

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2016.05.009

颗粒增强复合材料有效模量的 Voronoi 单元有限元法分析

黄永霞, 郭 然, 李 伟

(昆明理工大学 建筑工程学院, 昆明 650500)

摘 要: Voronoi 单元有限元法在计算多相复合材料时比普通位移有限元法效率高, 并且能够反映夹杂分布的随机性。用考虑界面脱层的 Voronoi 单元有限元法对代表性体积单元进行模拟得到应力场, 再用直接均匀化方法进行平均, 得到能够反映界面脱层对材料有效性能影响的平均应力-应变曲线和有效弹性模量。利用编写的可以对含任意夹杂代表性体积单元进行大规模计算的程序, 对多个模型进行了数值模拟, 分析了夹杂的形状、体积分数、空间分布等因素对材料有效弹性模量的影响, 结果表明: 具有较大有效弹性模量的模型一般在界面处有较大的应力集中, 在加载过程中较早发生界面脱层。

关键词: 颗粒增强复合材料; Voronoi 单元有限元法; 代表性体积单元; 均匀化方法; 有效弹性模量

中图分类号: TB332

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2016)05-063-10

Finite element method based on Voronoi cell for the effective modulus of particle reinforced composites

HUANG Yongxia, GUO Ran, LI Wei

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, P.R.China)

Abstract: Finite element method based on interfacial debonding Voronoi cell, including random information of inclusion distribution, is more efficient than displacement finite element method in simulating multiphase composite. The finite element method based on interfacial debonding Voronoi cell was used to simulate the representative volume element(RVE) to obtain the stress field. And then the average stress-strain curve, which can reflect the influence of the interfacial debonding on the effective properties of the materials, and effective elastic modulus were obtained by using the direct homogenization method. We simulated several models using the program which can simulate the representative volume elements containing arbitrary inclusion on a large scale, and analyzed the influences of the shape, the volume fraction and the spatial distribution of inclusion on the effective elastic modulus of the material. The results show that the model which has a large effective elastic modulus generally has a strong stress concentration at the interface, and the interfacial debonding occurs earlier during the loading process.

Keywords: particle reinforced composites; Voronoi element finite element method; representative volume element; homogenization method; effective elastic modulus

收稿日期: 2016-06-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(KKGD201206020, KKGA201506009)。

Supported by National Natural Science Foundation of China(KKGD201206020, KKGA201506009).

作者简介: 黄永霞(1987-), 女, 硕士研究生, 主要从事计算固体力学研究, (E-mail)yongxia0813@163.com。

郭然(联系人), 男, 昆明理工大学教授, 硕士生导师, (E-mail)prof.guo@189.cn。

颗粒增强复合材料在宏观上具有均匀性。从复合材料细观结构预测其宏观性能一般有两种方法,即解析法和有限元法。解析法中较成熟的有 Eshelby 等效夹杂理论、变分法、自洽法、Mori-Tanaka 法等,在分析几何体简单、夹杂体积分数小的模型时,估计的材料宏观等效性能较为合理有效,但无法描述微结构的应力应变演化,也不能处理含任意微结构的问题。为了克服这种局限性,基于单胞模型的有限元计算方法越来越流行。这种方法通过细化微结构上的代表性体积单元(representative volume element, RVE)得到等效材料的响应和演化。廖光开等^[1]建立了计算钨丝增强铝基块体非晶复合材料等效弹性常数的理论模型,结合有限元法对该复合材料等效弹性常数进行了数值计算。谢桂兰等^[2]利用均匀化有限元方法,预测了碳纳米管和纳米薄层各参数对复合材料层合板的宏观弹性模量的影响。李涛等^[3]建立了非连续长玻纤增强复合材料的代表性体积单元,研究了采用均匀化方法预测长玻纤增强聚丙烯注塑件的弹性力学性能的可行性。

基于单胞模型来预测复合材料宏观等效性能的研究很多,但是,大多研究都采用含单个夹杂的简单单胞模型。而实际夹杂微结构的大小、形状、空间分布大多是随机的,因此,需要采用能够反映随机微结构的单胞模型。1991年, Ghosh 等^[4]提出了 Voronoi 单元有限元法(voronoi cell finite element method, VCFEM)。VCFEM 法是在材料横截面扫描图基础上划分常规的 Voronoi 网格图,能够准确地描述材料微结构大小、形状和空间分布的随机性。VCFEM 法在计算多相复合材料时具有单元数量少计算效率高等优越性。2000年, Moorthy 和 Ghosh 进一步研究了 VCFEM 的单元适应性和收敛性问题^[5],验证了 VCFEM 解的正确性。VCFEM 法已经推广到许多复杂复合材料的研究中。2012年, Dong 等^[6]发展了适用于复合材料和多孔材料的细观力学模型的 T-trefftz Voronoi 单元有限元法。2013年, Ghosh 等^[7]通过 LE-VCFEM 法对非均质的铝合金的局部韧性断裂进行了分析。徐佳丽^[8]基于 VCFEM 法对颗粒复合增强材料的研究引入传统有限元计算方法,实现了两种单元的混合运算。郭隽^[9]结合危险区域自检技术在危险区域进行了 Voronoi 网格的重生。

