

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2013.12.010

# 模态参数辨识改进算法及其在振动台试验中的应用

杨佑发<sup>a</sup>, 甘琳<sup>b</sup>, 李华新<sup>a</sup>, 李海龙<sup>a</sup>

(重庆大学 a. 土木工程学院; b. 建设管理与房地产学院, 重庆 400045)

**摘要:**结合数据驱动随机子空间法,提出了环境激励下结构模态参数识别的改进 ITD 法、改进 STD 法与改进复指数法。随机子空间法的识别精度高,其中 Hankel 矩阵经过正交投影计算可以保留原始数据中的所有信息,同时去除了噪声,将得到的 P 矩阵中的数据作为 ITD 法、STD 法与复指数法的输入数据,这 3 种方法就不再需要采用随机减量法或者自然激励技术进行前处理,避免了这 2 种前处理方法的不准确性带来的误差,并提高了模态参数识别的计算效率。利用 12 层钢筋混凝土框架结构模型在振动台试验过程中地震反应记录,识别结构模型模态参数。从而证明 3 种改进方法在结构模态参数识别中应用的可行性。

**关键词:** 框架结构; 模态参数识别; 改进 ITD 法; 改进 STD 法; 改进复指数法

**中图分类号:** TU317

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-582X(2013)12-064-06

## Improved algorithms of modal parameter identification and its application to shaking table frame model test

YANG Youfa<sup>a</sup>, GAN Lin<sup>b</sup>, LI Huaxin<sup>a</sup>, LI Hailong<sup>a</sup>

(a. College of Civil Engineering; b. College of Construction Management and Real Estate, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** Based on the data-driven stochastic subspace identification (SSI), an improved ITD method, an improved STD method and an improved complex index method are put forward. SSI has high identification accuracy, and Hankel matrix orthogonal projection calculation of data can retain all the useful information in the original data and simultaneously remove noise. The data obtained in P-matrix is taken as input for the ITD, STD and complex index methods, and then the three methods would no longer need random decrement technique or NExt method for pre-processing, thereby eliminating the error caused by the two pretreatment methods. The improved methods are applied to the modal parameter identification for structure shaking table test model by using the simulated earthquake response data from Tongji University. The recognition results further prove the correctness and feasibility of the improved methods.

**Key words:** frame structure; modal parameters identification; improved ITD method; improved STD method; improved complex index method

对土木结构进行实时安全监测或振动控制,不仅需要掌握结构的静力特性,更需要充分了解其动力特性,以避免灾难事故的发生。而结构的模态参

数(频率、阻尼、振型)是结构动力特性的主要参数,所以如何准确识别结构的模态参数是研究结构动力特性的基础<sup>[1-3]</sup>。

收稿日期: 2013-07-04

基金项目: 重庆市建设科技计划资助项目(2012-2-49; 2011-2-80)

作者简介: 杨佑发(1968-), 重庆大学教授, 博士, 主要从事土木工程结构防灾与减灾研究, (E-mail) yfyang@cqu.edu.cn.

数据驱动随机子空间法 (SSD) 的识别精度高, 但计算效率较低<sup>[4-5]</sup>。由于运用 ITD、STD、复指数法进行参数识别时必须先进行随机减量法或者自然激励技术 (NExT 法) 得到数据的自由衰减曲线, 而此过程会产生一定的误差, 且这 2 种前处理方法的输出长度的取值有一定的人为主观影响, 有时也会使得衰减曲线产生偏差, 在此情况下采用 ITD、STD、复指数法进行参数识别必然会产生误差<sup>[6-7]</sup>。数据驱动 SSI 中 Hankel 矩阵经过正交投影计算保留了原始数据中的所有信息, 同时去除了噪声, 因此将得到的 P 矩阵中的数据来作为 ITD、STD、复指数法的输入数据, 3 种方法就不再需要进行随机减量法或者自然激励技术 (NExT 法) 前处理, 避免了这 2 种前处理方法的不准确性带来的误差。结合随机子空间法精度较高但计算效率较低与 ITD、STD、复指数法精度较低但计算效率较高的特点, 提出了 3 种改进的模态参数识别方法, 即改进 ITD 法、改进 STD 法和改进复指数法。

