

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2014.02.013

路基荷载下地基侧向变形的计算方法

蒋关鲁, 兰维维, 肖红兵, 陈伟志

(西南交通大学 a. 土木工程学院; b. 高速铁路线路工程教育部重点试验室, 成都 610031)

摘要:地基在路基荷载下不仅产生竖向沉降,也发生侧向变形,并且侧向变形是路基沉降产生的重要原因之一。为了分析路堤荷载下地基的侧向变形,通过对布辛奈斯克集中力下弹性半无限体的侧向变形解进行积分,分别推导出泊松比等于 0.5 和小于 0.5 时,无限长线性荷载、带状均布荷载、带状三角形荷载下侧向变形理论解;在考虑边坡坡度和路基高宽比对地基反力影响的条件下,建立了统一坐标导出与路堤等效带状梯形荷载下侧向变形解。

关键词:地基侧向变形;计算方法;路基荷载;沉降;地基反力

中图分类号: TU441

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2014)02-089-09

A study on lateral deformation calculation of foundation under embankment

JIANG Guanlu, LAN Weiwei, XIAO Hongbing, CHEN Weizhi

(a. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University; b. Key Laboratory of High-speed Railway Engineering, Ministry of Education, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: Embankment load causes not only vertical settlement of foundation but also lateral deformation of foundation, and lateral deformation is one of the important factors for foundation settlement. In order to analyze lateral deformation of foundation under the embankment, based on Boussinesq's concentrated force lateral deformation solution of the elastic semi-infinite, the lateral deformation theoretical solutions under the infinite line load, strip uniformly distributed load and triangular strip load are derived respectively when Poisson ratio equals to 0.5 and less than 0.5. Then ribbon trapezoidal load's lateral deformation solution on the uniform coordinate is given with taking the effect of the slope and the width height ratio of the subgrade to the ground reaction into consideration. The method is clear and logical and the final lateral deformation solution is propitious to the calculation of computer programming.

Key words: soil lateral deformation; calculation method; embankment load; settlement; ground reaction

当结构物在软土地基上修建时,会产生相应的沉降和侧向变形,但在设计中人们常忽略侧向变形的各种影响,采用的沉降计算方法和所用参数大都建立在 Terzaghi 一维固结理论基础之上。这种假设地基土体侧向受到限制仅产生垂直沉降的变形机

理与实际情况明显不符。当工程对沉降控制要求不严时其计算精度尚可满足工程需要,但随着高速铁路和高速公路对工后沉降控制非常严格的结构物的大量修建,地基侧向变形对路基沉降的影响以及对邻近建筑物的影响往往是导致工程失败的关键因

收稿日期: 2013-08-18

基金项目: 铁道部科技计划资助项目(2010G003-F)

作者简介: 蒋关鲁(1962-),男,西南交通大学教授,博士,主要从事道路与铁道工程方向研究,
(E-mail) wgljiang@home.swjtu.edu.cn.

素。国内外对于侧向变形的研究一直没有间断过, Loganathan^[1]分析了路基荷载下总沉降与侧向变形的关系,并初步给出了两者之间的对应关系。Giroud^[2]研究了可压缩层地基深度一定时,路基等梯形荷载下侧向变形引起的初始沉降。Steinbrenner^[3]在假设地基为各向同性的弹性半无限体情况下,研究了均布条形荷载下饱和粘性土地基由于土体侧向变形产生的初始沉降。Bjerrum 研究了路基安全系数对总沉降的影响,提出当安全系数不大于 1.2 时,就得考虑土体侧向变形对沉降的影响,并指出侧向变形引发的沉降量可达到总沉降的 1/4。Yamanouchi 提出当安全系数大于 1.5 时,地基侧向变形较小。Appolonia^[4]研究了路基局部屈服情况下的不排水沉降,认为路基宽度与软土层厚度的比值大于 2 时,路基荷载超过地基极限承载力的一半时,侧向变形就会非常明显。周镜^[5]分析了软土地基沉降计算的困难以及存在的问题,并给出了影响侧向变形的主要因素为荷载的应力水平、荷载几何形状、前期固结压力以及荷载底宽与软土层厚的比值。殷宗泽^[6]初步分析了土体泊松比对侧向变形和沉降的影响,以及泊松比对土工结构物受力的影响,得出土体的泊松比是影响其侧向变形内在因素。王志亮^[7]、王峰等^[8],借助数值模拟得出土体侧向变形与泊松比、空隙比、路基高宽比有关,并得出了侧向修正系数的计算式。曾国熙介绍了垂直荷载下软粘土地基的侧向变形,推导出泊松比 μ 为 0.5 时,弹性半无限体地基在线性荷载、带状均布荷载、三角形荷载下的侧向变形公式。不过文献[9]中公式没有建立统一坐标系,使得变形方向要进一步人为分析,并且计算方法也相对复杂,另外对于泊松比 $\mu < 0.5$ 的情况未予以讨论。笔者假设路基基底的应力分布横断面为梯形,纵断面均匀分布,同时考虑文献中所述的边坡坡度和路基高宽比对路基基底应力的影响,通过对布辛奈斯克集中力下侧向变形解进行积分,分别推导出泊松比 $\mu = 0.5$ 与 $\mu < 0.5$ 两种情况下,地基在线性荷载、带状均布荷载以及带状三角形荷载下的侧向变形公式。在此基础上,建立统一的坐标系对其进行合并,进而推导出梯形路基荷载下的侧向变形公式。

1 泊松比为 0.5 时的情况

对于饱和粘土地基,土体的渗透性低,加荷载后,空隙水不能及时排出,可以认为地基没有发生体变,故泊松比 $\mu = 0.5$ 。此时地基的瞬时沉降完全来自于地基的侧向变形^[6]。而且,布辛奈斯克解侧向

