

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2016.05.004

不同端部形状的细长圆柱体的附加质量研究

张 丹¹, 冯双双², 魏晓娟³, 孙 磊⁴, 谢凌志¹, 魏泳涛¹

(1. 四川大学 建筑与环境学院, 成都 610065; 2. 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 629100;

3. 四川电力职业技术学院 动力工程系, 成都 610072; 4. 中国核动力研究设计院

反应堆结构力学研究所, 成都 610041)

摘 要: 基于势流理论, 并结合有限单元法, 研究了在流体中运动物体的附加质量。首先, 通过无限域中小球及管流中作横向运动的圆柱的附加质量的计算, 验证了算法的正确性。其次, 着重分析了具有不同端部形状的细长圆柱体在不同直径的无限长管流中沿轴向运动时的附加质量。结果表明: 在管流外半径一定的情况下, 细长圆柱体的附加质量与其柱体长度成线性关系, 其斜率随着圆柱与管壁间距离的减小而迅速增大; 而且, 当圆柱体长度远大于其直径时, 其两端的形状对其附加质量影响不大。

关键词: 附加质量; 势流; 有限单元法

中图分类号: O351.2

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2016)05-026-08

Added mass of slender cylinders with different end shapes

ZHANG Dan¹, FENG Shuangshuang², WEI Xiaojuan³,

SUN Lei⁴, XIE Lingzhi¹, WEI Yongtao¹

(1. College of Architecture and Environment, Sichuan University, Chengdu 610065, P.R.China;

2. Aerodynamics Research and Development Center of China, Mianyang 629100, Sichuan, P.R.China;

3. Department of Power Engineering, Sichuan Electric Vocational and Technical College,

Chengdu 610072, P.R.China; 4. Institute of Reactor Structure Mechanics, Nuclear Power

Institute of China, Chengdu 610041, P.R.China)

Abstract: Based on the potential theory and the finite element method, the added mass of objects moving in fluid was studied. Firstly, the added mass of a ball in the infinite domain and the added mass of a cylinder in lateral motion in a tube were calculated to verify the validation of the codes. Then the added mass for slender cylinders with different end shapes moving axially in a long tube fluid was analyzed. The results show that under a given diameter of the tube, the added mass for the slender cylinder is proportional to its length. And the slope of the linear relationship increases rapidly with the decrease of the distance between the slender cylinder and tube wall. Moreover, when the length of the cylinder is much larger than its diameter, the shapes of the cylinder ends have little influence on the added mass.

Keywords: added mass; potential flow; finite element method

收稿日期: 2015-10-12

基金项目: 四川省科技厅应用基础研究项目(重大前沿)(2015JY0280)。

Supported by Applied Basic Research Project of Science and Technology Department of Sichuan Province (2015JY0280).

作者简介: 张丹(1991-), 女, 主要从事流体力学研究, (E-mail) 963733532@qq.com。

魏泳涛(联系人), 男, 博士, 教授, 主要从事有限单元法的理论研究及其工程应用, 以及杂多物理耦合场的数值分析, (E-mail) wyt2119@scu.edu.cn。

物体在流体中运动时会推动周围流体产生运动,从而受到流体施加的与运动物体加速度方向相反的反作用力,即所谓的惯性阻力。理论研究表明,即便物体在理想流体中作加速运动,该项阻力也会存在,且与物体的加速度成正比,其比即为附加质量。