## 1 改进 ITD 法

数据驱动随机子空间法是先构造 Hankel 矩阵, 然后进行矩阵的正交投影得到  $P_i$  矩阵, 将其展开得:

$$P_i = Y_f / Y_p = O_i \hat{X}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i & \hat{x}_{i+1} & \cdots & \hat{x}_{i+j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\hat{x}_i & C\hat{x}_{i+1} & \cdots & C\hat{x}_{i+j-1} \\ CA\hat{x}_i & CA\hat{x}_{i+1} & \cdots & CA\hat{x}_{i+j-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{i-1}\hat{x}_i & CA^{i-1}\hat{x}_{i+1} & \cdots & CA^{i-1}\hat{x}_{i+j-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

将得到的 P 矩阵中的数据来作为 ITD 法的输入数据。注意到  $P_i$  的第  $m$  行恰好可以看作是第  $m-1$  的延时  $\Delta t$  的矩阵。这也是 ITD 法的原理所在: 不妨把第一行到第  $m$  行看作响应矩阵  $[X]$ , 其中  $0 < m < i$  ( $i$  是  $P_i$  矩阵的行数), 第二行到第  $m+1$  行看作第一行的延时  $\Delta t$  的矩阵  $[\bar{X}]$ , 用 Matlab 语言表述如下:

$$[X] = P_i(1:m, :); [\bar{X}] = P_i(2:m+1, :), \quad (2)$$

两者相除后:

$$[X] \setminus [\bar{X}] = [A]. \quad (3)$$

将矩阵  $[A]$  采用双最小二乘解方法, 此种方法实际

上就是 2 种单边最小二乘法的平均值, 即:

$$[A] = \frac{1}{2} \left[ [\bar{X}][X]^T ([X][X]^T)^{-1} + [\bar{X}][\bar{X}]^T ([X][\bar{X}]^T)^{-1} \right]. \quad (4)$$

式 (4) 正是 ITD 法所求解的特征矩阵  $[A]$ 。余下的过程与一般的 ITD 法相同<sup>[8]</sup>。

## 2 改进 STD 法

将得到的 P 矩阵中的数据作为 STD 法的输入数据, 形成 STD 法中的 Hessenberg 矩阵, 提高了识别精度和抗噪性能。同样定义随机子空间法式 (1) 所示  $P_i$  第 1 行到第  $m$  行看作响应矩阵  $[X]$ , 其中  $0 < m < i$  ( $i$  是  $P_i$  矩阵的行数), 第 2 行到第  $m+1$  行看作第一行的延时  $\Delta t$  的矩阵  $[\bar{X}]$ 。

由式 (2), 同样可以得出  $[X]$  和  $[\bar{X}]$  存在线性关系, 即

$$[\bar{X}] = [X][B]. \quad (5)$$

矩阵  $[B]$  具有如下的形式:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0, 0, 0, \dots, 0, b_1 \\ 1, 0, 0, \dots, 0, b_2 \\ 0, 1, 0, \dots, 0, b_3 \\ \vdots \\ 0, 0, 0, \dots, 1, b_M \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$[B]$  矩阵是 1 个只有 1 列位置元素的 Hessenberg 矩阵。

$$[X]\{b\} = \{\bar{x}\}_M, \quad (7)$$

其中:  $\{b\} = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2N}]^T$ ; 而  $\{\bar{x}\}_M$  是矩阵  $[\bar{X}]$  的第  $M$  列元素。

用最小二乘法求解  $\{b\}$  矩阵后可得

$$\{b\} = ([X][X]^T)^{-1}[X]^T\{\bar{x}\}_M, \quad (8)$$

将求得的  $\{b\}$  代入后, 得到  $[B]$ , 将式 (7) 代入式 (6) 整理后得

$$[B][A]^{-1} = [A]^{-1}[A]. \quad (9)$$

式 (9) 是一个标准的特征方程。由矩阵  $[B]$  的特征值  $e^{s_r \Delta t}$  ( $r=1, 2, \dots, 2N$ ), 从而求出模态频率和阻尼比等模态参数<sup>[9]</sup>。