变形解第 2 项为零。下面先从泊松比为 0.5,坐标系不随计算点的位置而改变的原则进行推导,这也是文中研究不同于文献[9]的重点。

1.1 线状荷载下的侧向变形

当有一集中力作用于弹性半无限体表面时,地基中任意一点 $Q(x, y, z)$ 在 x 方向的位移为布辛奈斯克的侧向变形解

$$u = \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \left[\frac{xz}{R^3} - \frac{(1-2\mu)x}{R(R+z)} \right], \quad (1)$$

式中: P 为集中力; μ 为泊松比; E 为弹性模量; x, y, z 为计算点在图 1(a) 所示坐标系中的坐标值; R 为计算点与荷载作用点距离,且 $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。当泊松比 $\mu = 0.5$, 则布辛奈斯克侧向变形解得第 2 项为零。故此时布辛奈斯克解为

$$u = \frac{1.5P}{2\pi E} \frac{xz}{R^3}. \quad (2)$$

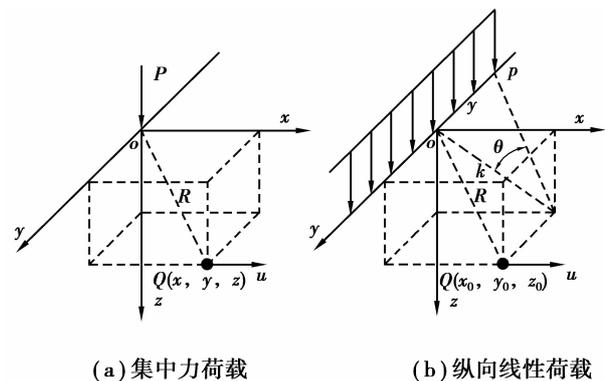


图 1 集中力与纵向线性荷载下的侧向变形示意图

在图 1(b) 所示的线性荷载 p 下,地基中任意点 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 的侧向变形可在式(2)的基础上,对 y 轴进行积分:

$$\begin{aligned} u &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1.5x_0z_0p}{2\pi ER^3} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1.5x_0z_0p}{2\pi E(x_0^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}} dy = \\ &= \frac{1.5x_0z_0p}{2\pi E} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta}{\left(k^2 \frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{1.5x_0z_0p}{2\pi E} \times \frac{1}{k^2} \times \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1.5x_0z_0p}{\pi E} \times \frac{1}{x_0^2 + z_0^2}, \end{aligned}$$

其中: $x^2 + z^2 = k^2$, $y - y_0 = k \tan\theta$ 。

由于 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 为坐标系下的任意一点,故

得线性荷载下任意点 $Q(x, y, z)$ 的侧向变形为

$$u = \frac{1.5xzp}{\pi E} \times \frac{1}{x^2 + z^2} \quad (3)$$

1.2 带状均布荷载下的侧向变形

根据公式(3),通过对横截面进行积分就可以求出带状均布荷载下的侧向变形,此处坐标原点设在横断面中心处,如图 2 所示。在进行积分推导前首先要说明的是此时积分是对带状均布荷载的横截面积分,每个积分点为一个无限长线性荷载,并且被积分的式(2)中的 x ,现在转换为横截面上积分点到任意点坐标为 $Q(X, Z)$ 之间在 x 轴向上的距离。

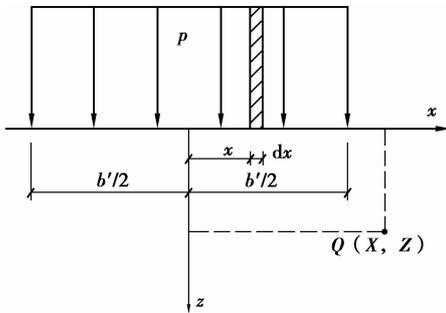


图 2 带状均布荷载下侧向变形的横向积分示意图

$$u = \int_{-b'/2}^{b'/2} \frac{1.5(X-x)Zp}{\pi E} \times \frac{1}{(X-x)^2 + Z^2} dx = \int_{-b'/2}^{b'/2} \frac{-1.5Zp}{2\pi E} \times \frac{d(X-x)^2}{(X-x)^2 + Z^2} = \frac{1.5Zp}{2\pi E} \ln \frac{(X+b'/2)^2 + Z^2}{(X-b'/2)^2 + Z^2}$$

其中, b' 为带状均布荷载的宽度。

当 $Q(x, z)$ 为断面上的任意一点,图 2 所示带状均布荷载下弹性土体中任意点 $Q(x, z)$ 的侧向变形为

$$u = \frac{1.5zp}{2\pi E} \ln \frac{(x+b'/2)^2 + z^2}{(x-b'/2)^2 + z^2} \quad (4)$$

1.3 带状三角形荷载下的侧向变形

三角形荷载可分为如图 3 所示的 2 种情况。

Ⅲ型三角形荷载如图 3(a)所示。三角形荷载 p 随 x 的增大而增加,且 $p(x) = px/a'$; ($0 \leq x \leq a'$), 将其代替式(3)中的荷载 p , 而任意点 $Q(X, Z)$ 到积分点的距离为 $X-x$, 通过对横断面进行积分可得

$$u_{III} = \int_0^{a'} \frac{1.5(X-x)Zp(x)}{\pi E} \times \frac{1}{(X-x)^2 + Z^2} dx =$$

