

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2013.11.007

# 径向载荷作用下的管道塑性失效力学模型与实验分析

焦光伟,班贵振,瞿德刚,赵泽霖,周建庭

(后勤工程学院 军事供油工程系,重庆 401311)

**摘要:**针对野外埋地敷设的输油管道发生断裂、泄漏等较大破坏时,使用管道挤压截流装置,将管道快速压扁以阻断流油的问题,运用塑性变形理论和虚功原理,建立了一个受均匀径向载荷作用下的管道挤压变形模型,并且对管道塑性变形进行了分析计算,得到了管道挤压所需的载荷量。并使用 18 mm 宽度的刀口对  $\phi 325 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  的 X60 钢管进行挤压实验,得到了管道挤压的载荷-位移曲线。将得到的实验数据与理论数据进行对比和验证,理论数据与实验数据结果吻合。该模型可用于计算不同规格管道挤压所需的载荷量,为管道抢修工作提供理论和实践参考。

**关键词:**管道挤压;塑性变形;塑性功;挤压载荷

中图分类号:TE89

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2013)11-038-06

## Mechanical model and computational analysis of pipeline plastic failure under radial load

JIAO Guangwei, BAN Guizhen, QU Degang, ZHAO Zelin, ZHOU Jianting

(Department of Petroleum Supply Engineering, LEU, Chongqing 401311, China)

**Abstract:** When large damage, such as rupture and leakage, occurs in buried pipeline, a steel pipeline extrusion throttle device is applied to crush the pipeline and block the oil flow quickly in a short time. An extrusion model under uniformly distributed radial load is established based on the theory of plastic deformation and the principle of virtual work. The pipeline plastic deformation is analyzed and computed and the pipeline extruding load is obtained. The extrusion of X60 steel tube of 325 mm diameter and 6 mm thickness loaded by indenter of 18 mm width is examined. The load-deformation curve of pipeline extrusion is obtained. The results of the comparison between experimental data and theoretical data show that the model is in good agreement with the experiment. This model can be used to calculate the extruding load of pipelines of different sizes and provide the theoretical and practical reference for urgent repair of pipeline leakage.

**Key words:** pipeline extrusion; plastic deformation; plastic work; extruded load

中国输油管道距离长,穿跨越工程复杂,如果由于施工、自然灾害等发生断裂或泄漏等较大破坏,将会引发爆炸、中毒等严重事故。如不及时进行抢修,会给社会经济和自然环境带来严重的影响。为解决大型装备到达现场之前管道泄漏事故的应急抢修问题,部分学者提出了利用一种便携式组合装置,在短

时间内将输油管道局部压扁,有效起到截流和堵漏作用。此方法涉及到钢管塑性变形相关理论,国内外对钢管凹陷、断裂、塑性成形、冲击等方面的研究比较多<sup>[1-7]</sup>,在运用力学模型分析钢管塑性变形等方面研究甚少,钢管挤压过程中的载荷值的研究几乎是空白。后勤工程学院张忠等<sup>[8]</sup>通过有限元软件对

收稿日期:2013-06-30

基金项目:中国石油化工股份有限公司资助项目(XSXN-08-05-WT-0034)