## 3 改进复指数法

将得到的  $P_i$  矩阵中的数据作为复指数法的输入数据, 即将随机子空间法式 (1) 所示  $P_i$  的第 1 行单独提出来, 即:

$$P_i(:, 1)^T = [C\hat{x}_i \quad CA\hat{x}_i \quad \cdots \quad CA^{i-1}\hat{x}_i] = [j_0 \quad j_1 \quad \cdots \quad j_k], \quad (10)$$

式中:  $j_k = CA^k \hat{x}_i$  ( $0 \leq k < i$ )  $i$  即为 P 矩阵的行数。

根据式 (10), 将状态矩阵  $A$  进行特征值分解:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Psi}^{-1}, \quad (11)$$

式中  $\mathbf{A} = \text{diag}[\mu_i] \in R^{n \times n}$  是一个对角矩阵, 由离散时间复特征值  $\mu_i$  组成,  $\mathbf{\Psi} \in R^{n \times n}$  是以特征向量为列向量组成的矩阵。

将式(11)代入式(10)可以得到

$$P_i(1, :)^T = [j_0 \quad j_1 \quad \cdots \quad j_k] = [C\hat{x}_i \quad C\mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Psi}^{-1}\hat{x}_i \quad \cdots \quad C\mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}^{i-1}\mathbf{\Psi}^{-1}\hat{x}_i]. \quad (12)$$

写成方程组的形式:

$$\left. \begin{aligned} j_0 &= C\hat{x}_i \\ j_1 &= C\mathbf{\Psi} \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{2N} \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}^{-1}\hat{x}_i \\ j_2 &= C\mathbf{\Psi} \begin{bmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{2N}^2 \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}^{-1}\hat{x}_i \\ \vdots & \\ j_{i-1} &= C\mathbf{\Psi} \begin{bmatrix} \mu_1^{i-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{2N}^{i-1} \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}^{-1}\hat{x}_i \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

对于上式  $j_k$  是已知的, 最主要是求  $\mu_r (r=1, 2, \dots, 2N)$ , 可以将  $\mu_r$  看做是一个具有实系数  $\beta_k$  (自回归系数) 的  $2N$  阶的多项式方程的根, 即:

$$\sum_{k=0}^{2N} \beta_k \mu^k = \prod_{r=1}^N (\mu - \mu_r)(\mu - \mu_r^*) = 0. \quad (14)$$

余下的过程与一般的复指数法相同<sup>[10]</sup>。

### 4 框架结构模态辨识实验

地震激励可以看作环境激励中的一种, 现用前面提到的 3 种改进的模态参数识别方法对同济大学土木工程防灾国家重点实验室 12 层钢筋混凝土框架结构振动台模型试验进行模态参数识别, 以此来验证这些改进方法的正确性、可行性。

#### 4.1 振动台试验介绍

##### 4.1.1 模型介绍

钢筋混凝土标准框架振动台模型试验于 2003 年 6 月在同济大学土木工程防灾国家重点实验室振动台试验室进行。试验模型如图 1 所示, 模型共 12 层, 缩尺比为 1 : 10, 梁、柱、板的尺寸由实际高层框架结构的尺寸按相似关系折算。详尽的模型设计参数、材料特性、模型制作过程等可以参考其试验报告<sup>[11]</sup>。