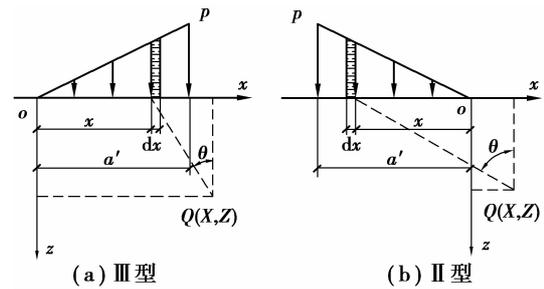


图 3 带状三角形荷载的横向积分示意图

$$\begin{aligned} & \frac{1.5Zp}{\pi Ea'} \int_0^{a'} \frac{x(X-x)}{(X-x)^2 + Z^2} dx = \\ & \frac{1.5Zp}{\pi Ea'} \int_{\arctan(\frac{X}{Z})}^{\arctan(\frac{X-a'}{Z})} \frac{[-Z^2 \tan \theta (X - Z \tan \theta)] d\theta}{[(Z \tan \theta)^2 + Z^2] \cos^2 \theta} = \\ & -\frac{1.5XZp}{\pi Ea'} \int_{\arctan(\frac{X}{Z})}^{\arctan(\frac{X-a'}{Z})} \tan \theta d\theta + \\ & \frac{1.5Z^2 p}{\pi Ea'} \int_{\arctan(\frac{X}{Z})}^{\arctan(\frac{X-a'}{Z})} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \\ & -\frac{1.5XZp}{\pi Ea'} \ln |\cos \theta| \Big|_{\arctan(\frac{X}{Z})}^{\arctan(\frac{X-a'}{Z})} + \\ & \frac{1.5Z^2 p}{\pi Ea'} \tan \theta \Big|_{\arctan(\frac{X}{Z})}^{\arctan(\frac{X-a'}{Z})} - \frac{1.5Z^2 p \theta}{\pi Ea'} \Big|_{\arctan(\frac{X}{Z})}^{\arctan(\frac{X-a'}{Z})} = \\ & \frac{1.5Zp}{2\pi E} \left\{ \frac{X}{a'} \ln \left[\frac{X^2 + Z^2}{(X-a')^2 + Z^2} \right] - 2 + \frac{2Z}{a'} \times \right. \\ & \left. \left[\tan^{-1} \left(\frac{X}{Z} \right) - \frac{2Z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{X-a'}{Z} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

其中: $X-x = Z \tan \theta$; a' 为三角形荷载的底宽。

Ⅱ型三角形荷载如图 3(b)所示。三角形荷载 p 随着 x 的增大而减小,满足 $p(x) = p(a'-x)/a'$; ($0 \leq x \leq a'$); 同样将其代入式(3),通过对横断面进行积分可得

$$\begin{aligned} u_{II} &= \int_0^{a'} \frac{1.5(X-x)Zp(x)}{\pi E} \times \frac{1}{(X-x)^2 + Z^2} dx = \\ & \int_0^{a'} \frac{1.5Zp}{\pi Ea'} \times \frac{(a'-x)(X-x)}{(X-x)^2 + Z^2} dx = \\ & \int_0^{a'} \frac{1.5Zp}{\pi E} \times \frac{X-x}{(X-x)^2 + Z^2} dx - \\ & \int_0^{a'} \frac{1.5Zp}{\pi Ea'} \times \frac{x(X-x)}{(X-x)^2 + Z^2} dx = \\ & -\frac{1.5Zp}{2\pi E} \times \ln((X-x)^2 + Z^2) \Big|_0^{a'} - \\ & \frac{1.5Zp}{\pi Ea'} \left\{ -\frac{X}{2} \ln \left(\frac{(x-X)^2}{Z^2} + 1 \right) \Big|_0^{a'} \right. \\ & \left. - Z \tan \left(\frac{X-x}{z} \right) \Big|_0^{a'} - x \Big|_0^{a'} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1.5Zp}{2\pi E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{a' - X}{a'} \ln \left[\frac{X^2 + Z^2}{(X - a')^2 + Z^2} \right] + \\ & \frac{2Z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{X - a'}{Z} \right) + 2 - \\ & \frac{2Z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{X}{Z} \right) \end{aligned} \right\}.$$

同样由于点 $Q(x, z)$ 为断面中任意一点, 所以对于 II 型、III 型三角形荷载下的侧向变形公式可表示如下: III 型三角形荷载的侧向变形公式为

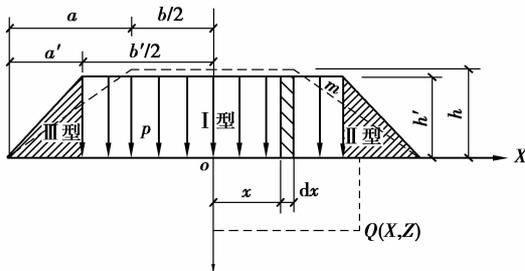
$$u_{III} = \frac{1.5zp}{2\pi E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{x}{a'} \ln \left[\frac{x^2 + z^2}{(a' - x)^2 + z^2} \right] - 2 + \frac{2z}{a'} \\ & \tan^{-1} \left(\frac{x}{z} \right) - \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x - a'}{z} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

II 型三角形荷载的侧向变形公式为

$$u_{II} = \frac{1.5zp}{2\pi E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{a' - x}{a'} \ln \left(\frac{x^2 + z^2}{(x - a')^2 + z^2} \right) + \\ & \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x - a'}{z} \right) + 2 - \\ & \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x}{z} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

1.4 带状梯形荷载下的侧向变形

图 4 中虚线所示为真实路基横断面形式, 其坡度比 m 为 1:1.5。实线为地基反力分布^[10-11], 即实线尺寸相当于为原横断面的等效荷载尺寸。在路基等效梯形荷载下地基的侧向变形等于 I 型、II 型、III 型 3 部分等效荷载分别作用下的侧向变形之和。



注: 虚线为真实路基断面实线为文献[5]所述等效路基断面

图 4 地基反力分布示意图

在进行叠加前首先要进行坐标统一, 梯形荷载的坐标原点设置在横断面对称轴与地面的交点处, 如图 4 所示。则 III 型三角形荷载向左平移了 $a' + b'/2$ 个单位, 侧向变形公式(5)可转换为

$$u_{III} = \frac{1.5zp}{2\pi E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{x + a' + b'/2}{a'} \times \\ & \ln \left[\frac{(x + a' + b'/2)^2 + z^2}{(x + b'/2)^2 + z^2} \right] + \\ & \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x + a' + b'/2}{z} \right) - \\ & \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x + b'/2}{z} \right) - 2 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

