序可将式(24)转换为对振幅  $W_{kl}$  的系列非线性常微分方程

$$\varphi_{pq}(x_1, x_2) = \sin(p\pi x_1) \sin(q\pi x_2/r). \quad (29)$$

令

$$\begin{aligned} f_u = \tilde{D}_{11}U_{3,1111} + 2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})U_{3,1122} + \tilde{D}_{22}U_{3,2222}, \\ f_F = (2\tilde{B}_{26} - \tilde{B}_{61})F_{1112} + (2\tilde{B}_{16} - \tilde{B}_{62})F_{1222}, \\ f_{Fu} = F_{22}U_{3,11} - 2F_{12}U_{3,12} + F_{11}U_{3,22}. \end{aligned} \quad (30)$$

并定义任意两函数  $f(x_1, x_2)$ ,  $g(x_1, x_2)$  的内积为

$$\begin{aligned} [f(x_1, x_2), g(x_1, x_2)] = \\ \int_0^a \int_0^b f(x_1, x_2) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (31)$$

可将式(24)动态控制方程转化为

$$\begin{aligned} [U''_3, \varphi_{pq}] + [f_u, \varphi_{pq}] + [f_F, \varphi_{pq}] = \\ [f_3, \varphi_{pq}] + [f_{Fu}, \varphi_{pq}]. \end{aligned} \quad (32)$$

将式(25)~(28)中  $U_3, F$  的表达式代入上式,进行线性代数运算可将式(23)和式(24)双耦合偏微分方程转换为紧凑的、由相应屈曲模态振幅表示的系列非线性常微分方程

$$\begin{aligned}
 W''_{pq} + \left(\frac{\pi}{r}\right)^4 \{ & [\tilde{D}_{11}(pr)^4 + 2(\tilde{D}_{12} + \tilde{D}_{66})(rpq)^2 + \\
 & \tilde{D}_{22}q^4] \} - c_{5pq}rpq [ & (2\tilde{B}_{26} - \tilde{B}_{61})(pr)^2 + (2\tilde{B}_{16} - \\
 & \tilde{B}_{62})q^2] - (r/\pi)^2 [ & \bar{N}_{11}(pr)^2 + \bar{N}_{22}q^2] W_{pq} = \\
 (4/r)[f_3, \varphi_{pq}] + & (\pi^4/r^2) \sum_{k,l,m,n} W_{kl} W_{mn} V_{1x}^T (rL_1 + \\
 c_{5mn}G_1)V_{1y} + & (\pi^4/4) \sum_{i,j,k,l,m,n} W_{ij} W_{kl} W_{mn} V_{2x}^T EV_{2y},
 \end{aligned} \tag{33}$$

式中:矢量  $V_{1x}, V_{1y}, V_{2x}, V_{2y}$  和矩阵  $V_1, V_1, V_{11}, V_{12}, V$  的计算参见附录。

### 2.4 屈曲和后屈曲分析

对于无前屈曲变形的反对称角铺设层合板,单轴压缩( $\hat{N}_{22}=0$ )的线性屈曲荷载可通过去除式(33)的动态项和非线性项得到:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{11\sigma} = \frac{\pi^2}{p^2 r^4} \{ & [\tilde{D}_{11}(pr)^4 + 2(\tilde{D}_{12} + \\
 & \tilde{D}_{66})(pqr)^2 + \tilde{D}_{22}q^4] \} - c_{5pq} & (pqr) [(2\tilde{B}_{26} - \\
 & \tilde{B}_{61})(pr)^2 + (2\tilde{B}_{16} - \tilde{B}_{62})q^2].
 \end{aligned} \tag{34}$$

为分析后屈曲性能,将式(33)动力学方程的振幅方程写为矩阵形式

$$M\ddot{W} + K_w W = f(W, \bar{N}_{11}, \bar{N}_{22}), \tag{35}$$

式中:  $W$  包含假设屈曲模式的振幅;  $M, K_w$  表示相应的质量和刚度矩阵;  $f(W, \bar{N}_{11}, \bar{N}_{22})$  表示非线性项。

使用参数延续方法<sup>[15]</sup>通过数值计算得到式(35)非线性常微分方程式中的稳态解。很明显,无量纲对角质量矩阵  $M=I$  是正定的,平衡路径的动态稳定由刚度矩阵  $K_w$  的最小特征值决定,可通过刚度矩阵的正定性确定稳定平衡路径。在此,使用延续程序包—AUTO<sup>[15]</sup>跟踪平衡路径和记录分岔点。