对球体和圆柱体在无限域流体中的附加质量已有解析解^[1-2]。基于势流理论,许多学者采用各种方法获得了物体的附加质量。陈材侃^[3]借助于以势函数泛函表示的附加质量极大值原理,计算了圆球的附加质量系数。许维德等^[4]计算了在无界域中及固壁附近运动回转体的附加质量。杨松林等^[5]对直水道中细长体的附加质量进行了计算和研究。Landweber等^[6]利用积分方程法研究了在无旋流中发生对心碰撞的2个物体的附加质量。David^[7-8]通过 Schwarz-Christoffel 保角变换,研究了在浅水区域中椭圆柱的附加质量系数。林超友等^[9]利用 Hess-Smith 方法计算了潜艇的附加质量。李宝元等^[10]采用三维有限元法,计算了船在进出船厢运动中的附加质量。刘丹等^[11]研究了在平流层飞艇的附加质量及其对飞艇运动的影响。王恭义^[12]研究了物体在带自由表面的流体中作任意运动的附加质量。Pantaleone等^[13]对圆球在抛体运动中的附加质量进行了试验研究。Sherwood^[14]研究了2个共轴无厚度圆盘在无旋不可压缩流中发生轴向相对加速运动时的附加质量。Efstathios^[15]研究了在自由流中作振动的圆柱的附加质量。Miroslav等^[16]直接通过流场数值模拟,研究了刚性和可变形的球冠状物体的附加质量系数。目前,对于细长圆柱体在小间隙管流中作轴向运动的附加质量的研究尚不充分,冯双双等^[17]利用 CFX 计算了短粗圆柱体在小间隙管道中作轴向运动的附加质量,但仍未涉及在反应堆工程上有很大应用价值的大长细比圆柱体的情况。例如,当发生地震时,核电站反应堆的控制棒组件应在自重作用下插入堆芯以使反应堆及时停堆。控制棒的长细比通常大于 10^3 ,且其与管道的间隙不足 1 mm。因此,开展细长圆柱体在小间隙管流中作轴向运动的附加质量的研究,对确保反应堆在地震作用下的安全停堆具有很大意义。

基于势流理论确定物体附加质量。通过将无限域中小球及圆管中作横向运动的圆柱的附加质量的数值解与解析解的对比,验证了算法的正确性。论文着重研究了具有不同端部形状的细长圆柱体在无限长管流中沿轴向运动时的附加质量,分析了不同长度的细长圆柱体在不同管流外径下的附加质量,揭示了细长圆柱体附加质量与柱体长度的线性关系;研究还表明,具有不同端部形状的细长圆柱体,其附加质量非常接近。

1 基于势流理论的附加质量计算方法

1.1 基本公式

当物体在势流(即理想不可压缩无旋流)中沿某方向作加速运动时,在该方向所引发的附加质量的计算公式为^[1]

$$m = -\rho \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds + \rho \iint_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_1} ds, \quad (1)$$

式中: S_0 为物体表面(流体内边界面); S 为流体域的(外)边界面; n 和 n_1 分别为 S_0 和 S 的外法线; φ_0 是物体在运动方向上以单位速度运动时在流场中产生的速度势,即单位速度势。

若流场无限大,或流场外表面上速度为零,则式(1)中对 S 的积分可略去不计。即附加质量公式简化为

$$m = -\rho \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds. \quad (2)$$

势流的速度势 φ_0 服从 Laplace 方程

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

若在轴对称下,则相应的 Laplace 方程如下

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

式(4)中, x 为半径, y 为旋转对称轴。

若 Γ_1 和 Γ_2 为边界 S_0 的一个划分,则边界条件为

$$\text{Dirichlet 条件: } \varphi_0 = \tilde{\varphi} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (5)$$

$$\text{Neumann 条件: } V_n = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = \nabla \varphi_0 \cdot \mathbf{n} = f \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (6)$$

其中: $\tilde{\Phi}$ 是 Γ_1 上给定的速度势的值; f 为 Γ_2 上流体的外法线速度, 它可由物体沿某方向的单位速度以及 S_0 的法线方向确定出 (Γ_2 是 S_0 的一部分)。

对式(3)~(6)所构成的定解问题, 可利用有限单元法进行求解, 详见文献[18]。解得单位速度势后, 代入式(2), 在物体的边界上积分即可求得物体的附加质量。

对于该 Laplace 方程的定解问题, 具体的边界条件取法如下:

1) 在固壁边界及流线上, 即外圆管的柱面, 由于没有法向速度, 因此可不必施加边界条件。

2) 在具有未知法向速度的边界上, 施加本质边界条件(即自由度约束)。外圆管的上下底面可视为无限远处, 边界条件为

$$\varphi_0 = 0. \quad (7)$$

3) 在运动物体表面, 依据物体运动速度及表面法线方向确定出流场侧的外法线速度, 从而施加 Neumann 条件(6)。

1.2 验证算例

以 2 个有理论解的算例来考察研究算法及所编写代码的正确性。

1.2.1 无限域中运动的小球的附加质量

如图 1(a), 考察无限流域中小球的附加质量。采用轴对称模型, 小球半径为 1, 沿轴向运动。计算区域的径向尺寸 R 为 10, 轴向尺寸 H 为 100, 边界条件为指定小球边界上(流体侧)的外法线速度, 以及指定无限远处一点(流域下边界一点)势为零, 其余边界无需指定边界条件。图 1(b)是小球附近区域的局部网格。程序的计算结果为 0.500 672, 与理论解 0.5 非常吻合。