II 型三角形荷载向右平移了 $b'/2$ 个单位, 侧向变形公式(6)转换为

$$u_{II} = \frac{1.5zp}{2\pi E} \left\{ \begin{aligned} & \frac{a' + b'/2 - x}{a'} \times \\ & \ln \left(\frac{(x - b'/2)^2 + z^2}{(x - a' - b'/2)^2 + z^2} \right) + \\ & \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x - a' - b'/2}{z} \right) + 2 - \\ & \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x - b'/2}{z} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

均布矩形荷载下的侧向变形为

$$u_I = \frac{1.5zp}{2\pi E} \ln \frac{(x + b'/2)^2 + z^2}{(x - b'/2)^2 + z^2}. \quad (9)$$

梯形荷载下土体的侧向变形 u 为式(7)、式(8)、式(9)的叠加:

$$u = u_I + u_{II} + u_{III}. \quad (10)$$

2 泊松比 $\mu < 0.5$ 时的情况

2.1 土体侧向变形的微观机理

如图 5 所示, 地基中饱和土体在初始加载瞬时, 由于孔隙水来不及排出, 垂直和水平方向的有效主应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_1 + \Delta\sigma_1 - \Delta u \\ \sigma'_3 &= \sigma_3 + \Delta\sigma_3 - \Delta u \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

随着土体固结, 孔隙水随时间逐渐排出, 直到完全固结 $\Delta u = 0$, 此时土体在垂直和水平方向的有效应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_1 + \Delta\sigma_1 \\ \sigma'_3 &= \sigma_3 + \Delta\sigma_3 \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

从式(11)、(12)可以看出, 从开始排水固结到固结完成这一过程中, 土体在水平方向的有效应力增速相对于垂直方向更大, 故土体在水平方向的变形过程理论上应该是先膨胀, 后逐渐压缩, 而在垂直方向则随固结进一步压缩^[12], 随着空隙水的排出, 土体发生体变, 相应的泊松比不可能是前面讨论的 0.5 现象; 对于非饱和土体, 在荷载加载瞬间也不存初始体变为零的现象。故对于土体泊松比 $\mu < 0.5$ 的情况下, 土体侧向变形的理论解具有更加重要的实际意义。泊松比 $\mu < 0.5$ 时, 各种荷载条件下对布辛奈斯克的侧向变形解第 1 项积分过程与前面 $\mu = 0.5$ 的推导一样, 只把 1.5 系数用 $1 + \mu$ 代替就行, 而第 2 项由于不为零, 推导过程较为复杂, 下面主要对布辛奈斯克侧向变形解的第 2 项进行推导。

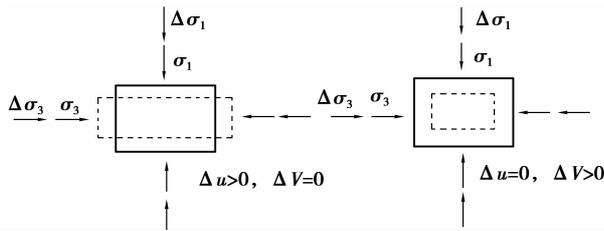


图 5 土体侧向变形的微观机理

2.2 线状荷载下的侧向变形

布辛奈斯克第 2 项解对 y 轴积分,为了简化推导过程,令 $m = \frac{(1+\mu) \times (1-2\mu)p}{2\pi E}$, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{mx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} [(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + z]} = m \left\{ \begin{array}{l} -\tan^{-1} \left(\frac{yz}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ + \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{array} \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (13)$$

由式(13)可知第 2 项积分结果中最后 2 项与 x 的正负有关,积分结果可表示为

$$u' = m \left[(-1)^i \pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{z}{x} \right) \right] \quad (14)$$

其中 $i = \begin{cases} 2, & x \geq 0; \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$

综上可知线性荷载下侧向变形解为

$$u = \frac{(1+\mu)xzp}{\pi E} \times \frac{1}{x^2 + z^2} - u' \quad (15)$$

由于 $\mu < 0.5$ 时,线性荷载对布辛奈斯克侧向变形解第 2 项积分公式与 x 值的正负有关,接下来的各种荷载形式,也需进行分类讨论。

2.3 带状均布荷载下的侧向变形

图 2 所示的带状均布荷载,当任意点 $Q(X, Z)$ 在均布荷载外侧,即 $X \geq b'/2$ 或 $X \leq -b'/2$ 时,可以保证任何情况下点 $Q(X, Z)$ 都在荷载积分区间的右侧(坐标 x 轴正向)或左侧(坐标 x 轴负向),进而保证每个积分点满足上面线性荷载条件下 $x \geq 0$ 或 $x \leq 0$ 侧向变形条件。故可进行连续积分:

$$u'_I = m \int_{-b'/2}^{b'/2} \left[(-1)^i \pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx = m \left\{ \begin{array}{l} (-1)^i \pi b' - \left[\begin{array}{l} -Z \ln \left(\frac{Z^2}{(X-x)^2} + 1 \right) \\ - 2Z \ln(X-x) \\ - 2X \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \\ + 2x \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \end{array} \right] \Big|_{-b'/2}^{b'/2} \end{array} \right\} =$$

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} (-1)^i \pi b' - Z \ln \left[\frac{Z^2 + (X+b'/2)^2}{Z^2 + (X-b'/2)^2} \right] + \\ 2 \left(X - \frac{b'}{2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-b'/2} \right) \\ - 2 \left(X + \frac{b'}{2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X+b'/2} \right) \end{array} \right\} \right\} \quad (16)$$