## 3 算例

计算模型如图 2 所示,为反对称 4 铺层、单向均压矩形层合板结构,各层倾角值为  $[60^\circ/-60^\circ/60^\circ/-60^\circ]$ ; 四边简支,未承载边内自由;板厚为  $h=0.01\text{ m}$ ;长厚比  $b/h=50$ ,长宽比  $r=b/a=1.5$ 。材料为石墨/环氧复合材料,材料属性见表 1。有限元模型采用  $60 \times 40$  个 8 节点 ANSYS/SHELL99 壳单元进行模拟。

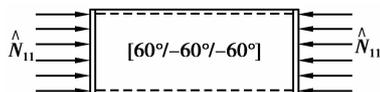


图 2 四边简支角铺设层合板(未承载边内自由)

表 1 石墨/环氧复合材料属性

Stiffness /GPa		$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\rho/$
$E_1$	$E_2=E_3$	$G_{12}=G_{13}$	$G_{23}$	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
137.9	9.0	7.20	6.21	0.3 0.49 1 450

### 3.1 线性屈曲分析

采用文中方法计算的板前三阶线性屈曲荷载列于表 2,并与 FEA 分析结果进行对比。由表 2 可看出,所述方法计算结果与 ANSYS 结果非常吻合,最大误差不超过 0.51%。

表 2 反对称角铺设层合板的线性屈曲荷载

屈曲荷载	文中方法	ANSYS 方法	屈曲	误差/%
$\tilde{N}_{11\sigma}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$\times 10^6$	$\times 10^6$	模态	
$\tilde{N}_{11\sigma 1}$	1.402 2	1.389 8	(2,1) <sup>a</sup>	0.51
$\tilde{N}_{11\sigma 2}$	1.519 0	1.499 3	(3,1)	0.19
$\tilde{N}_{11\sigma 3}$	1.845 8	1.812 9	(4,1)	0.34

注 a:  $(m, n)$  表示模态为  $A_{mn} \sin(m\pi x_1) \sin(n\pi x_2/r)$ 。

### 3.2 非线性屈曲分析

由文献[14]可知:各向同性板轴压下的屈曲模态跃迁由线性屈曲模态的子模态交互产生。首先分析层合板的线性屈曲,线性屈曲荷载随长宽比变化曲线如图 3 所示。线性屈曲荷载随长宽比的增加而增大,  $r=1.7$  处为复合屈曲点(最低两屈曲模态曲线相交),最低屈曲模态由模态(2,1)变为(3,1)。进一步研究发现  $r=1.7$  以下的最低 6 个屈曲模态为(2,1)、(3,1)、(4,1)、(5,1)和(6,1),表明后屈曲性能由沿  $x_1$  轴的若干半波和沿  $x_2$  轴的 1 个半波的模态交互所决定。

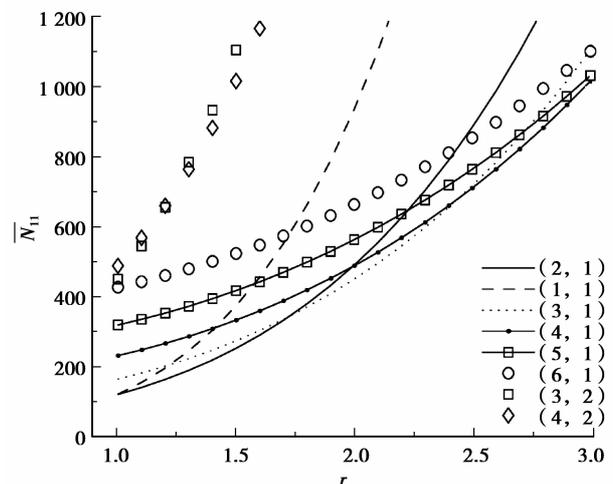


图 3 四边简支面内直边下角铺设层合板线性屈曲荷载

对由 27 个独立模态  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (1, 2, 3)$  构成的全模态进行非线性屈曲分析。板作用一无量纲竖向均布压力  $\tilde{f}_3 = 291.0194$  以模拟板中心最大挠度为  $0.02h$  的初始缺陷。