笔者把能反映界面脱层的 VCFEM 方法和直接均匀化方法结合起来研究颗粒增强复合材料的有效弹性模量。采用 VCFEM 方法对代表性体积单元进行细观结构分析,得到细观应力场,然后进行平均化,得到平均应力-应变曲线和材料的有效宏观弹性模量。此方法得到的平均应力-应变曲线可以反映夹杂基体界面脱层对材料有效性能的影响。对多个模型进行了数值模拟,分析了夹杂微结构的形状、体积分数、空间分布等因素对材料有效弹性模量的影响。

1 考虑界面脱层的 Voronoi 单元原理

Ghosh 等^[4]基于卞学璜提出的应力杂交元法提出了 Voronoi 单元的构造原理。郭然^[10]改进了应力函数的选取和积分区域的划分并给出了考虑界面脱层的 Voronoi 单元构造方法。笔者采用郭然提出的考虑界面脱层的 Voronoi 单元有限元法。

夹杂颗粒随机分布的代表性体积单元的 Voronoi 单元划分如图 1 所示^[4]。若考虑界面脱层,则每个 Voronoi 单元如图 2 所示^[10]。其中, Ω_m 为基体部分, Ω_c 为夹杂部分, $\partial\Omega_{ie}$ 为面力边界, $\partial\Omega_e$ 为单元间边界, $\partial\Omega_b$ 为基体夹杂界面未脱层边界, $\partial\Omega_m$ 为脱粘部分基体侧边界, $\partial\Omega_c$ 为脱粘部分夹杂侧边界;单元外边界上外法线向量为 n^e , 基体夹杂未脱层边界处指向基体侧的法向向量为 n^b , 基体夹杂脱层处基体边缘的法向向量为 n^m , 基体夹杂脱层处夹杂边缘的法向向量为 n^c 。

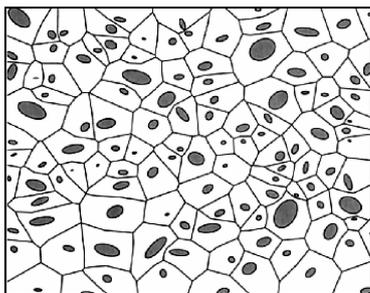


图 1 RVE 的 Voronoi 单元划分
Fig.1 Voronoi cell division of RVE

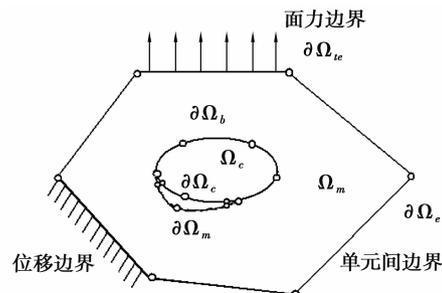


图 2 考虑界面脱层的 Voronoi 单元模型
Fig.2 Voronoi cell model with interface debonding

在未脱粘界面上,面力连续条件为

$$n^b \cdot (\sigma^m - \sigma^c) = 0, (\text{在 } \partial\Omega_b \text{ 上}) \tag{1}$$

在脱粘界面上,两侧面力均为零:

$$n^m \cdot \sigma^m = 0, (\text{在 } \partial\Omega_m \text{ 上}) \tag{2}$$

$$n^c \cdot \sigma^c = 0, (\text{在 } \partial\Omega_c \text{ 上}) \tag{3}$$

考虑边界面力条件的应力杂交元的余能泛函为

$$\Pi_{mc} = \sum_e \left(\int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \sigma : S : \sigma d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} n \cdot \sigma \cdot u d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_e} \bar{T} \cdot u d\partial\Omega \right).$$

用 Lagrange 乘法把式(1)-(3)的边界条件引入到上式的余能泛函中,得到修正后的增量形式的余能泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_{mc}^e(\Delta\sigma, \Delta u) = & \int_{\Omega_e} \Delta B(\sigma, \Delta\sigma) d\Omega + \int_{\Omega_e} \varepsilon : \Delta\sigma d\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega_e} n^e \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot (u + \Delta u) d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_e} (\bar{f} + \Delta\bar{f}) \cdot (u + \Delta u) d\partial\Omega + \\ & \int_{\partial\Omega_b} n^b \cdot (\sigma^m + \Delta\sigma^m - \sigma^c - \Delta\sigma^c) \cdot (u^b + \Delta u^b) d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega_m} n^m \cdot (\sigma^m + \Delta\sigma^m) \cdot (u^m + \Delta u^m) d\partial\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega_c} n^c \cdot (\sigma^c + \Delta\sigma^c) \cdot (u^c + \Delta u^c) d\partial\Omega. \end{aligned}$$

系统的总能量: $\Pi_{mc} = \sum_e \Pi_{mc}^e$ 。

单元能量对应力增量求一阶变分可得到单元内的欧拉方程:

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla(\Delta u) + (\Delta u) \nabla], \quad (\text{在 } \Omega_e \text{ 内})$$

系统总能量 Π_{mc} 对位移增量 $\Delta\varepsilon$ 求一阶变分可得到单元内的力协调条件:

$$\begin{aligned} n^e \cdot (\sigma + \Delta\sigma) &= \bar{f} + \Delta\bar{f}, && (\text{给定单元面力边界}) \\ n^{e-} \cdot (\sigma + \Delta\sigma) + n^{e+} \cdot (\sigma + \Delta\sigma) &= 0, && (\text{单元间}) \\ n^b \cdot (\sigma^c + \Delta\sigma^c) &= n^b \cdot (\sigma^m + \Delta\sigma^m), && (\text{界面未脱层处}) \\ n^c \cdot (\sigma^c + \Delta\sigma^c) &= 0, && (\text{界面脱层处基体侧}) \\ n^m \cdot (\sigma^m + \Delta\sigma^m) &= 0, && (\text{界面脱层处夹杂侧}) \end{aligned}$$