其中 $i = \begin{cases} 2, & X \geq b'/2; \\ 1, & X \leq -b'/2. \end{cases}$

除此之外当点 $Q(X, Z)$ 落于荷载作用范围内时,此时积分区间位于点 $Q(X, Z)$ 两侧,而两侧的积分函数不同,此时带状均布荷载下的侧向变形第 2 项解为

$$u'_I = \int_{-b'/2}^X m \left[\pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx + \int_X^{b'/2} m \left[-\pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx = m \left\{ \begin{array}{l} 2\pi X - Z \ln \left[\frac{Z^2 + (X+b'/2)^2}{Z^2 + (X-b'/2)^2} \right] + \\ 2 \left(X - b'/2 \right) \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-b'/2} \right) - \\ 2 \left(X + b'/2 \right) \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X+b'/2} \right) \end{array} \right\} \quad (17)$$

其中, $-b'/2 < X < b'/2$ 。

通过式(16)、式(17),并结合泊松比为 0.5 时的带状均布荷载下的侧向变形公式,可得泊松比 $\mu < 0.5$ 时的带状均布荷载下的侧向变形为

$$u_I = \frac{(1+\mu)zp}{2\pi E} \ln \frac{(x+b'/2)^2 + z^2}{(x-b'/2)^2 + z^2} - m \left\{ \begin{array}{l} 2\pi x' - z \ln \left[\frac{z^2 + (x+b'/2)^2}{z^2 + (x-b'/2)^2} \right] + \\ 2(x-b'/2) \tan^{-1} \left(\frac{z}{x-b'/2} \right) - \\ 2(x+b'/2) \tan^{-1} \left(\frac{z}{x+b'/2} \right) \end{array} \right\} \quad (18)$$

其中: $\begin{cases} x' = b'/2, & x \geq b'/2; \\ x' = x, & -b'/2 < x < b'/2; \\ x' = -b'/2, & x \leq -b'/2. \end{cases}$

2.4 带状三角形荷载下的侧向变形

2.4.1 III 型三角形

下面在式(15)的基础上对如图 3(a) 所示的 III 型三角形荷载的侧向变形进行探讨,当点 $Q(X, Z)$ 在三角形荷载外侧($x \leq 0, x \geq a'$)时,侧向变形第 2 项的解析解为

$$u'_{III} = \frac{m}{a'} \int_0^{a'} x \left[(-1)^i \pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx =$$

$$\frac{m}{a'} \left\{ (-1)^i \frac{\pi a'^2}{2} - \left[\begin{array}{l} x^2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) - \\ X^2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) - \\ XZ \ln \left[\frac{Z^2}{(X-x)^2} + 1 \right] + \\ Z^2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) - \\ 2XZ \ln(X-x) - xZ \end{array} \right] \right\} \Bigg|_0^{a'} =$$

$$m \left\{ \begin{array}{l} (-1)^i \frac{\pi a'}{2} - \frac{(X^2 - Z^2)}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X} \right) - \\ \frac{(a'^2 + Z^2 - X^2)}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-a'} \right) - \\ \frac{XZ}{a'} \ln \left[\frac{Z^2 + X^2}{Z^2 + (X-a')^2} \right] + Z \end{array} \right\}, \quad (19)$$

其中 $i = \begin{cases} 2, & X \geq a'; \\ 1, & X \leq 0. \end{cases}$

当点位于 $0 < x < a'$ 区间时, 侧向变形第 2 项的解析解为

$$u'_{III} = \int_0^x \frac{(1+\mu)(1-2\mu)p(x)}{2\pi E} \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx +$$

$$\int_x^{a'} \frac{(1+\mu)(1-2\mu)p(x)}{2\pi E} \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx =$$

$$\frac{m}{a'} \int_0^x x \left[\pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx +$$

$$\frac{m}{a'} \int_x^{a'} x \left[-\pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx =$$

$$m \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi X^2}{a'} - \frac{\pi a'}{2} - \frac{(X^2 - Z^2)}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X} \right) - \\ \frac{(a'^2 + Z^2 - X^2)}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-a'} \right) - \\ \frac{XZ}{a'} \ln \left[\frac{Z^2 + X^2}{Z^2 + (X-a')^2} \right] + Z \end{array} \right\}. \quad (20)$$

对式(19)、(20)的解析解进行统一, 并结合泊松比为 0.5 时的 III 型三角形荷载下的侧向变形公式, 可得泊松比小于 0.5 时 III 型三角形荷载下的侧向变形为

$$u_{III} = \frac{(1+\mu)z\rho}{2\pi E} \left\{ \frac{x}{a'} \ln \left[\frac{x^2 + z^2}{(a'-x)^2 + z^2} \right] - 2 + \frac{2z}{a'} \right\} -$$

$$m \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi x'^2}{a'} - \frac{\pi a'}{2} - \frac{x^2 - z^2}{a'} \tan^{-1} \frac{z}{x} \\ - \frac{(a'^2 + z^2 - x^2)}{a'} \tan^{-1} \frac{z}{x-a'} \\ - \frac{xz}{a'} \ln \left[\frac{z^2 + x^2}{z^2 + (x-a')^2} \right] + z \end{array} \right\}, \quad (21)$$

其中 $\begin{cases} x' = a', & x \geq a'; \\ x' = x, & 0 < x < a'; \\ x' = 0, & x \leq 0. \end{cases}$