图 4 为利用文中方法得到的  $(x_1, x_2) = (0.75, 0.5r)$  点处稳态解分岔图和第 2 分岔点 A、B 及远程稳定路径上点 C 的静态变形图式。由图 4 可看出, 板的主屈曲荷载为  $N_{11b_1} = 1.003N_{11\sigma_1}$ , 与完善板的主屈曲荷载非常接近。以该点为起点产生 2 条稳定主后屈曲分支路径, 并平滑变化至第 2 分岔点 ( $N_{11b_2} = 2.795N_{11\sigma_1}$ ), 此时两主稳定后屈曲分支同时失去稳定, 板的屈曲模式产生急剧变化, 表明产生模态跃迁。

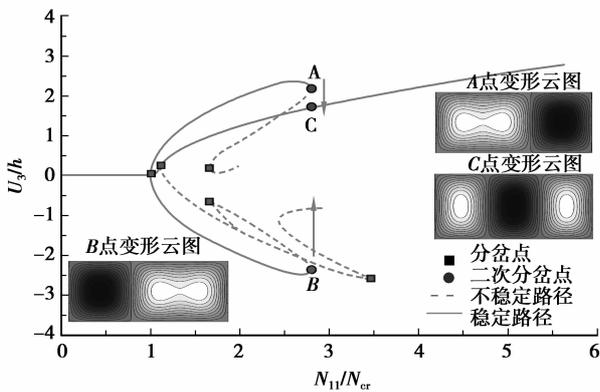


图 4 面内直边边界下非完善板分岔图和特征点的静态变形

正如线性分析所预期的那样, 沿两稳定主屈曲分支的屈曲模式为沿  $x_1$  方向的 2 个半波和沿  $x_2$  方向的 1 个半波。值得注意的是 A 点和 B 点静态变形图式翻转可看出屈曲变形模式隐含对称, 这意味着沿 2 个分支的刚度矩阵存在一些内在联系。模态跃迁表明沿  $x_1$  方向增加 1 个半波, 这与 Stein<sup>[1]</sup> 的试验观察和各向同性板单轴压缩数值模拟结果一致。由于模态跃迁前后屈曲模式相对  $x_1$  轴对称, 可仅通过相对  $x_1$  对称的模态  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (1, 3)$  甚至是  $(1, 2, 3, 4, 5, 6) \times (1)$  来定性捕捉模态跃迁。而当解接近第 2 分岔点时, 有限元分析失去收敛性, 无法预测二次分岔后屈曲模式和捕捉模态跃迁现象。

## 4 结 论

1) 通过采用广义 Galerkin 方法将层合板的耦合

非线性控制偏微分方程转换为系列非线性常微分方程组; 然后, 采用解的延拓方法软件对层合板的后屈曲行为进行分析, 确定面内直边边界下层合板出现屈曲模态跃迁的路径和临界载荷。该方法可进一步扩展到其它面内/面外边界条件和任意铺层布置的层合板后屈曲分析中。

2) 通过数值算例计算表明: 该方法与 FEA 在主后屈曲区域的数值计算结果有很好的吻合性。但当解趋近第 2 分岔点时, FEA 会失去收敛性, 文中提出的分析方法可深入研究二次分岔后屈曲区域, 并可仅通过相对  $x_1$  对称的模态准确捕捉模态跃迁现象和跃迁前后不同复杂程度的后屈曲模式。

## 参考文献:

- [1] Stein M. Loads and deformation of buckled rectangular plates[D]. Hampton, VA: NASA Langley Research Center, 1959.
- [2] Stoll F. Analysis of the snap phenomenon in buckled plates [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 1994, 29(2): 123-138.
- [3] Everall P R, Hunt G W. Arnold tongue predictions of secondary buckling in thin elastic plates[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1999, 47(10): 2187-2206.
- [4] Everall P R, Hunt G W. Mode jumping in the buckling of struts and plates; a comparative study [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2000, 35(6): 1067-1079.
- [5] Tiwari N, Hyer M W. Secondary buckling of compression-loaded composite plates [J]. AIAA Journal, 2002, 40(10): 2120-2126.
- [6] Riks E, Rankin C C, Brogan F A. On the solution of mode jumping phenomena in thin-walled shell structures [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 136(1/2): 59-92.
- [7] Chen H, Virgin L N. Dynamic analysis of modal shifting and mode jumping in thermally buckled plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 278(1/2): 233-256.
- [8] Jensen D W, Lagace P A. Influence of mechanical couplings on the buckling and post-buckling of anisotropic plates[J]. AIAA Journal, 1998, 26(10): 1269-1277.
- [9] Orifici A C, Thomson R S, Gunnion A J, et al.