1.2.2 圆柱在同心圆管中横向运动的附加质量

半径为 R 、内部充满密度为 $\rho=1$ 的无限长圆筒, 其中有半径为 $r=1$ 的无限长同心圆柱。当圆柱在轴线处开始作横向运动时, 此时单位长度圆柱的附加质量的解析解为

$$m = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \cdot \pi r^2. \quad (8)$$

考虑对称性, 计算模型如图 2(a)所示, 图 2(b)是其网格划分。边界条件为指定圆柱边界上(流体侧)的外法线速度, 其余边界无需指定边界条件, 即零法向速度。

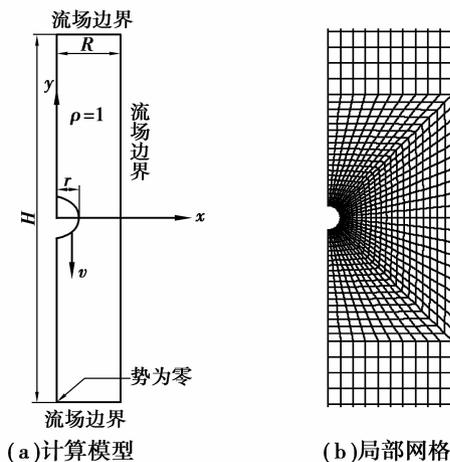


图 1 小球在无限域中运动的
计算模型和网格

Fig.1 The computation model and mesh of a ball moving in infinite fluid domain

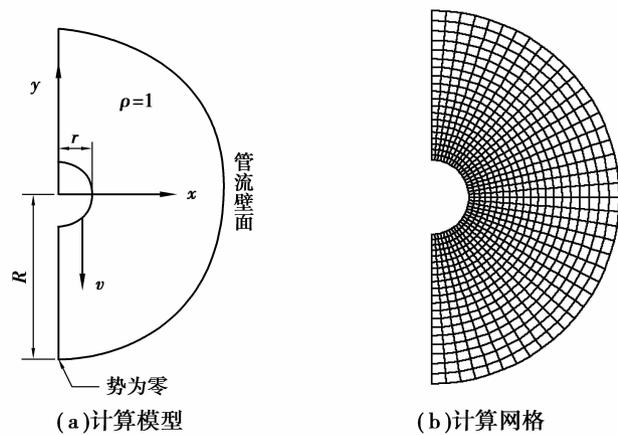


图 2 圆柱在同心圆管流作横向运动的
计算模型及网格 ($R=5$)

Fig.2 The computation model and mesh of a cylinder moving laterally in coaxial pipe ($R=5$)

分别计算外圆柱半径依次为 $R=5、10、15、20$ 的情况,并与解析解对比,见表 1。由计算结果可以看出,计算值与理论值非常吻合。

表 1 圆柱在同心圆柱中横向运动的附加质量

Table 1 The added mass of cylinders moving laterally in coaxial pipes

外圆柱半径 R	附加质量(理论值)	附加质量(计算值)	相对误差/%
5	3.403 392	3.403 38	-0.000 353
10	3.205 06	3.204 82	-0.007 488
15	3.169 64	3.169 04	-0.018 93
20	3.157 34	3.154 06	-0.103 885

2 细长圆柱体的附加质量研究

对在圆管流中作横向运动的同心圆柱体,式(8)给出了其附加质量的解析解。然而,对在管流中沿轴向运动的同心圆柱体,如反应堆中的控制棒在堆芯导向筒内的落棒运动,其附加质量的分析目前可用的研究成果还较少。因此,此处着重研究具有不同端部形状的细长圆柱体在无限长管流中沿轴向运动时的附加质量,并通过改变管流半径、圆柱体长度等参数,揭示圆柱体的附加质量与这些参数的函数关系。