2.4.2 II 型三角形

如图 3(b) 所示的 II 型三角形荷载当点 $Q(X, Z)$

在三角形荷载外侧 ($x \leq 0, x \geq a'$) 时, 侧向变形第 2 项的解析解为

$$u'_{II} = m \int_0^{a'} \frac{(a'-x)}{a'} \left[(-1)^i \pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx =$$

$$m \int_0^{a'} \left[(-1)^i \pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx -$$

$$\frac{m}{a'} \int_0^{a'} x \left[(-1)^i \pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx =$$

$$\begin{aligned} & (-1)^i \pi a' + \\ & Z \ln \left[\frac{Z^2 + (a'-X)^2}{(a'-X)^2} \times \frac{X^2}{Z^2 + X^2} \right] + \\ & m \left\{ \begin{array}{l} 2Z \ln \left(\frac{X-a'}{X} \right) - 2a' \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-a'} \right) + \\ 2X \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-a'} \right) - 2X \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X} \right) \end{array} \right\} - \\ & \frac{m}{a'} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^i \frac{\pi a'^2}{2} - XZ \ln \left[\frac{Z^2 + X^2}{Z^2 + (X-a')^2} \right] - \\ (a'^2 + Z^2 - X^2) \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-a'} \right) - \\ (X^2 - Z^2) \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X} \right) + a'Z \end{array} \right\} = \\ & \begin{aligned} & (-1)^i \frac{\pi a'}{2} - Z + \\ & \frac{X^2 - Z^2 - 2Xa'}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X} \right) + \\ & m \left\{ \begin{array}{l} \frac{Z^2 - (X-a')^2}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-a'} \right) + \\ \frac{(X-a')Z}{a'} \ln \left[\frac{Z^2 + X^2}{Z^2 + (X-a')^2} \right] \end{array} \right\}, \quad (22) \end{aligned} \end{aligned}$$

其中 $i = \begin{cases} 2, & X \geq a'; \\ 1, & X \leq 0. \end{cases}$

当点位于 $0 < x < a'$ 区间时, 侧向变形第 2 项的解析解为

$$u'_{II} = \int_0^x \frac{(1+\mu)(1-2\mu)p(x)}{2\pi E} \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx +$$

$$\int_x^{a'} \frac{(1+\mu)(1-2\mu)p(x)}{2\pi E} \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx =$$

$$\frac{m}{a'} \int_0^x (a'-x) \left[\pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx +$$

$$\frac{m}{a'} \int_x^{a'} (a'-x) \left[-\pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-x} \right) \right] dx =$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi a'}{2} - \frac{\pi X^2}{a'} + 2\pi X - Z + \\ \frac{X^2 - Z^2 - 2Xa'}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X} \right) + \\ \frac{Z^2 - (X-a')^2}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X-a'} \right) + \\ \frac{(X-a')Z}{a'} \ln \left[\frac{Z^2 + X^2}{Z^2 + (X-a')^2} \right] \end{array} \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

对式(22)、式(23)的解析解进行统一,并结合泊松比为 0.5 时的 II 型三角形荷载下的侧向变形公式,可得泊松比小于 0.5 时 II 型三角形荷载下的侧向变形为

$$u_{II} = \frac{(1+\mu)zp}{2\pi E} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{a'-x}{a'} \ln \left(\frac{x^2+z^2}{(x-a')^2+z^2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x-a'}{z} \right) + 2 - \right. \\ & \left. \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x}{z} \right) \right] \\ & m \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\pi a'}{2} - \frac{\pi x'^2}{a'} + 2\pi x' - z + \\ & \frac{x^2-z^2-2xa'}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{z}{x} \right) + \\ & \frac{z^2-(x-a')^2}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{z}{x-a'} \right) + \\ & \frac{(x-a')z}{a'} \ln \left[\frac{z^2+x^2}{z^2+(x-a')^2} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (24) \end{aligned} \right.$$

其中 $\begin{cases} x'=a', & x \geq a'; \\ x'=x, & 0 < x < a'; \\ x'=0, & x \leq 0. \end{cases}$

2.5 带状梯形荷载下的侧向变形

对于梯形荷载下的侧向变形解,原理与 2.4 节分析相似,可在式(18)、式(21)、式(24)的基础上进行平移然后叠加得出。如图 4 所示的梯形荷载下,均布矩形荷载相对于坐标系没有变化, III 型三角形荷载相对于坐标系向左平移了 $a'+b'/2$ 个单位, II 型三角形荷载相对于坐标系向右平移了 $b'/2$ 个单位,平移后 2 三角形荷载下的侧向变形公式如下:

$$u_{III} = \frac{(1+\mu)zp}{2\pi E} \left\{ \begin{aligned} & \left[-2 + \frac{x+a'+b'/2}{a'} \times \right. \\ & \left. \ln \left[\frac{(x+a'+b'/2)^2+z^2}{(x+b'/2)^2+z^2} \right] + \right. \\ & \left. \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x+a'+b'/2}{z} \right) - \right. \\ & \left. \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{x+b'/2}{z} \right) \right] \\ & m \left\{ \begin{aligned} & \frac{\pi(x'+a'+b'/2)^2}{a'} - \frac{\pi a'}{2} + z - \\ & \frac{a'^2+z^2-(x+a'+b'/2)^2}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{z}{x+b'/2} \right) - \\ & \frac{(x+a'+b'/2)^2-z^2}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{z}{x+a'+b'/2} \right) - \\ & \frac{(x+a'+b'/2)z}{a'} \ln \left[\frac{z^2+(x+a'+b'/2)^2}{z^2+(x+b'/2)^2} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (26) \end{aligned} \right.$$

其中 $\begin{cases} x'=-b'/2, & x \geq -b'/2; \\ x'=x, & -(a'+b'/2) < x < -b'/2; \\ x'=-a', & x \leq -(a'+b'/2). \end{cases}$

$$u_{II} = \frac{(1+\mu)zp}{2\pi E} \left\{ \begin{aligned} & \left[2 + \frac{a'+b'/2-x}{a'} \times \right. \\ & \left. \ln \left(\frac{(x-b'/2)^2+z^2}{(x-a'-b'/2)^2+z^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \frac{x-a'-b'/2}{z} \right. \\ & \left. - \frac{2z}{a'} \tan^{-1} \frac{x-b'/2}{z} \right] \\ & m \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\pi a'}{2} - \frac{\pi(x'-b'/2)^2}{a'} + 2\pi(x'-b'/2) - z + \\ & \frac{(x-a'-b'/2)^2-a'^2-z^2}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{z}{x-b'/2} \right) \\ & + \frac{z^2-(x-a'-b'/2)^2}{a'} \tan^{-1} \left(\frac{z}{x-a'-b'/2} \right) \\ & + \frac{(x-a'-b'/2)z}{a'} \ln \left[\frac{z^2+(x-b'/2)^2}{z^2+(x-a'-b'/2)^2} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (27) \end{aligned} \right.$$