Benchmark finite element simulations of postbuckling composite stiffened panels[C/OL]// Proceedings of the 11th Australian International Aerospace Congress, March 13-17, 2005, Melbourne, Australia. [2010-01-01]. <http://elib.dlr.de/50553/>.

- [10] 陈伟. 复合材料双曲率壳屈曲和后屈曲的非线性有限元研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2006.
- [11] New variational-asymptotic formulations for interlaminar stress analysis in laminated plates [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1986, 37 (3): 305-321.
- [12] 钟轶峰, 余文斌. 用变分渐近法进行复合材料层合板仿真及三维场重构[J]. 复合材料学报, 2010, 27(4): 174-179.  
ZHONG Yifeng, YU Wenbin. Simulation and 3D field recovery of composite laminated plates by use of variational asymptotic method [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2010, 27(4): 174-179.
- [13] 陈桂娟, 矫桂琼, 熊伟, 等. 用 Galerkin 方法分析具有初始缺陷层合板的非线性后屈曲[J]. 机械科学与技术, 2005, 24(12): 1400-1403.  
CHEN Guijuan, JIAO Guiqiong, XIONG Wei, et al. Analysis of nonlinear postbuckling behavior of composite laminated plates with imperfections using Galerkin's technique [J]. Mechanical Science and Technology, 2005, 24(12): 1400-1403.
- [14] Everall P R, Hunt G W. Mode jumping in the buckling of struts and plates: a comparative study [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2000, 35 (6): 1067-1079.
- [15] Doedel E H, Champneys A R, Fairgrieve T F. Auto

97: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations, AIAC/CR-1997-206420 [R]. Montreal, Canada: AIAC, 1997.

附录:  $V_{1x}, V_{2x}, V_{2y}, L_1, G_1, E_{11}, E_{12}, E$  的计算式

$$V_{1x} = \begin{cases} 1/2, & \text{if } p = k + m; \text{ else } 0 \\ \pm 1/2, & \text{if } p = \pm(k - m); \text{ else } 0 \end{cases},$$

$$V_{1y} = \begin{cases} 1/2, & \text{if } q = l + n; \text{ else } 0 \\ \pm 1/2, & \text{if } q = \pm(l - n); \text{ else } 0 \end{cases}$$

$$L_1 = (2\tilde{B}_{26} - \tilde{B}_{61})r^2 \begin{bmatrix} (k+m)^3(l+n)c_1 & (k+m)^3(l-n)c_2 \\ (k-m)^3(l+n)c_3 & (k-m)^3(l-n)c_4 \end{bmatrix} +$$

$$(2\tilde{B}_{16} - \tilde{B}_{62}) \begin{bmatrix} (k+m)(l+n)^3c_1 & (k+m)(l-n)^3c_2 \\ (k-m)(l+n)^3c_3 & (k-m)(l-n)^3c_4 \end{bmatrix}$$

$$V_{2x} = \begin{cases} 1/2, & \text{if } p = i + k + m; \text{ else } 0 \\ \pm 1/2, & \text{if } p = \pm(i + k - m); \text{ else } 0 \\ \pm 1/2, & \text{if } p = \pm(i - k - m); \text{ else } 0 \\ \pm 1/2, & \text{if } p = \pm(i - k + m); \text{ else } 0 \end{cases},$$

$$V_{2y} = \begin{cases} 1/2, & \text{if } q = j + l + n; \text{ else } 0 \\ \pm 1/2, & \text{if } q = \pm(j + l - n); \text{ else } 0 \\ \pm 1/2, & \text{if } q = \pm(j - l - n); \text{ else } 0 \\ \pm 1/2, & \text{if } q = \pm(j - l + n); \text{ else } 0 \end{cases}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} (kn - lm)^2 & (kn + lm)^2 \\ (kn + lm)^2 & (kn - lm)^2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{11} \end{bmatrix}, \text{ with}$$

$$E_{11} = \begin{bmatrix} [(k+m)j - (l+n)i]^2 c_1 & [(k+m)j - (l-n)i]^2 c_2 \\ [(k-m)j - (l+n)i]^2 c_3 & [(k-m)j - (l-n)i]^2 c_4 \end{bmatrix},$$

$$E_{12} = \begin{bmatrix} [(k+m)j + (l+n)i]^2 c_1 & [(k+m)j + (l-n)i]^2 c_2 \\ [(k-m)j + (l+n)i]^2 c_3 & [(k-m)j + (l-n)i]^2 c_4 \end{bmatrix}$$

(编辑 陈移峰)