2.1 计算模型

研究具有不同端部形状的细长圆柱体在无限长管流中沿轴向运动时的附加质量,分别考察细长圆柱体两端不带物体(平头圆柱体)、两端带半球(圆头圆柱体)及两端带圆锥(锥头圆柱体)的附加质量,采用轴对称模型。图 3 是不同端部形状下分析区域的示意图。

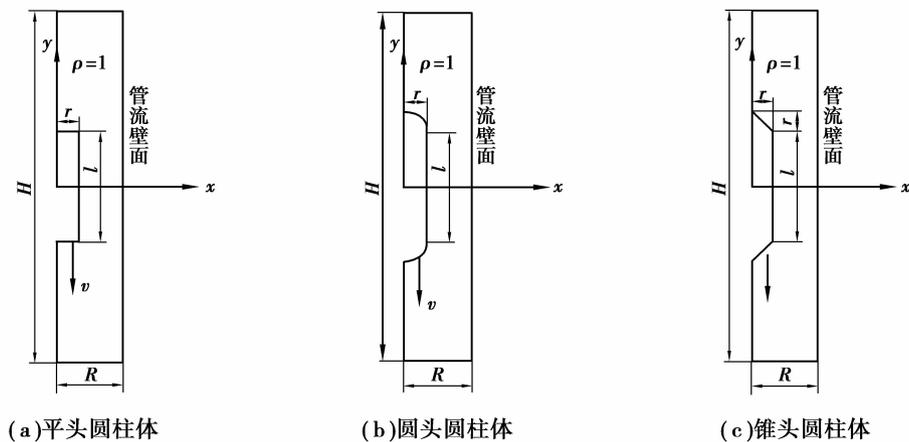


图 3 圆柱体在无限长管流中沿轴向运动的计算模型

Fig.3 The computational model of cylinders moving axially in infinite pipe

如图 3,圆柱半径 $r=1$,长度依次设为 $l=5、10、20、30、40、50、60、70、80、90、100$ 。流体密度为 $\rho=1$,管流半径依次设为 $R=1.1、1.2、1.3、1.4、1.5、2、5$ 和 10 。为模拟无限的管流,取管流长度为圆柱长度的 200 倍,即 $H=200l$ 。圆柱以单位速度沿轴向(即 y 方向)运动,此时边界条件为指定细长圆柱上下底面边界上(流体侧)的外法线速度,以及指定无限远处一点(流域下边界一点)势为零,其余边界无需指定边界条件。图 4 在 $R=2, l=5$ 时的细长圆柱体底面附近区域的局部网格。

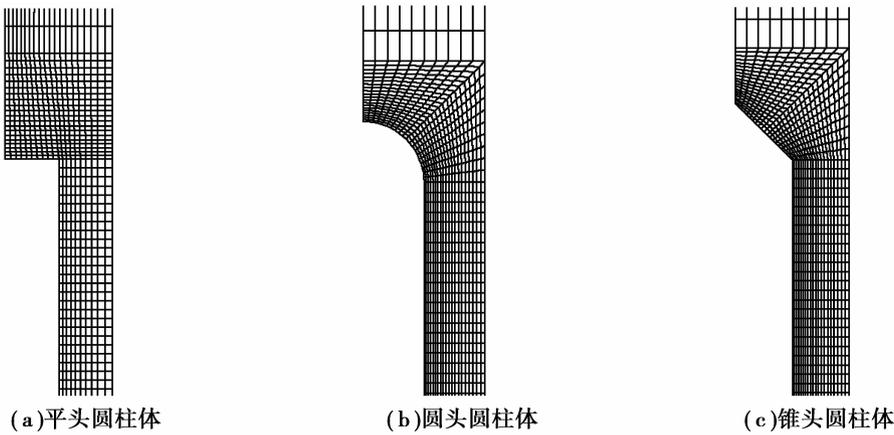


图 4 圆柱端部网格 ($R=2, l=5$)

Fig.4 The partial mesh around the cylinder end ($R=2, l=5$)

2.2 计算结果

数值分析的结果表明,在 $\frac{l}{r} \geq 5$ 时,圆柱的附加质量与柱体长度成线性关系,图 5 是 $\frac{R}{r}=1.1$ 时,不同端部形状的细长圆柱的附加质量与柱体长度的拟合曲线。可以看出,不同的端部形状对附加质量的影响较小。