作者简介:焦光伟(1963-),男,后勤工程学院教授,主要从事油气储运工程、应急保障技术与装备研究,(E-mail)ostla@163.com。

横向受压的薄壁圆管在冲击波作用下的弹塑性变形特征进行了数值模拟,发现了钢管的变形模式呈现三区特征。西北工业大学刘芷丽等<sup>[9]</sup>基于 ABAQUS 对圆管压扁-压弯连续变形的规律及截面畸变的影响因素进行了研究。太原理工大学的李珠等<sup>[10]</sup>对压力管道的耐撞性进行了实验模拟,为高压流体介质管网的安全设计提供了重要参数。Brooker<sup>[11]</sup>通过钢管挤压实验,对不同壁厚、管长、管径和屈服应力对挤压载荷位移曲线的影响进行了对比和分析;大庆石油学院艾池教授等<sup>[12]</sup>运用虚功原理建立了侧向载荷作用下的套管塑性破坏力学模型,计算出了局部侧向载荷;后勤工程学院王世炜<sup>[13]</sup>通过实验得到了管道挤压变形的部分规律和载荷-位移曲线;后勤工程学院张坤等<sup>[14]</sup>通过有限元对钢质管道挤压变形过程进行了数值模拟,得到了管道的塑性变形规律。笔者在前人研究的基础上,分析管道挤压变形的规律,简化边界条件和提出基本假设,运用相关的塑性变形理论,建立受均匀径向载荷作用下的管道挤压变形模型,探讨钢管挤压所需载荷值的计算方法,并通过实验与理论计算结果进行对比和验证,为管道抢修工作提供理论和实践参考。

## 1 挤压模型与计算原理

### 1.1 基本假设

野战埋地输油管线受到径向载荷作用而发生变形,其物理模型如图 1 所示。

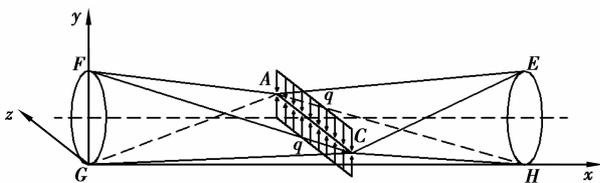


图 1 钢管塑性变形的力学模型

上下载荷对称,并且均匀分布。通过理论分析和实验验证, Jones 等<sup>[15]</sup>得出了在侧向载荷的作用下两端固定的圆柱壳发生塑性变形的平面呈菱形的结论,所以建立图 2 所示的变形机构,其中  $\overline{AC}$ 、 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 、 $\overline{CF}$ 、 $\overline{CE}$ 、 $\overline{AG}$ 、 $\overline{AH}$ 、 $\overline{CG}$ 、 $\overline{CH}$  均为塑性绞线,各方向的剖面图如图 3~5 所示。基本假设如下:

- 1) 材料的应力应变关系为理想的刚塑性模型;
- 2) 凹陷深度沿  $x$  轴方向呈线性连续变化;
- 3) 挤压塑性变形后截面的曲线部分为半圆弧状;
- 4) 管体材料不可压缩,即变形前后塑变区截面

周长相等;