其中 $\begin{cases} x'=b'/2+a', & x \geq b'/2+a'; \\ x'=x, & b'/2 < x < b'/2+a'; \\ x'=b'/2, & x \leq b'/2. \end{cases}$

讨论可得泊松比 $\mu < 0.5$ 时,带状梯形荷载下的侧向变形 u 为式(18)、式(26)、式(27)叠加之和

$$u = u_I + u_{II} + u_{III}. \quad (28)$$

上面 3 项进行平移后叠加使得表达式更加复杂,虽然表达式有利于在软件中编程使用,但实际操作中可以转换为 $uE/(zp) = k$,其中 k 是与 x/B , z/B 有关的无量纲量,其中 B 为不同荷载的底宽。对于梯形荷载下的无量纲量,就是 3 部分荷载的无量纲 k 值进行叠加。

3 侧向变形规律分析

主要讨论图 4 中实线所示等效梯形荷载作用范围外地基的侧向变形规律,为了更直接的反应侧向变形与泊松比和荷载几何尺寸等变量间的关系,使用侧向系数 uE/p 来表示侧向变形。

3.1 侧向变形与泊松比的关系

如果假设地基为弹性体,外界荷载条件一定,那么从推导的侧向变形式(3)~式(28)可知,影响地基侧向变形大小的因素有弹性模量 E 和泊松比 μ ,但影响其侧向变形分布规律的只有泊松比 μ 。假定路基顶面等效宽度 b' 为 13.4 m,路基等效高 h' 为 6 m,路基荷载容重为 20 kN/m³,采用式(28)分别计算泊松比为 0.3、0.35、0.4、0.45、0.5 时,坡脚处沿深度 z 的侧向变形。

从图 6 可知,坡脚处沿深度 z 上各点的侧向变形随着泊松比的增加而增加,并且 u_{max} 所处的深度,随泊松比的增加而减小;在 0.3~0.5 的泊松比范围

内,最大侧向变形的深度位置在 0.85~0.5 倍的荷载底面宽度 B 中变化。另一方面,当泊松比 $\mu < 0.5$ 时,地基表面一定范围内的侧向变形出现向内挤压的现象,出现内挤情况的原因是式(28)推导过程中把路基荷载简化成单一的竖向梯形荷载,并且把地基作为理想弹性体来计算。实际路基和地基两者都是柔性结构,路基填筑后,路基横断面中部的沉降大于两侧,当沉降差异到一定值后,产生土拱效应,除出现文献[13]中所述的竖向应力重分配外,也会产生水平推力,使得地表产生向外的水平位移;另外土体并非理想弹性体,当地基表层以下土体产生较大向外发展的侧向变形时,通过土颗粒之间的摩擦力和粘聚力可带动地表土体向外移动,所以在实际工程中,坡脚外地基表层土体的侧向变形很少出现向内发展的现象。这一点将在另文基于离心机模型试验和现场试验的结果的基础上予以进一步的讨论。

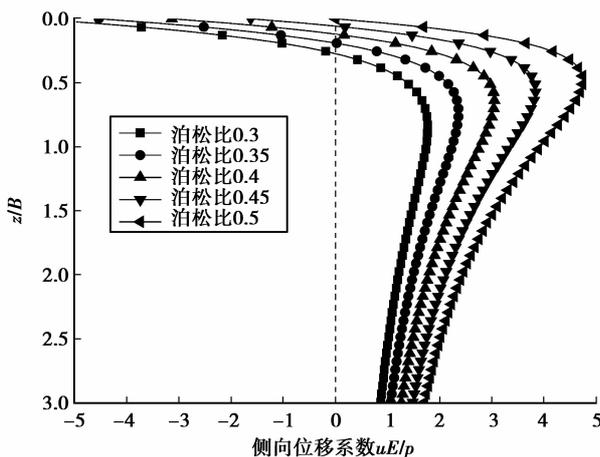


图 6 坡脚处沿深度 z 的侧向变形与泊松比关系

3.2 侧向变形与地基深度的关系

图 7 所示是等效荷载高 h' 为 6 m,等效顶面宽度 b' 为 13.4 m,路基容重为 20 kN/m^3 条件下,饱和土体(此时 $\mu = 0.5$)加载瞬间,离坡脚外不同距离地基的侧向变形随深度的变化关系。从图 7 可知,对于梯形荷载,如果弹性模量 E 为常数,那么各断面的 u_{\max} ,随着与坡脚处距离的增加而向下移动,其值也有所增加,但 u_{\max} 最后将趋于某个收敛值。

4 结 论

1)通过建立统一坐标系,分析得出地基泊松比 μ 为 0.5 时,天然均质地基在线性荷载、均布矩形荷载、三角形荷载及梯形荷载下内部各点的侧向变形解析解,在此基础上进一步推导出泊松比 $\mu < 0.5$