对于二维问题,平衡应力场为:

$$[\Delta\sigma]^m = P^m \Delta\beta^m, \quad (\text{在 } \Omega_m \text{ 内}) \tag{4}$$

$$[\Delta\sigma]^c = P^c \Delta\beta^c, \quad (\text{在 } \Omega_c \text{ 内}) \tag{5}$$

单元边界位移场由线性插值函数插值得到:

$$[u] = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = L \{q\} = \begin{bmatrix} 1 - a/l_i & 0 & a/l_i & 0 \\ 0 & 1 - a/l_i & 0 & a/l_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{2i-1} \\ q_{2i} \\ q_{2i+1} \\ q_{2i+2} \end{Bmatrix}.$$

单元边界位移增量由各个边界段节点广义位移增量插值得到

$$[\Delta u] = L \{ \Delta q \}. \tag{6}$$

将式(4)-(6)代入修正后的增量形式的余能泛函中,可得单元余能泛函的弱形式。

修正余能的驻值条件为

$$\frac{\partial \Pi_{mc}^e}{\partial (\Delta\beta^m)} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{mc}^e}{\partial (\Delta\beta^c)} = 0.$$

由此可得单元内的欧拉方程的弱表达式,其迭代表式的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} H^m & 0 \\ 0 & H^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\beta^{mi} \\ d\beta^{ci} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_e & -G_{mb} & G_{mm} & 0 \\ 0 & G_{cb} & 0 & G_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dq^{ei} \\ dq^{bi} \\ dq^{mi} \\ dq^{ci} \end{Bmatrix}。$$

其中:

$$\begin{aligned} H^m &= \int_{\Omega_m} P^m \text{T} S_m P^m d\Omega, H^c = \int_{\Omega_c} P^c \text{T} S_c P^c d\Omega, G_e = \int_{\partial\Omega_e} P^m \text{T} n^e \text{T} L d\partial\Omega, \\ G_{mm} &= \int_{\partial\Omega_m} P^m \text{T} n^m \text{T} L^m d\partial\Omega, \\ G_{cc} &= \int_{\partial\Omega_c} P^c \text{T} n^c \text{T} L^c d\partial\Omega, G_{mb} = \int_{\partial\Omega_b} P^m \text{T} n^b \text{T} L^b d\partial\Omega, G_{cb} = \int_{\partial\Omega_b} P^c \text{T} n^b \text{T} L^b d\partial\Omega。 \end{aligned}$$

求解上式可得应力参数增量表达式为

$$d\beta^i = H^{-1} G dq^i, \quad (7)$$

其中:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H^m & 0 \\ 0 & H^c \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_e & -G_{mb} & G_{mm} & 0 \\ 0 & G_{cb} & 0 & G_{cc} \end{bmatrix}, d\beta^i = \begin{Bmatrix} d\beta^{mi} \\ d\beta^{ci} \end{Bmatrix}, dq^i = \begin{Bmatrix} dq^{ei} \\ dq^{bi} \\ dq^{mi} \\ dq^{ci} \end{Bmatrix}。$$

系统总能量 Π_{mc} 分别对节点位移增量 Δq^e 、 Δq^b 、 Δq^m 和 Δq^c 求一阶变分,可得面力边界条件的弱表达式,其矩阵形式可简写为

$$\sum_e G^T d\beta^i = \sum_e \bar{F} - \sum_e G^T \begin{Bmatrix} \beta^m + \Delta\beta^{mi} \\ \beta^c + \Delta\beta^{ci} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

其中:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}^c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{F}^c \text{T} = \int_{\partial\Omega_c} (\bar{f} + \Delta\bar{f}) \text{T} L d\partial\Omega,$$

将式(7)代入式(8)可得:

$$\sum_e G^T H^{-1} G dq^i = \sum_e \bar{F} - \sum_e G^T \begin{Bmatrix} \beta^m + \Delta\beta^{mi} \\ \beta^c + \Delta\beta^{ci} \end{Bmatrix}。 \quad (9)$$

系统的求解方程可写为

$$\sum_e K_e dq^i = \sum_e \bar{F} - \sum_e G^T \begin{Bmatrix} \beta^m + \Delta\beta^{mi} \\ \beta^c + \Delta\beta^{ci} \end{Bmatrix}。 \quad (10)$$

其中单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} G_e^T & 0 \\ -G_{mb}^T & G_{cb}^T \\ G_{mm}^T & 0 \\ 0 & G_{cc}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{m-1} & 0 \\ 0 & H^{c-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_e & -G_{mb} & G_{mm} & 0 \\ 0 & G_{cb} & 0 & G_{cc} \end{bmatrix}。$$

由应力函数矩阵 \mathbf{P} 求得 \mathbf{H} 和矩阵 \mathbf{G} ,然后可得单元刚度矩阵,由式(7)可得应力参数增量 $\Delta\beta$,由式(4)、式(5)可得基体和夹杂部分各点应力增量,累计到总量可得整个代表性体积单元的应力场。