- 5) 忽略管道沿轴线方向的弯曲变形。

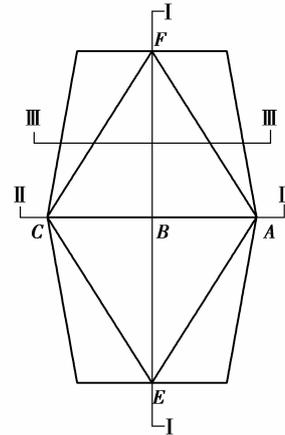


图 2 钢管塑性变形机构(-y)方向的投影

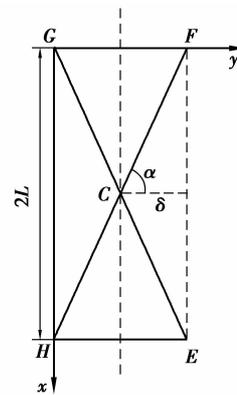


图 3 I-I 方向剖面图

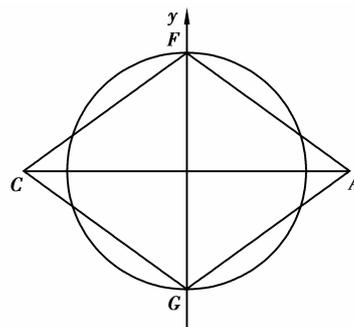


图 4 II-II 方向剖面图

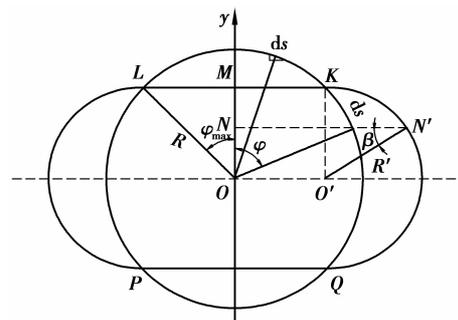


图 5 III-III 方向剖面图

## 1.2 基本方程

设钢管半径为  $R$ , 截面曲线圆弧的半径为  $R'$ , 塑变区铅直距离为  $2L$ , 凹陷深度为  $\delta$ , 凹陷角为  $\alpha$ , 截面曲线直线段与圆交于  $L, K, P$  和  $Q$  点, 线段  $\overline{OL}$  与  $y$  轴的夹角为  $\varphi_{\max}$ , 圆上任意一点到圆心  $O$  的线段与  $y$  轴的夹角为  $\varphi$ , 在圆弧段  $KQ$  上任取一点, 过该点做水平线一端交  $y$  轴于  $N$  点, 另一端交截面曲线的圆弧段于  $N'$  点, 则  $\overline{ON'}$  与  $\overline{NN'}$  的夹角为  $\beta$ 。上述参数已在图 3~5 中标定出来。由图中的几何关系, 可求得

$$\overline{AC} = \pi R, \quad (1)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{L}{\delta}\right), \quad (2)$$

$$R' = R \cos \varphi_{\max}, \quad (3)$$

$$\overline{ON} = R \cos \varphi, \quad (4)$$

$$\sin \beta = \frac{\overline{ON}}{R'} = \frac{R \cos \varphi}{R \cos \varphi_{\max}}. \quad (5)$$

## 1.3 计算原理

### 1.3.1 极限弯矩和极限轴力

由于管体材料的本构关系为理想刚塑性模型, 所以, 取单位长度的管道的极限弯矩和极限轴力为<sup>[16]</sup>

$$M_0 = \sigma_0 t^2 / 4, \quad (6)$$

$$N_0 = \sigma_0 t, \quad (7)$$

式中:  $N_0$  为极限轴力;  $M_0$  为极限弯矩;  $\sigma_0$  为材料的屈服应力;  $t$  为管道壁厚。

在达到  $M_s$  的截面所在的一小段内, 管道可以有很大的相对转角, 如同该处出现了一个“铰链”, 称它为“塑性铰”。Jones 经过实验和理论分析, 已经得出两端固定的薄壁圆筒在侧向载荷下发生塑性变形的区域成菱形, 其中  $\overline{AC}$ 、 $\overline{FC}$ 、 $\overline{CF}$ 、 $\overline{AF}$ 、 $\overline{EA}$  均为塑性绞线, 即塑性绞线上都为塑性铰。

### 1.3.2 内力所做的功

1) 塑变区由圆柱面变为平面所消耗的塑性功  $W_1$ 。

根据图 5, 塑变区由圆弧变为直线段  $\overline{LK}$  需要耗散塑性功, 由几何关系, 弧  $ds$  由圆弧变为直线所转动的角度为  $\varphi$ , 所以, 弧长  $ds$  上的耗散功为

$$dW_s = 2M_0 \varphi ds. \quad (8)$$

因此整段弧长  $KL$  上的耗散功为

$$W_s = 2 \int_0^s 2M_0 \varphi ds = 2 \int_0^{\varphi_{\max}} 2M_0 R \varphi d\varphi = 2M_0 R \varphi_{\max}^2. \quad (9)$$

由于凹陷深度沿  $x$  轴呈线性连续变化, 所以在三角塑变区内  $\varphi_{\max}$  由 0 到  $\pi/2$  是线性变化的, 即  $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2L}x$ 。所以, 根据式(9)可得到整个平面区的

耗散功为

$$W_1 = 4 \int_0^L 4M_0 R \frac{\pi^2}{4L^2} x dx = 2\pi^2 R M_0. \quad (10)$$

2) 塑变区由于表面曲率半径改变所消耗的塑性功  $W_2$ 。

根据图 5, 塑变区由圆弧变为半圆弧  $KN'Q$  需要耗散塑性功, 由几何关系, 圆弧  $ds$  转动的角度为

$$\delta\varphi = \beta - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \arcsin \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_{\max}} - \frac{\pi}{2} + \varphi. \quad (11)$$