##### 4.1.2 测点布置

试验中采用加速度计、应变传感器量测模型结

构的动力响应。加速度计的方向有 X、Y、Z 3 个方向。试验测点布置如图 2 所示。



图 1 试验模型图

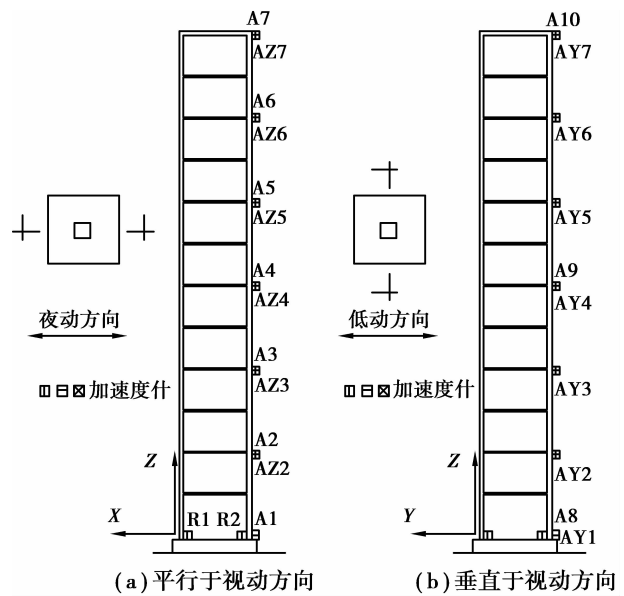


图 2 模型测点布置

##### 4.1.3 加速度激励

试验中输入的地震波形有 El Centro 波、Kobe 波、上海人工波及上海基岩波。该试验共设 62 个工况, 其中 8 次白噪声输入, 28 次 X 方向的单向地震动输入, 14 次 XY 双向输入, 12 次 XYZ 三向输入。更加详细的资料请参见其试验报告<sup>[11]</sup>。

#### 4.1.4 测得的加速度时程

针对每 1 个工况,每 1 个传感器都记录下这个工况的对应位置的时程曲线。例如第 2 工况 A1、A2 测得加速度时程如图 3、图 4 所示。结构振动台模型试验过程可以发现,前 7 个工况下(相当于原型体系遭受七度多遇地震),在模型结构上没有发现任何裂缝。这说明直到第 7 个工况完成为止,结构一直处于强震动段前的非时变阶段。为了避开时变阶段,在此选取前 7 个工况中的数据来进行模态参数识别。

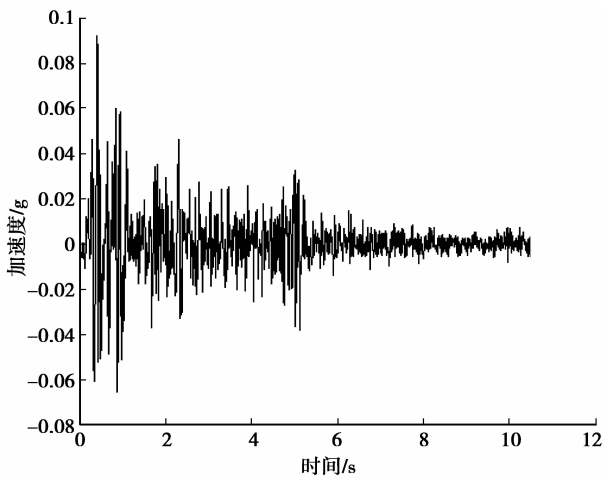


图 3 工况 2A1 加速度时程

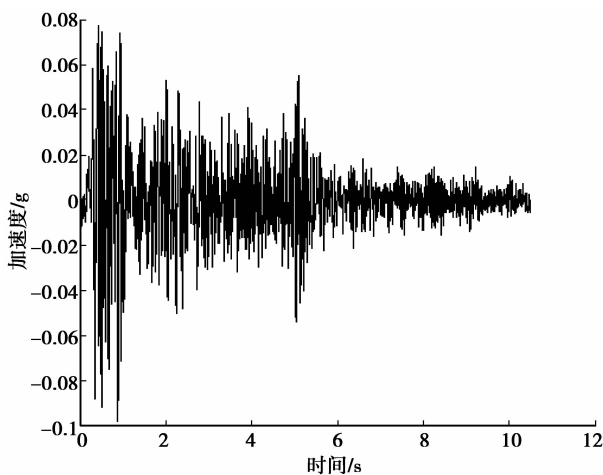


图 4 工况 2A2 加速度时程

#### 4.2 框架结构模态辨识

现以工况 2 数据作为研究对象。工况 2 是 El-Centro 波单 X 向输入,取 X 向 A1-A7 测点所得数据作为响应数据输入。用 NExt 法对这些数据做预处理,以 A1 测点为参考点,分别用 A2~A7 测点数