2 均匀化方法

求解复合材料有效性能的方法^[11]很多:1)以复合材料代表体元为基础的直接均匀化方法;2)以单一夹杂理论为基础的各种近似模型及利用上述模型构造的各种数值方法,如自洽法、Mori-Tanaka 法等;3)微分法;4)以变分原理为基础的上、下限法;5)双尺度渐近展开均匀化方法。

2.1 直接均匀化方法

直接均匀化法基于场量的表面或体积平均而直接计算有效应力和有效应变,根据宏观应力和应变二者之间的关系,求得宏观有效性能。可以用数值方法进行细观场量的直接平均,如有限元和边界元方法^[12-13],而细观结构可以是任意的几何尺寸。

RVE 的细观应力和应变的体积平均定义为

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \sigma_{ij} dV_m + \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \sigma_{ij} dV_c, \\ \langle \epsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \epsilon_{ij} dV_m + \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \epsilon_{ij} dV_c.\end{aligned}$$

如果非均匀材料有均匀位移边界条件或均匀应力边界条件,可以证明平均应变等于边界上的常应变,平均应力等于边界上的常应力:

$$[\epsilon_{ij}] = \epsilon_{ij}^0 \text{ 或 } [\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}^0. \quad (11)$$

因此,当给定均匀位移边界条件时,复合材料的有效应变是已知的,为了计算复合材料的有效弹性模量,要先计算材料的有效应力场;当给定均匀应力边界条件时,复合材料的有效应力是已知的,为了计算复合材料的有效弹性模量要先计算材料的有效应变场。

2.2 双尺度渐近展开均匀化方法

双尺度渐近展开均匀化方法由 Bensussan 等^[14]和 Sanchez-Palencia^[15]提出,与有限元法结合起来,在复合材料有效性能预报方面得到了广泛的应用。渐近均匀化理论有严格的数学理论推导。该方法同时引入均匀的宏观结构和非均匀的具有周期性分布的细观结构:将位移表示成关于宏观坐标和微细观坐标的函数,并用小参数渐近展开,用摄动技术得到一系列控制方程。对这些问题的求解给出了复合材料的宏观有效性能,并给出了微观应力场。

相关文献已经证明,渐近均匀化方法与直接平均法虽然数学表示不同,但它们的基本原理是共同的,它们预测的平均性能其结果也是一致的^[16-18]。本文中算例有均匀位移边界条件,VC-FEM 法对 RVE 进行模拟,可得整个 RVE 内的细观应力场,因此,采用直接均匀化方法。由均匀位移边界条件得平均应变,对 RVE 的细观应力场进行体积平均得到平均应力,由此得复合材料的有效弹性模量。

3 算例

下述算例应用郭然提出的考虑界面脱层的 Voronoi 单元有限元法分别对单夹杂和随机分布的多夹杂代表性体积单元进行了模拟,得到代表性体积单元内的应力场,然后用 Fortran 语言编写的均匀化程序得到平均的应力应变,从而得到平均应力应变曲线和有效弹性模量。分析了夹杂形状、大小、空间分布等因素对复合材料有效弹性模量的影响。

3.1 算例 1

本算例要模拟的模型是在 20 mm×20 mm 正方形的基体里包含一个半径为 5 mm 的圆形夹杂,夹杂位于正方形基体的中心位置,所占体积比为 19.6%。所受边界条件和位移载荷如图 3 所示,上下边竖直位移为 0,左边水平位移为 0,右端分载荷步施加水平位移载荷,每载荷步位移为 0.001 mm,共 40 个载荷步。材料参数如表 1 所示,基体部分 (Al2024) 为双线性弹塑性材料,夹杂部分 (SiC) 为线性弹性材料。

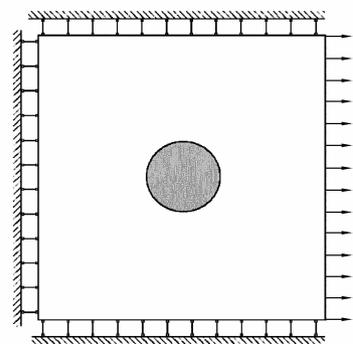


图3 含有一个夹杂的 Voronoi 单元模型
Fig.3 Voronoi cell model with an inclusion

表 1 材料参数
Table 1 Material parameters

材料	弹性模量/GPa	泊松比	屈服应力/MPa	切线模量/GPa	界面强度/MPa
基体	72	0.33	70	14.5	80
夹杂	430	0.25	—	—	—

图 4 给出了在第 20 载荷步时模型的水平应力云图,图 5 和图 6 分别给出了不考虑基体材料塑性和考虑基体材料塑性时模型的平均应力应变曲线。从图中可以看出,夹杂的加入提高了材料的刚度,但在界面处有较高的应力集中,容易发生界面脱层,界面的脱层降低了材料的刚度,这是因为脱层部分的夹杂不再传递载荷,使得材料的承载能力得到削弱。模拟得到的有效宏观弹性模量为 91.8 GPa,由 Eshelby 等效夹杂理论计算得到的有效宏观弹性模量为 95.3 GPa,相对误差为 3.8%。而 Eshelby 等效夹杂理论是含有一夹杂物的无限大介质在无限远处应力作用下的应力场,在体积分数较小的情况下能得到较准确的有效模量。因此,本文的结果可信。