当 $\frac{R}{r}=1.1$ 时,不同端部形状的细长圆柱的附加质量与柱体长度的拟合函数为

1) 平头圆柱体

$$m = 14.96l + 4.404; \tag{9}$$

2) 圆头圆柱体

$$m = 14.96l + 12.81; \tag{10}$$

3) 锥头圆柱体

$$m = 14.96l + 5.143. \tag{11}$$

在其他管流半径下,会得到相同的线性关系,其线性关系见表 2。

表 2 不同管径比下的斜率和截距

Table 2 The slopes and intercepts under different ratios of diameter

R/r	平头圆柱体		圆头圆柱体		锥头圆柱体	
	斜率 k	截距 b	斜率 k	截距 b	斜率 k	截距 b
1.2	7.140	3.755	7.140	7.724	7.140	3.745
1.3	4.553	3.490	4.553	5.746	4.553	3.134
1.4	3.272	3.352	3.272	4.697	3.272	2.797
1.5	2.513	3.274	2.513	4.054	2.513	2.590
2.0	1.047	3.226	1.047	2.820	1.047	2.229
5.0	0.131	3.535	0.131	2.375	0.131	2.349
10.0	0.032	3.711	0.032	2.509	0.032	2.536

需要指出的是,以上线性关系均是在 $l \geq 5r$ 时成立。在 $l < 5r$ 时,圆柱与管壁间距离越小,圆柱的附加质量与其柱体长度的线性关系越良好。图 6 是管流半径分别是 $R=1.1$ 和 $R=10$,圆柱长度分别是 $l=1, 2,$

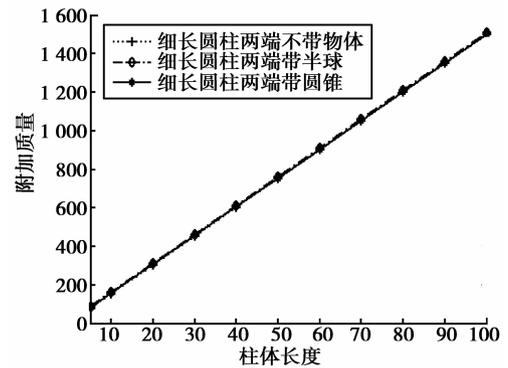


图 5 不同端部形状的细长圆柱的附加质量与柱体长度拟合曲线 ($R=1.1$)

Fig.5 The fitted curves between the added mass and the cylinder length ($R=1.1$)

3、4、5、6、7、8、9、10 时,圆头圆柱体附加质量与其长度的关系。

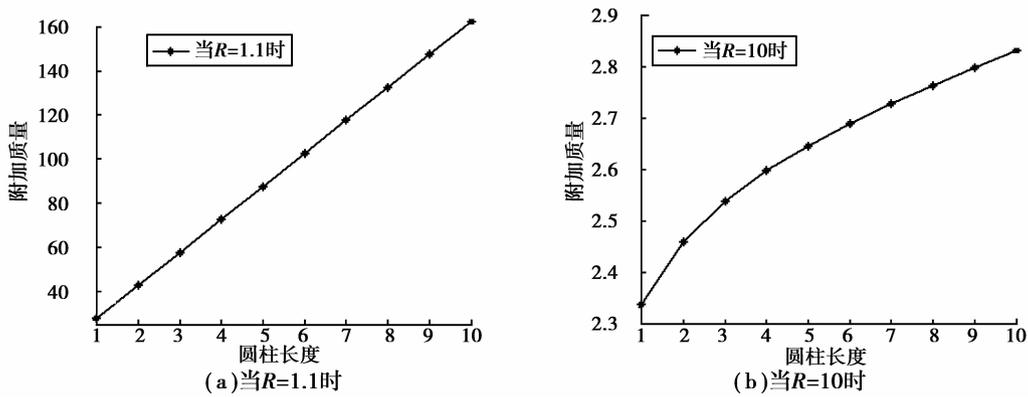


图 6 非细长圆头圆柱体附加质量与其长度的关系

Fig.6 The relationship between added mass and length of short cylinder with rounded end

2.3 结果分析

数值分析结果可知,圆柱的附加质量与其柱体长度的线性关系依赖于管流半径与圆柱半径之比,管径比 $\alpha=R/r$ 。为方便工程应用,将线性关系中的斜率 k 和截距 b 与管径比 α 的变化关系拟合如下函数。