据对其做互相关函数,其结果为 6 条互相关曲线。其中 A2 与 A1、A3 与 A1 互相关函数曲线如图 5、图 6 所示。

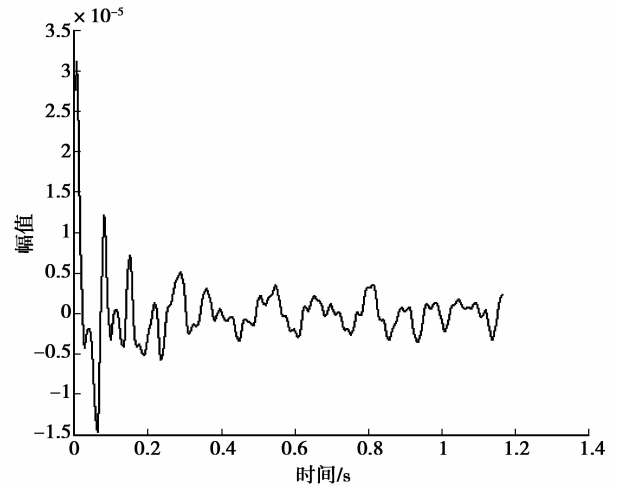


图 5 A2、A1 互相关函数曲线

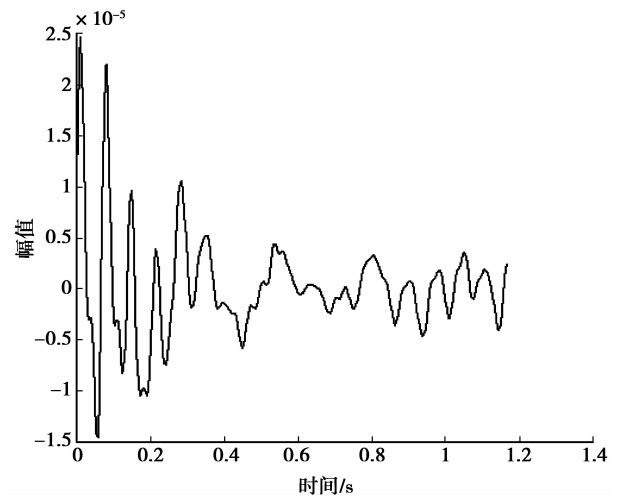


图 6 A3、A1 互相关函数曲线

以 A1~A7 数据作为输入数据,选取合适的 Hankel 矩阵行数后,分别取模型阶次由 2 变换至 100,然后做出其稳定图。取频率容差为 1%,阻尼比容差为 10%,模态振型容差为 5%,得到如图 7 所示的稳定图。

由稳定图可以明显看出其前六阶稳定轴,以此剔除虚假模态,识别结果如表 1、表 2。同时通过构造 Hankel 矩阵,对其进行正交投影计算,得到 P 矩阵,然后取其中若干行或者列的数据作为 ITD、STD、复指数法的输入数据来进行模态参数识别,识别结果如表 1、表 2 所示。