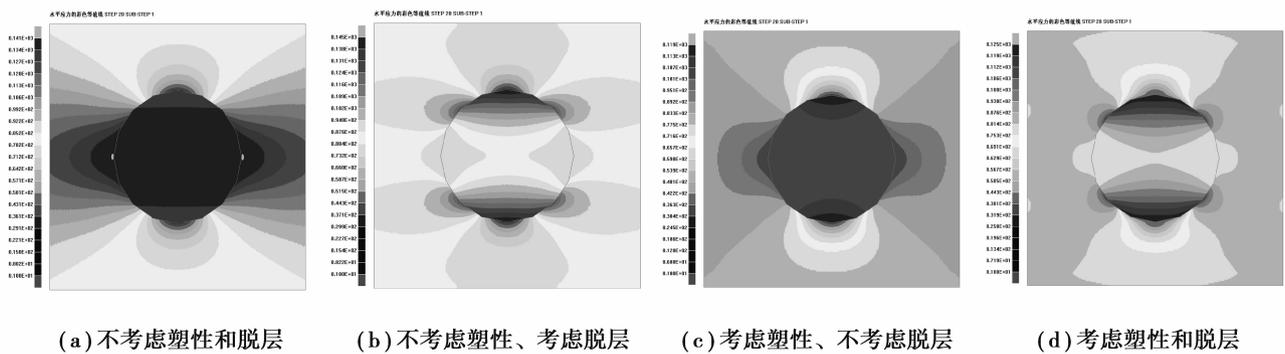


图 4 算例 1 在第 20 载荷步时的水平应力云图

Fig.4 Horizontal direction stress contour of example 1 at 20 load step

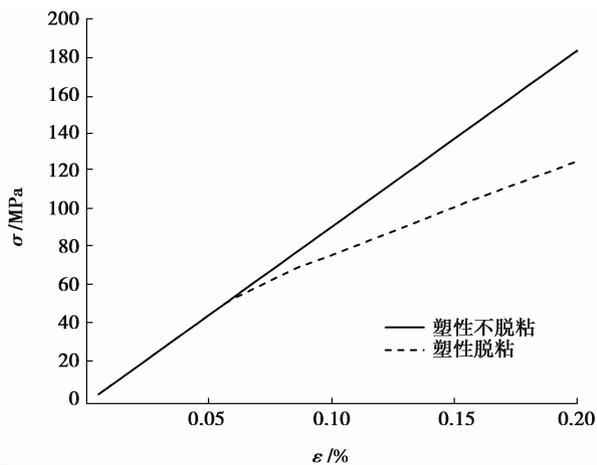


图 5 不考虑塑性时算例 1 的平均应力-应变曲线
Fig.5 The average stress-strain curve of example 1 when the matrix material is elastic

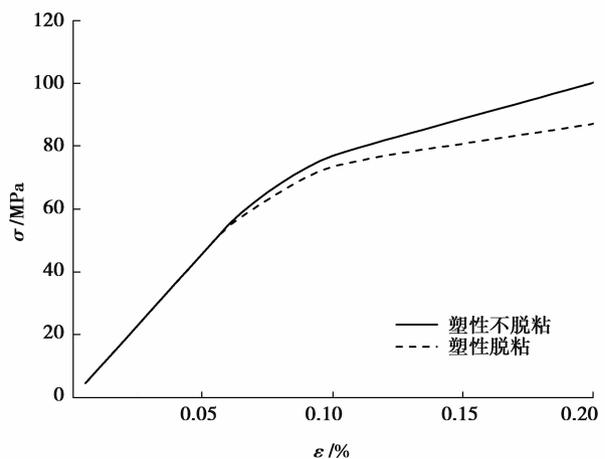


图 6 算例 1 在考虑塑性时的平均应力-应变曲线
Fig.6 The average stress-strain curve of example 1 when the matrix material is plastic

3.2 算例 2

本算例中基体为 $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ 的正方形,基体中随机分布 16 个圆形夹杂颗粒。夹杂的形状、空间分布相同,研究不同体积分数的多夹杂随机分布的代表性体积单元的有效宏观模量。分布如图 7 所示,(a)、(b)、

(c)、(d)的体积分数 f 分别为 10%、20%、30%、40%。边界条件和算例 1 相同:上下边固定竖直位移,左边固定水平位移,右端分载荷步施加水平位移载荷,每载荷步位移为 0.000 2 mm,共 30 个载荷步。材料参数如表 1 所示。图 8 给出了不同体积分数的平均应力应变曲线,图 9 给出了多夹杂随机分布的 Voronoi 单元的有效弹性模量随体积分数的变化曲线。从结果可以看出,材料的有效宏观弹性模量随夹杂体积分数的增大而变大,大的夹杂体积分数可以更有效地提高材料的总体刚度。这是因为夹杂为硬性夹杂,其弹性模量比基体的弹性模量大,当夹杂体积分数较大时材料的有效弹性模量就会较大。同时大的夹杂也提高了界面的应力集中,含有大的夹杂的模型较先出现界面脱层,而界面的脱层反而降低了材料的刚度。