所以, 弧长  $ds$  上的耗散功为

$$dW_s = M_0 \left(\arcsin \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_{\max}} - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) ds. \quad (12)$$

因此在整段弧长  $KQ$  上的耗散功为

$$W_s = 2 \int_{\varphi_{\max}}^{\frac{\pi}{2}} M_0 \left(\arcsin \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_{\max}} - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) R d\varphi = 2M_0 R \int_{\varphi_{\max}}^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_{\max}} d\varphi - \frac{\pi^2}{4} M_0 R + \pi M_0 R \varphi_{\max} - M_0 R \varphi_{\max}^2, \quad (13)$$

令  $f(\varphi_{\max}) = \int_{\varphi_{\max}}^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_{\max}} d\varphi$ , 下面通过数值方法来求  $f(\varphi_{\max})$  的近似解, 运用 Matlab<sup>[17]</sup> 编程, 得到

$$f(\varphi_{\max}) = 2.2304 \varphi_{\max}^2 + 0.6076 \varphi_{\max} + 6.4965. \quad (14)$$

将式(14)和  $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2L}x$  代入式(13), 通过上面类似分析, 可得整个圆弧区的耗散功为

$$W_2 = 61.5308 M_0 R. \quad (15)$$

3) 塑性铰转动所消耗的塑性功  $W_3$ 。

塑性铰转动所消耗的塑性功包括 2 个横向塑性绞线和 8 个纵向塑性铰线转动所耗散的塑性功。横向塑性绞线  $\overline{AC}$  上各铰链转动的角度为  $\pi - 2\alpha$ , 故

$$W_3^{\overline{AC}} = \overline{AC} M_0 (\pi - 2\alpha) = \pi R M_0 (\pi - 2\alpha). \quad (16)$$

由于假设塑变后截面曲线部分呈半圆弧状, 所以 8 个纵向塑性铰链转动的角度为零。所以, 塑性绞线处转动所消耗的总功为

$$W_3 = 2W_3^{\overline{AC}} = 2\pi R M_0 (\pi - 2\alpha). \quad (17)$$

4) 塑变区内由于轴向拉伸所消耗的塑性功  $W_4$ 。

由于最大轴向伸长量  $\Delta\epsilon = \overline{BF} - L$ , 则轴向拉伸的耗散功为

$$W_4 = 2 \int_0^{\Delta\epsilon} N_0 d\epsilon = 2N_0 (\overline{BF} - L) = 2 \left( \frac{\delta}{\cos \alpha} - L \right). \quad (18)$$

在上述模型中, 钢管两端不受任何约束, 可自由伸缩, 所以钢管塑变区轴向拉伸所耗散的塑性功可

以忽略不计,近似认为  $W_4=0$ 。

综前所述

$$W_{\text{内力}} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4. \quad (19)$$

### 1.3.3 外力所做的功

$$W_{\text{外力}} = \sum q \delta dxdy = qV_{\text{形变体积}}, \quad (20)$$

式中  $q$  为刀口与管道挤压面上的均布载荷,若假设挤压钢管的刀口宽为  $b$ ,则管道凹陷体积为

$$V_{\text{形变体积}} = \frac{1}{2} \pi R^2 b \times 2 = \pi R^2 b. \quad (21)$$

根据虚功原理有

$$W_{\text{外力}} = W_{\text{内力}}, \quad (22)$$

并将以上相关公式代入式(22),可求出模型中  $q$  的表达式,设  $S$  为刀口和管道之间的挤压面积,则  $S = \pi Rb$ ,刀口和管道之间的挤压载荷为

$$Q = qS, \quad (23)$$

式中的  $Q$  即为管道挤压塑性变形的载荷量。

## 2 $\phi 325 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$ 的 X60 钢质管道 18 mm 宽度压头挤压载荷的计算

根据建立的力学模型和现有管道的实际情况,以  $\phi 325 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  的 X60 钢质管道受到 18 mm 宽的压头挤压为例计算管道挤压的载荷量,已知材料的屈服极限为 475 MPa。由题意可知,  $R = 162.5 \text{ mm}$ ,  $b = 18 \text{ mm}$ ,  $t = 6 \text{ mm}$ ,  $\sigma_0 = 475 \text{ MPa}$ ,将各参数代入上式,求得挤压载荷为 362 kN,其中各内力功数值见表 1。