1)平头圆柱体

$$k = \frac{3.137}{\alpha^2 - 0.003\ 027\alpha - 0.996\ 9}, b = \frac{3.925\alpha^2 - 3.768\alpha + 0.755\ 1}{\alpha^2 - 0.372\alpha - 0.492\ 2}, \tag{12}$$

其拟合误差平方和分别为 $1.232e-07, 6.676e-05$ 。

2)圆头圆柱体

$$k = \frac{3.138}{\alpha^2 - 0.002\ 531\alpha - 0.997\ 4}, b = \frac{2.831\alpha^2 - 1.983\alpha + 3.652}{\alpha^2 + 0.792\ 7\alpha - 1.7}, \tag{13}$$

其拟合误差平方和分别为 $1.274e-07, 0.000\ 510\ 3$ 。

3)锥头圆柱体

$$k = \frac{3.138}{\alpha^2 - 0.002\ 738\alpha - 0.997\ 2}, b = \frac{2.827\alpha^2 - 2.316\alpha + 1.324}{\alpha^2 + 0.400\ 3\alpha - 1.223}, \tag{14}$$

其拟合误差平方和分别为 $9.514e-08, 0.000\ 162\ 8$ 。

物体的附加质量系数 λ 等于其附加质量除以排开流体的质量,即

$$\lambda = \frac{m}{\rho V}. \tag{15}$$

将附加质量的计算结果代入上式计算圆柱的附加质量系数。当圆柱长度 $l=10$ 时,不同管径比下,圆头圆柱体的附加质量系数 λ 的变化曲线见图 7。当圆柱长度 $l=10$ 时,不同端部形状的圆柱的附加质量系数 λ 与管径比 α 的拟合函数为

1)平头圆柱体

$$\lambda = \frac{0.126\ 5\alpha^2 - 0.087\ 75\alpha + 0.977\ 3}{\alpha^2 - 0.003\ 037\alpha - 0.995\ 8}, \tag{16}$$

其拟合误差平方和为 $1.802e-07$ 。

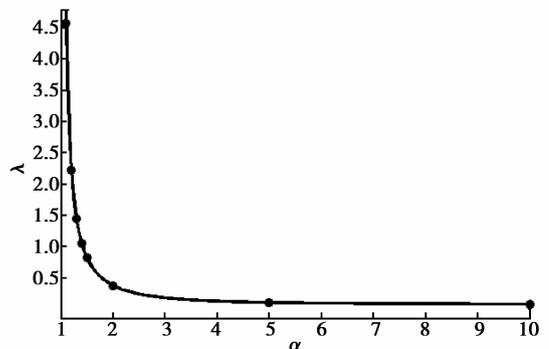


图 7 圆头圆柱的附加质量系数与管径比关系 ($l=10$)

Fig.7 The relationship between added mass coefficients and ratio of diameters ($l=10$)

2) 圆头圆柱体

$$\lambda = \frac{0.080\ 83\alpha^2 - 0.111\ 9\alpha + 1.121}{\alpha^2 + 0.260\ 7\alpha - 1.257}, \quad (17)$$

其拟合误差平方和为 $7.479e-07$ 。

3) 锥头圆柱体

$$\lambda = \frac{0.086\ 56\alpha^2 - 0.110\ 3\alpha + 1.089}{\alpha^2 + 0.199\ 4\alpha - 1.197}, \quad (18)$$

其拟合误差平方和为 $5.156e-07$ 。

对于圆头圆柱体,其附加质量系数与管径比的拟合结果与文献[17]结论一致。

3 结 论

1) 在管流半径一定的情况下,细长圆柱体的附加质量与其柱体长度成线性关系,其斜率随着圆柱与管壁间距离的减小而迅速增大,给出了该线性关系的斜率和截距与管径比的拟合函数;

2) 不同端部形状的细长圆柱体的附加质量十分接近,圆柱端部形状对其附加质量影响很小;

3) 当圆柱长度一定时,其附加质量系数随管径比的减小而迅速增大,本文给出了当 $l=10$ 时圆柱附加质量系数与管径比的拟合函数。对于圆头圆柱体的拟合结果与文献[17]结论一致。

参考文献:

- [1] 茅春浦. 流体力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1999: 118-128.
MAO Chunpu. Fluid mechanics[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 1999: 118-128. (in Chinese)
- [2] 吴望一. 流体力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000: 154-166.
WU Wangyi. Fluid mechanics[M]. Beijing: Peking University Press, 2000: 154-166. (in Chinese)
- [3] 陈材侃. 轴对称势流有限元分析及附加质量计算[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 1986, 14(1): 47-52.
CHEN Caikan. Finite element analysis of axisymmetric potential flow and calculation of added-mass[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology(Natural Science Edition), 1986, 14(1): 47-52. (in Chinese)
- [4] 许维德, 林建国. 细长回转体附加质量的数值计算[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 1986, (2): 70-81.
XU Weide, LIN Jianguo. Numerical calculation of added masses of slender bodies of revolution[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics(A), 1986, 1(2): 70-81. (in Chinese)
- [5] 杨松林, 王太舒. 直水道中细长体附加质量的计算和试验研究[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 1990, 5(3): 60-66.
YANG Songlin, WANG Taishu. Numerical and experimental investigation of added mass of a slender body in straight canal[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics(A), 1990, 5(3): 60-66. (in Chinese)
- [6] Landweber L, Shahshahan A. Added masses and forces on 2 bodies approaching central impact in an inviscid fluid[J]. Journal of Ship Research, 1992, 36(2): 99-122.
- [7] David C. Calculation of the added mass of elliptical cylinders in shallow water[J]. Ocean Engineering, 2001, 28: 1361-1381.
- [8] David Clarke. Calculation of the added mass of elliptical cylinders with vertical fins in shallow water[J]. Ocean Engineering, 2002, 30: 1-22.
- [9] 林超友, 朱军. 潜艇近海底航行附加质量数值计算[J]. 船舶工程, 2003, 25(1): 26-29.
LIN Chaoyou, ZHU Jun. Numerical computation of added mass of submarine maneuvering with small clearance to sea-

- bottom[J]. *Ship Engineering*, 2003,25(1):26-29.(in Chinese)
- [10] 李宝元,姜昱汐.船舶在进出船厢运动中的附加质量的计算[J].*计算力学学报*,2003,20(3):350-354.
LI Baoyuan, JIANG Yuxi. Calculation of added mass for sip entering and leaving a ship-box[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003,20(3):350-354.(in Chinese)
- [11] 刘丹,王晓亮,单雪雄.平流层飞艇的附加质量及其对飞艇运动的影响[J].*计算机仿真*,2006,23(6):52-56.
LIU Dan, Wang Xiaoliang, Shan Xuexiong. Added mass to stratospheric airship and its effect on motion[J]. *Computer Simulation*, 2006,23(06):52-56.(in Chinese)
- [12] 王恭义.物体在带自由表面的流体中作任意运动的附加质量[D].大连:大连理工大学,2007.
WANG Gongyi. Added mass for bodies moving arbitrarily in fluid with free surface[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2007.(in Chinese)
- [13] Pantaleone J, Messer J. The added mass of a spherical projectile[J]. *American Journal of Physics*, 2011,79(12):1202-1210.
- [14] Sherwood J D. Added mass of a pair of discs[J]. *Physics of Fluid*, 2011,23(10):103601-103607.
- [15] Efstathios K. Added mass of a circular cylinder oscillating in a free stream[J]. *Proceedings of the Royal Society A*,2013,469:135-143.
- [16] MIroslav S, MIroslav P, Marek C R. Added mass of a spherical cap body[J]. *Chemical Engineering Science*,2014,118:1-8.
- [17] 冯双双,魏晓娟,孙磊,等.流场中沿轴向运动圆柱的附加质量计算[J].*计算机辅助工程*,2015,24(2):42-46.
FENG Shuangshuang, Wei Xiaojuan, Sun Lei, et al. Calculation on added mass of cylinder moving along its axis in flow field[J]. *Computer Aided Engineering*, 2015,24(2):42-46.(in Chinese)
- [18] 王勖成,邵敏.有限单元法基本原理和数值方法(第二版)[M].北京:清华大学出版社,1995.
WANG Xucheng, SHAO Min. The basic principle of the finite element method and numerical method(Second Edition)[M]. Beijing: Peking University Press,1995.(in Chinese)

(编辑 侯 湘)