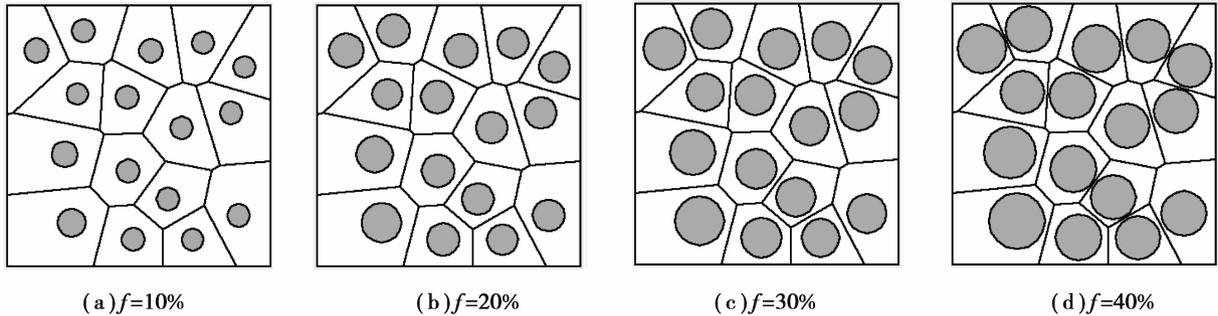


图 7 不同体积分数的 Voronoi 单元模型

Fig.7 Voronoi cell model with different volume fraction

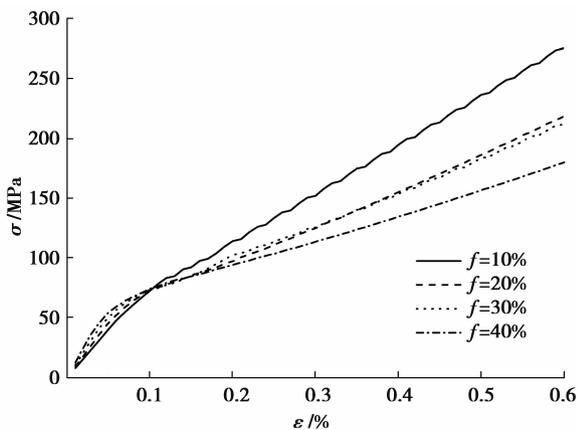


图 8 算例 2 中不同体积分数的平均应力-应变曲线

Fig.8 The average stress-strain curve of example 2 with different volume fractions

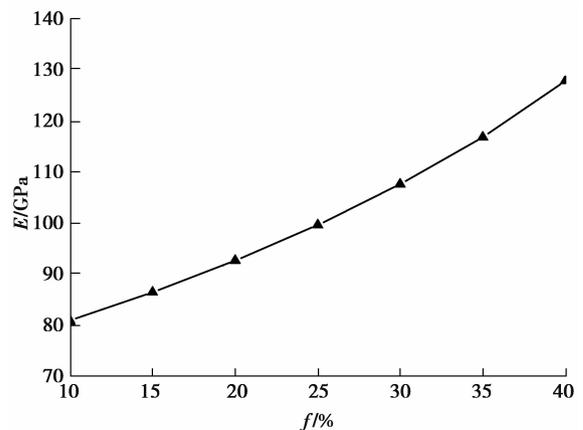


图 9 有效模量随体积分数的变化

Fig.9 The variation of effective modulus with volume fraction

3.3 算例 3

本算例中基体为 2 mm×2 mm 的正方形,基体中随机分布 16 个圆形夹杂颗粒,夹杂大小相同,体积分数均为 30%,模型 1 中夹杂分布密集,模型 2 中夹杂分布稀疏,如图 10 所示。边界条件和以上算例相同:上下边固定竖直位移,左边固定水平位移,右端分载荷步施加水平位移载荷,每载荷步位移为 0.000 1 mm,共 60 个载荷步。材料参数如表 1 所示。图 11 给出了第 5 载荷步时模型的水平力云图,此时界面未发生脱层,图 12 给出了第 40 载荷步时模型的水平应力云图,此时界面全部脱层。从图中可以看出夹杂分布集中时界面应力集中更明显。图 11 给出了两

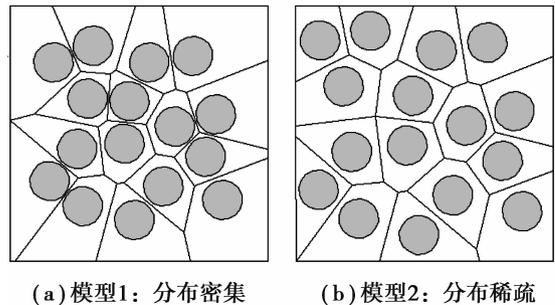
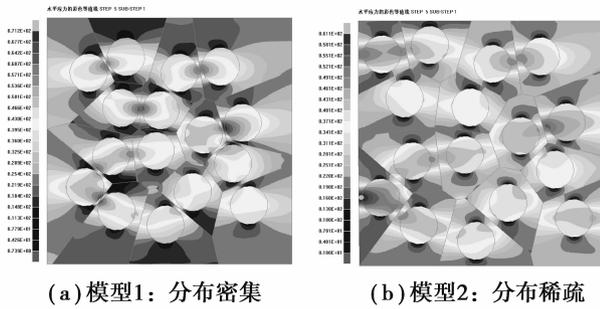


图 10 夹杂分布不同的 Voronoi 单元模型图

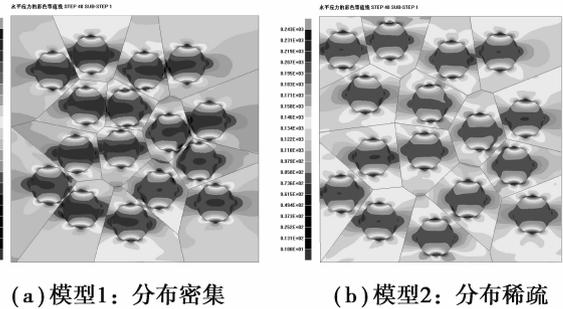
Fig.10 Voronoi cell model with different inclusion distribution