表 1 各内力功

| 内力功/J | $W_1$    | $W_2$    | $W_3$   | $W_4$ | $W_{\text{内力}}$ |
|-------|----------|----------|---------|-------|-----------------|
| 数值    | 13 712.6 | 42 744.7 | 1 645.5 | 0     | 58 102.8        |

## 3 $\phi 325 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$ 的 X60 钢质管道挤压变形实验与结果分析

### 3.1 实验方法

在上文中已经计算出了管道挤压载荷为 362 kN,根据计算结果,选择在 500 t 长柱试验机上进行实验。实验试件为  $\phi 325 \text{ mm} \times 6 \text{ mm} \times 3 675 \text{ mm}$  的 X60 管线 1 根,外面裹有防腐层,钢管为直焊缝管。实验前,首先将上压头缓缓下降,与下压头实现对中,然后再将上压头升起,将钢管放于上下压头中间,并使钢管垂直于压头挤压面,挤压位置为钢管的中间处,钢管两端用方砖支撑。然后开始加载,设定初始加载速率为 5 mm/min,下压头开始上升,上压

头固定,钢管中间部位开始发生较小的变形,并且在上下压头的挤压力作用下固定,这时将方砖移走,设定加载速率为 20 mm/min,使钢管两端处于自由状态下进行挤压变形,直至将钢管压扁。

### 3.2 实验现象及结果

#### 3.2.1 挤压变形过程

开始加载时,钢管在上下刀口的挤压作用下固定,钢管挤压处发生轻微的弹性变形,变形具有可逆性;随着位移的增加,钢管挤压处出现轻微的折皱,挤压处两端开始凹陷,说明挤压处已经发生塑性变形;位移继续增加,载荷也越来越大,钢管变形范围也越来越大,凹陷区域沿钢管轴向方向逐渐扩大,折皱区域沿钢管径向方向也逐渐扩大,钢管端面由圆形逐渐变为反向的椭圆形,如图 6 所示;位移继续增加,钢管即将被压扁,此时挤压截面的中间先接触,随后两边依次接触,这说明挤压过程中挤压面中间位置发生凹陷,且中间凹陷量最大,向两边依次减小。与此同时,中间位置接触后,从载荷位移曲线中可以看出,位移变化量非常小,而载荷陡然增加。钢管被完全压扁时,中间几乎没有缝隙,但是卸载后,钢管压扁处出现一定量的回弹,中间出现缝隙,这从图 6 中可以看出。总体来看,钢管压扁后上下变形大体对称,与下刀口接触的钢管的变形略大于上面的变形,如图 7 所示。

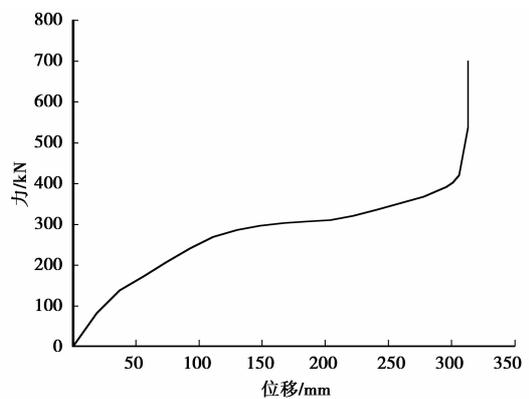


图 6 钢管压扁后端面图



图 7 钢管压扁后变形图

### 3.2.2 载荷位移曲线

在实验中,得到了挤压过程中载荷随位移的变化值,如表2所示(表中数据为实测数据去除试验机

测量误差之后的校正值);相应的载荷位移曲线如图8所示。

表2 载荷位移值

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 位移/mm | 0     | 19    | 37    | 56    | 74    | 93    | 111   | 130   | 148   | 167   |
| 力/kN  | 0     | 82.8  | 137.9 | 172.4 | 206.9 | 241.4 | 268.9 | 286.2 | 296.6 | 303.4 |
| 位移/mm | 185   | 204   | 222   | 241   | 278   | 296   | 301   | 306   | 313   | 313   |
| 力/kN  | 306.9 | 310.3 | 320.5 | 336.0 | 368.0 | 391.5 | 402.5 | 420.5 | 537.0 | 700.0 |