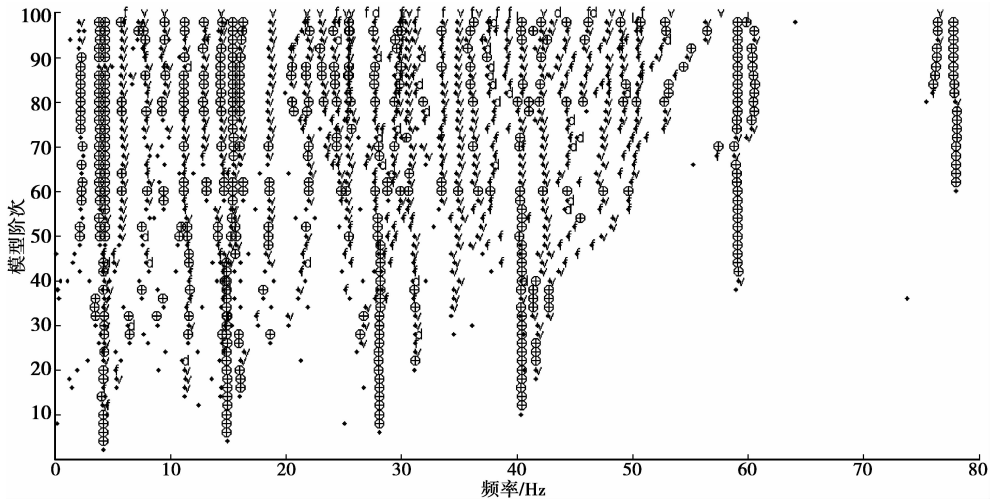


图 7 稳定图

表 1 3 种改进方法的频率识别值的比较

方法	阶次					
	1	2	3	4	5	6
ITD	4.39	14.69	28.80	40.64	59.46	77.37
STD	4.25	15.08	28.62	40.38	59.66	77.23
复指数	4.35	14.78	28.51	40.33	59.46	77.28
SSI 法	3.86	14.44	27.92	41.42	58.48	76.98
改进 ITD 法	3.62	14.31	27.74	41.31	58.71	76.28
改进 STD 法	3.61	14.39	27.85	41.51	58.10	76.28
改进复指数法	3.69	14.42	27.90	41.34	58.89	76.82

对阻尼比识别的精度相对较差。由于篇幅原因，现只给出改进 ITD 法对该框架结构的振型识别结果，如图 8 所示。

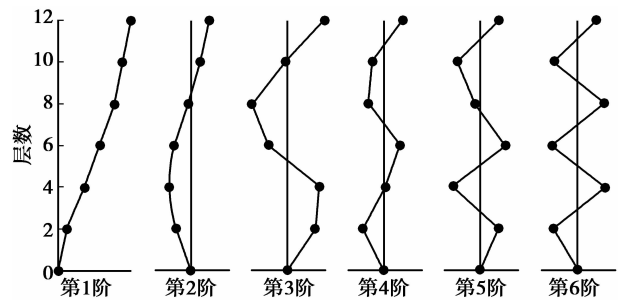


图 8 改进 ITD 法振型识别

表 2 3 种改进方法的阻尼比识别值的比较

方法	阶次					
	1	2	3	4	5	6
ITD	0.074	0.054	0.047	0.013	0.003	0.005
STD	0.063	0.052	0.049	0.023	0.020	0.008
复指数	0.093	0.054	0.030	0.026	0.016	0.006
SSI 法	0.053	0.026	0.013	0.008	0.007	0.005
改进 ITD 法	0.050	0.032	0.016	0.007	0.005	0.004
改进 STD 法	0.044	0.039	0.018	0.010	0.007	0.004
改进复指数法	0.045	0.033	0.014	0.010	0.007	0.003