个模型的平均应力应变曲线,(a)中模型 1 的有效弹性模量为 110.90 GPa,(b)中模型 2 的有效弹性模量为 107.96 GPa。夹杂的空间分布对材料的有效弹性模量有影响,夹杂分布较集中时材料有效弹性模量较大,对材料刚度的增强更明显。这是因为当夹杂分布较集中时,夹杂之间的相互作用应力较大。



(a) 模型1: 分布密集 (b) 模型2: 分布稀疏

图 11 算例 3 在第 5 载荷步时的水平应力云图
Fig.11 Horizontal direction stress contour of example 3 at 5 load step



(a) 模型1: 分布密集 (b) 模型2: 分布稀疏

图 12 算例 3 在第 40 载荷步时的水平应力云图
Fig.12 Horizontal direction stress contour of example 3 at 40 load step

3.4 算例 4

本算例中基体为 $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ 的正方形,基体中随机分布 40 个夹杂颗粒,夹杂的大小、形状不同,空间分布位置相同,体积分数均为 30%,如图 13 所示。图 14(a)、(b)、(c)、(d)、(e)中夹杂为椭圆形,大小、形状相同,方向不同,模型(a)中方向随机,模型(b)中夹杂长轴沿水平方向,模型(c)、(d)中夹杂长轴与水平方向夹角分别为 30° 和 60° ,模型(e)中夹杂长轴沿竖直方向,模型(f)中夹杂为半径相等的圆形,模型(g)中夹杂的大小、形状、方向均是随机的。边界条件和以上算例相同:上下边固定竖直位移,左边固定水平位移,右端分载荷步施加水平位移载荷,每载荷步位移为 0.0001 mm ,共 60 个载荷步。材料参数如表 1 所示。均匀化后不同模型的有效弹性模量分别为 106.12、115.89、110.80、103.88、102.75、106.36、107.35 GPa。由模型(a)、(b)、(c)、(d)、(e)的结果可以看出夹杂的方向对有效弹性模量有影响,有效弹性模量随着夹杂长轴方向和载荷方向的夹角的增大而减小,夹杂长轴方向和载荷方向相同时材料的有效弹性模量最大,夹杂长轴方向和载荷方向垂直时材料的有效弹性模量最小。从结果中还可以看出,夹杂的形状对材料有效弹性模量也有影响。模型(g)的结果稍大于模型(a)和模型(f),是因为模型(g)有较大的夹杂。

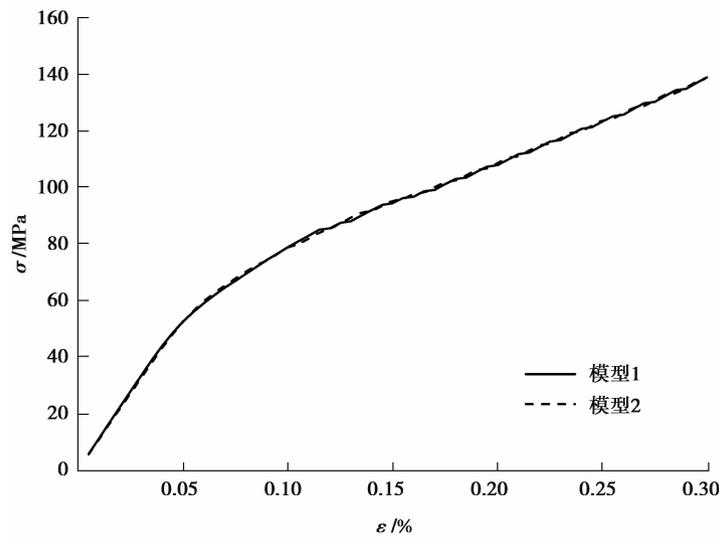


图 13 夹杂分布密集程度不同时材料的平均应力-应变曲线
Fig.13 Average stress and strain curves of materials with different distribution density