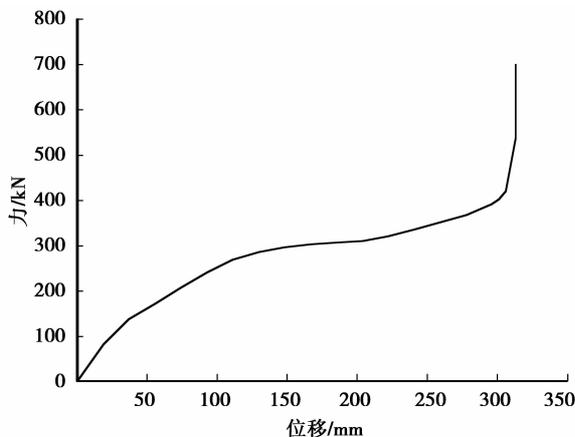


图8 钢管挤压的载荷位移曲线

### 3.3 分析与讨论

在图8载荷位移曲线的末端,可以看到一个拐点,拐点之后的位移变化很小,几乎不改变,载荷却陡然增大,说明此时钢管已经被压扁,该拐点的纵坐标即为将管道压扁所需的载荷量。由图中可以看出,挤压载荷大约为400 kN,与理论计算载荷之间的误差为

$$\eta = \frac{|362 - 400|}{400} \times 100\% = 9.5\% \quad (24)$$

由以上计算结果可知,理论值小于实验值,误差在10%左右,在可以接受的工程范围之内,说明可以运用上述模型计算各种不同规格管道的挤压载荷。管道挤压过程非常复杂,理论计算值小于实验值,可能导致的原因有上述计算模型在计算内力功时,忽略了由于轴向拉伸所耗散的塑性功,在挤压过程中,挤压载荷一部分会转换为轴力克服轴向拉伸去做功;此模型忽略了管道沿轴向方向的弯曲变形,弯曲应力会使钢管的水平直径变小,垂直直径变大,即忽略了钢管截面变为反向椭圆形的那一部分形变;实验过程中的随机因素也可能会导致实验结果偏大,最终导致理论计算值小于实验值。

## 4 结论

1)管道挤压过程非常复杂,笔者通过基本假设和简化条件,通过塑性变形基本理论和虚功原理,推导出了管道挤压模型的能量关系式,并求出了管道压扁所需要的挤压载荷。以 $\phi 325 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$ 的X60钢质管道受到18 mm宽的压头挤压为例计算了管道挤压的载荷量,大约为362 kN。

2)该模型的计算结果与实验结果比较吻合,误差在10%以内,在合理的工程误差范围内,可以用于计算不同规格管道的挤压载荷量,用于指导管道的泄漏抢修和为挤压截流装置提供设计参数。

3)笔者在建模和实验过程中,对土壤摩擦、管道内压等因素未作考虑,实际模型与管道真实挤压载荷之间仍会有一定的误差。

### 参考文献:

- [1] 刘立平,李英民,夏洪流,等. 钢管—钢管混凝土柱偏心受压力学性能试验[J]. 重庆大学学报, 2012, 35(4): 52-59.  
LIU Liping, LI Yingmin, XIA Hongliu, et al. Experimental study on the mechanical behavior of eccentrically loaded steel tubular columns filled with structural steel and concrete[J]. Journal of Chongqing University, 2012, 35(4): 52-59.
- [2] 牛卫中. 金属薄壁圆管内翻口过程中应力与变形的解析[J]. 重庆大学学报, 2012, 35(7): 77-83.  
NIU Weizhong. Analyses on stress and deformation of thin-walled metallic round tube in edge incurving process[J]. Journal of Chongqing University, 2012, 35(7): 77-83.
- [3] HUANG D N, ZHANG Z H, LI J Y, et al. FEM analysis of metal flowing behaviors in porthole die extrusion based on the mesh reconstruction technology of the welding process[J]. International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials, 2010, 17(6):