通过分析得到的模态参数反推输入数据，所得到的拟合值与原始输入数据如图 9、图 10 所示。

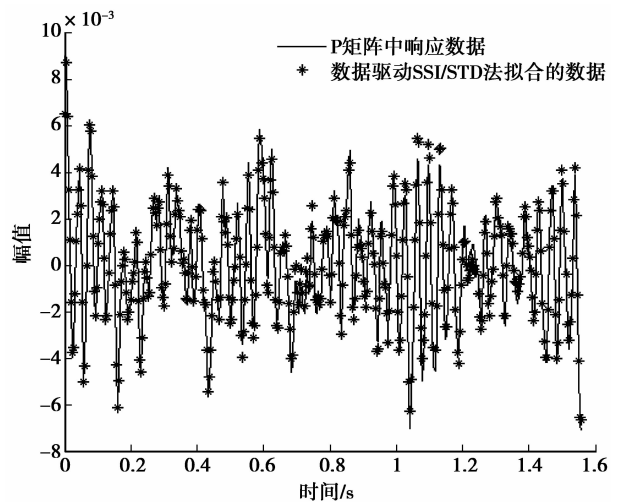


图 9 改进 STD 法拟合情况

由识别结果可以看出，频率识别结果较接近，而

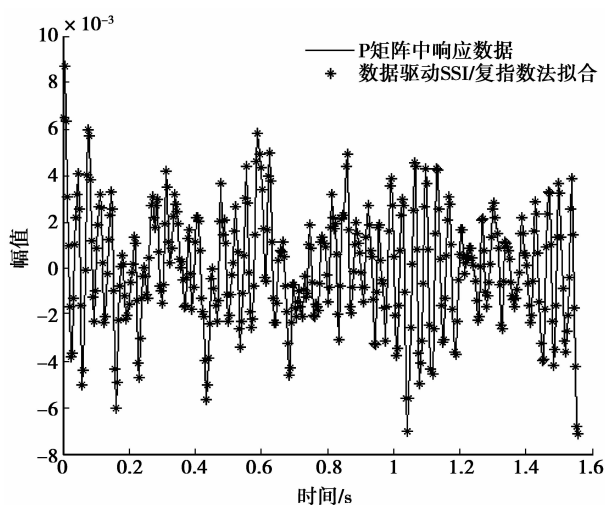


图 10 改进复指数法拟合情况

由图 9 与图 10 可以看出:所得拟合值与原始输入数据情况拟合较好,从而进一步证明 3 种改进方法在结构模态参数识别中应用的可行性。

## 5 结 论

1) 运用 ITD、STD 和复指数法进行参数识别时必须先采用随机减量法或者自然激励技术 (NExT 法) 得到数据的自由衰减曲线,而此过程会产生一定的误差,且这 2 种前处理方法的输出长度的取值方面有一定的人为主观影响,有时也会使得衰减曲线产生偏差,因此采用 ITD、STD 和复指数法进行参数识别必然会产生误差。

2) 结合随机子空间算法识别精度高和 ITD、STD 和复指数法的识别效率高,提出了环境激励下结构模态参数识别的改进 ITD、改进 STD 和改进复指数法。通过十二层钢筋混凝土标准框架振动台模型试验验证了改进方法对模态参数识别的可行性,与一般方法相比,改进方法明显提高了对频率和阻尼比等结构模态参数的识别精度。

3) 用求得的振型矩阵反推原始数据,所得的拟合数据与原始相应数据拟合度非常高,从而进一步证明了改进方法识别模态参数的准确性和识别方法的正确性。

## 参考文献:

- [1] Juang J N. Applied system identification[M]. London: Prentice-Hall, 1994.
- [2] Huang C F, Ko W J, Tal C H. Identification of dynamic systems from data composed by combination of their response components[J]. Engineering Structures, 2002, 24(11): 1441-1450.
- [3] Ren W X, Zong Z H. Output-only modal parameter identification of civil engineering structures [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2004, 17(3/4): 429-444.
- [4] Koh C G, Hong B, Llaw C Y. Substructural and progressive structural identification methods [J]. Engineering Structures, 2003, 25(12): 1551-1563.
- [5] 崔飞. 桥梁结构参数识别及承载力分析[D]. 上海: 同济大学, 2003.
- [6] 韩建平, 李达文, 王飞行. 基于 Hilbert-Huang 变换和随机子空间识别的模态参数识别[J]. 地震工程与工程振动, 2010, 30(1): 53-59.  
HAN Jianping, LI Dawen, WANG Feixing. Modal parameter identification based on Hilbert-Huang transform and stochastic subspace identification [J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2010, 30(1): 53-59.
- [7] 徐晓霞, 任伟新, 韩建刚. 基于响应协方差小波变换和 SVD 的结构工作模态参数识别[J]. 振动工程学报, 2010, 23(2): 194-199.  
XU Xiaoxia, REN Weixin, HAN Jianguang. Operational modal parameter identification based on covariancedriven wavelet transform and singular value decomposition [J]. Journal of Vibration Engineering, 2010, 23(2): 194-199.
- [8] Peng Z K, Tse P W, Chu F L. An improved Hilbert-Huang transform and its application in vibration signal analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 286(1/2): 187-205.
- [9] Ren W X, Zong Z H. Output-only modal parameter identification of civil engineering structures [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2004, 17(3/4): 429-444.
- [10] 李海龙. 环境激励下结构模态参数识别方法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2012.
- [11] 吕西林, 李培振, 陈跃庆. 12 层钢筋混凝土标准框架振动台模型试验的完整数据[R]. 上海: 同济大学, 2004.