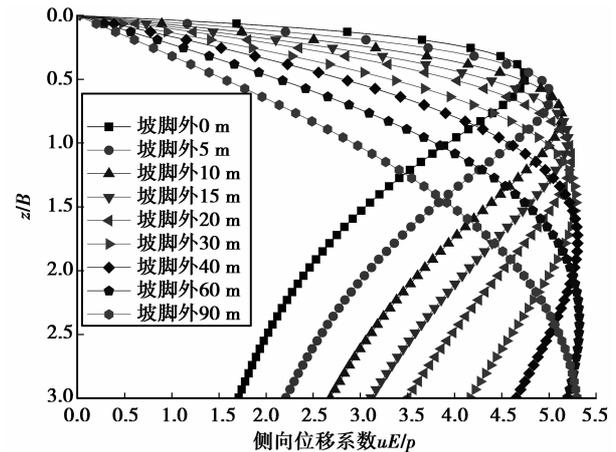


图 7 梯形荷载下坡脚外土体侧向变形与地基深度的关系

时,上述荷载下的侧向变形解析解。该方法思路清晰,数学逻辑严密,最终的侧向变形解的计算式有利于计算机编程计算。

2)在考虑路基边坡坡度和高宽比对地基反力影响下,采用文中的地基的侧向变形需与数值模拟以及现场的实测数据进行对比分析,以检验公式的适用性并进行适当的修正,此部分内容将在另文中进行探讨。

参考文献:

- [1] Loganathan N, Balasubramaniam A, Bergadott D. Deformation analysis of embankments [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 119(8): 1185-1206.
- [2] Giroud J P, Nhiem T V, Obin J P. Mecanique des solstables pour le calcul des fondations [EB/OL](2010-11-21) [2012-09-24]. <http://worldcat.org/isbn/2040073493>.
- [3] Steinbrenner W. Tafeln zur setzungberechnung [J]. Die Strasse, 1934(1):121-124.
- [4] Appolonia D J, Lambe T W. Method for predicting initial settlement[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970, 96(2):523-544.
- [5] 周镜. 软土沉降分析中的某些问题[J]. 中国铁道科学, 1999, 20(2):17-28.
ZHOU Jing. Settlement analysis of embankment on soft clay [J]. China Railway Science, 1999, 20(2): 17-28.
- [6] 殷宗泽. 土体的侧向变形[D]. 南京:第三届全国青年岩土力学与工程会议论文, 1998.
- [7] 王志亮, 高峰, 殷宗泽, 等. 考虑侧向变形的路基沉降一维法计算修正系数研究[J]. 岩土力学, 2005, 26(5): 763-768.
WANG Zhiliang, GAO Feng, YIN Zongze, et al. Study

- on modified factors for 1-D calculation of embankment settlement considering soil lateral deformation [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(5):763-768.
- [8] 王峰,金武,王宏坤,等.考虑侧向变形影响的客运专线路基沉降的修正[J].*岩土工程学报*,2010,32(Sup2):245-248.
WANG Feng, JING Wu, WANG Hongkun, et al. Amendment of subgrade settlement of passenger dedicated line considering the lateral deformation effects[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, 32 (Sup 2): 245-248.
- [9] 曾国熙.垂直荷载下软粘土地基的侧向变形[J].*浙江大学学报*,1962(1):93-124.
ZENG Guoxi. Lateral deformation of soft clay foundation under vertical load [J]. *Journal of Zhejiang University* 1962(1): 93-124.
- [10] 蒋关鲁,王海龙,李安洪,等.土质路基荷载下地基反力试验研究[J].*铁道学报*,2012,34(6):69-74.
JIANG Guanlu, WANG Hailong, LI Anhong, et al. Experimental study on ground reaction under subgrade [J]. *Journal of the China Railway Society*, 2012,34(6):69-74.
- [11] 蒋关鲁,王海龙,李安洪.高速铁路路基基底应力计算方法研究[J].*铁道建筑*,2009(4):65-69.
JIANG Guanlu, WANG Hailong, LI Anhong. Study on the calculation method of High Speed Railway substrate base-stress [J]. *Railway Engineering*, 2009 (4): 65-69.
- [12] 钱家欢,殷宗泽.土工原理与计算[M].2版.北京:中国水利水电出版社,2003.

(编辑 陈移峰)

~~~~~

(上接第 80 页)

- [10] Moreira W S C, Mussoi F L R, Teive R C G. Investment prioritizing in distribution systems based on multi-objective genetic algorithm [C]//Proceedings of the 2009 15th International Conference on Intelligent System Applications to Power Systems, November 8-12, 2009 Curitiba, Brazil. Piscataway: IEEE Press, 2009: 1-6.
- [11] 雷英杰,张善文,李继武,等. MATLAB 遗传算法工具箱及应用[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2005.
- [12] 麻秀范,张粒子.基于十进制编码的配网重构遗传算法[J].*电工技术学报*,2004,19(10):65-69.  
MA Xiufan, ZHANG Lizi. Distribution network reconfiguration based on genetic algorithm using decimal encoding [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2004, 19(10): 65-69.
- [13] 赵文举,马孝义,张建兴,等.基于模拟退火遗传算法的渠系配水优化编组模型研究[J].*水力发电学报*,2009,28(5):210-214.  
ZHAO Wenju, MA Xiaoyi, ZHANG Jianxing, et al. Optimal water delivery marshalling model based on simulated annealing genetic algorithm [J]. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2009, 28(5): 210-214.
- [14] 陈浩,李军,唐宇,等.基于动态罚函数遗传算法的电磁探测卫星多星规划方法[J].*国防科技大学学报*,2009,31(2):44-50.  
CHEN Hao, LI Jun, TANG Yu, et al. An approach for electromagnetic detection satellites scheduling based on genetic algorithm with dynamic punish function [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2009, 31(2): 44-50.
- [15] 王瑞琪,张承慧,李珂.基于改进混沌优化的多目标遗传算法[J].*控制与决策*,2011,26(9):1391-1396.  
WANG Ruiqi, ZHANG Chenghui, LI Ke. Multi-objective genetic algorithm based on improved chaotic optimization [J]. *Control and Decision*, 2011, 26 (9): 1391-1396.

(编辑 詹燕平)