- 763-769.
- [4] LAURENTYS C A, BOMFIM C H M, MENEZES B R, et al. Design of a pipeline leakage detection using expert system: a novel approach [J]. *Applied Soft Computing*, 2011, 11(1): 1057-1066.
- [5] MOTAHARI A, ABOLMAALI A. Structural deformation characteristics of installed HDPE circular pipelines [J]. *Journal of Transportation Engineering*, 2010, 136(4): 298-303.
- [6] DAS S, CHENG J J, MURRAY D W, et al. Effect of monotonic and cyclic bending deformations on NPS12 wrinkled steel pipeline [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2008, 134(12): 1810-1817.
- [7] EIKREM P A, ZHANG Z L, NYHUS B. Effect of plastic prestrain on the crack tip constraint of pipeline steels [J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2007, 84(12): 708-715.
- [8] 张忠, 杨永雄, 刘盈丰. 横向受压薄壁圆钢管在冲击波作用下动力压扁的数值模拟分析 [J]. *重庆建筑*, 2009(2): 22-25.  
ZHANG Zhong, YANG Yongxiong, LIU Yingfeng. Numerical simulation analysis on dynamical flattening of transverse pressured thin-wall circular tube under shock wave [J]. *Chongqing Architecture*, 2009(2): 22-25.
- [9] 刘芷丽, 詹梅, 杨合. 圆管压扁-压弯连续变形过程有限元模型的建立及截面畸变研究 [J]. *塑性工程学报*, 2008, 15(5): 101-107.  
LIU Zhili, ZHAN Mei, YANG He. FEM model establishment and variation of cross section distortion in circle tube pressing and bending [J]. *Journal of Plasticity Engineering*, 2008, 15(5): 101-107.
- [10] 李珠, 张善元, 杨林峰, 等. 压力管道破坏的静载实验研究 [J]. *华北工学院学报*, 2000, 21(2): 159-163.  
LI Zhu, ZHANG Shanyuan, YANG Linfeng, et al. The experimental research on damage of Internally pressured pipeline [J]. *Journal of North China Institute of Technology*, 2000, 21(2): 159-163.
- [11] BROOKER D C. A numerical study on the lateral indentation of continuously supported tubes [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2004, 60(8): 1177-1192.
- [12] 艾池, 赵万春, 郭柏云. 侧向载荷作用下的套管塑性破坏力学模型与计算 [J]. *应用力学学报*, 2008, 25(3): 521-523.  
AI Chi, ZHAO Wanchun, GUO Baiyun. Mechanical model and computational analysis of casing plastic failure under lateral loading [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2008, 25(3): 521-523.
- [13] 王世炜. 输油管道受挤压状态下塑性变形及安全性研究 [D]. 重庆: 后勤工程学院, 2009.
- [14] 张坤, 焦光伟, 李学新, 等. 钢质管道挤压变形过程数值模拟 [J]. *后勤工程学院学报*, 2012, 28(2): 42-51.  
ZHANG Kun, JIAO Guangwei, LI Xuexin, et al. Numerical simulation of extruded deformation process in steel pipeline [J]. *Journal of Logistical Engineering University*, 2012, 28(2): 42-51.
- [15] JONES N, BIRCH S E, BIRCH R S, et al. An experimental study on the lateral impact of fully clamped mild steel pipes [J]. *Institution of Mechanical Engineerings, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 1992, 206(2): 111-127.
- [16] 徐秉业, 黄炎, 刘信声, 等. 弹性力学与塑性力学解题指导及习题集 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.
- [17] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

(编辑 张 苹)