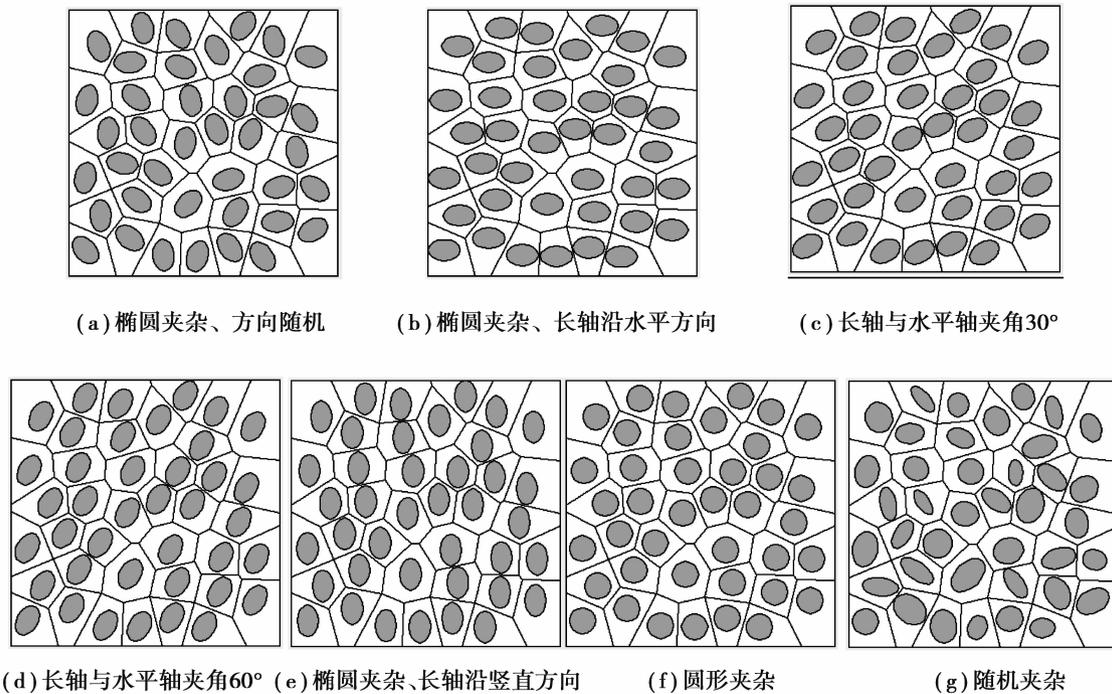


图 14 多夹杂随机分布的 Voronoi 单元模型

Fig.14 Voronoi cell model with random distribution of multiple inclusions

4 结 论

基于 Voronoi 单元有限元法对颗粒增强复合材料的代表性体积单元进行了模拟,得到整个代表性体积单元内的应力场,并通过平均化方法得到材料的平均应力应变曲线和有效弹性模量,并对含单夹杂和随机分布的多夹杂的模型进行数值模拟,得到材料的有效弹性模量,分析了夹杂微结构的形状、体积分数、空间分布等因素对材料有效宏观弹性模量的影响。

1) 采用含任意夹杂的代表性体积单元,能反映颗粒增强复合材料的微结构的随机性。

2) 采用考虑夹杂基体界面脱层的 Voronoi 单元,直接均匀化后的平均应力-应变曲线可以反映界面脱层对材料有效宏观性能的影响。

3) 得到复合材料的有效弹性模量后,可以在徐佳丽等研究的基础上对复合材料进行宏观跨尺度模拟。首先对复合材料在宏观尺度上进行普通有限元计算,由自检技术和网格重生成技术在有可能破坏的危险区域划分 Voronoi 单元,然后进行 VCFEM 法和普通有限元法的混合运算。

参考文献:

- [1] 廖光开,李乡安,邹萍,等.基于均匀化方法的钨丝增强锆基块体非晶复合材料等效弹性常数预测[J].中国有色金属学报,2014(6):1449-1458.
LIAO Guangkai, LI Xiang'an, ZOU Ping, et al. Homogenization based approach for predicting equivalent elastic constants of tungsten fiber reinforced Zr-based bulk metallic glass matrix composites[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2014(6):1449-1458. (in Chinese)
- [2] 谢桂兰,赵锦泉,田杰,等.均匀化有限元法预测复合材料层合板宏观有效弹性性能[J].玻璃钢/复合材料,2014(7):23-27.
XIE Guilian, ZHAO Jinxiao, TIAN Jie, et al. Predicting macroscopic effective elastic properties of composite laminated plate by homogenization FEM[J]. Fiber Reinforced Plastics/Composites, 2014(7):23-27. (in Chinese)
- [3] 李涛,严波,彭雄奇,等.玻纤增强注塑件的均匀化弹性力学参数研究[J].复合材料学报,2015,32(4):1153-1158.

- LI Tao, YAN Bo, PENG Xiaoqi, et al. Elastic properties of glass fiber reinforced injection moldings based on homogenization method[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2015, 32(4):1153-1158. (in Chinese)
- [4] Ghosh S, Mukhopadhyay S N. Material based finite element analysis of heterogeneous media involving dirichlet tessellations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, 104(2):211-247.
- [5] Moorthy S, Ghosh S. Adaptivity and convergence in the Voronoi cell finite element model for analyzing heterogeneous materials[J]. *Computers Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2000, 185(1):37-74.
- [6] Dong L, Atluri S N. T-Trefftz Voronoi Cell Finite Elements with elastic/rigid inclusions or voids for micromechanical analysis of composite and porous materials[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2012, 29(2):183-219.
- [7] Ghosh S, Paquet D. Adaptive concurrent multi-level model for multi-scale analysis of ductile fracture in heterogeneous aluminum alloys[J]. *Mechanics of Materials*, 2013, 65(1):12-34.
- [8] 徐佳丽. VCFEM 法与有限元法混合计算的数值模拟[D]. 昆明: 昆明理工大学, 2012.
XU Jiali. Mix up the vcfem and finite element method to numerical simulation[D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2012. (in Chinese)
- [9] 郭隽. 颗粒增强复合材料损伤机理宏细观跨尺度模拟[D]. 昆明: 昆明理工大学, 2013.
GUO Jun. Simulation of particle reinforced composite materials damage mechanism in macro- and meso-scales[D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2013. (in Chinese)
- [10] 郭然. 颗粒增强复合材料界面脱层和机械疲劳性能的数值模拟[D]. 北京: 清华大学, 2003.
GUO Ran. Modeling of interfacial debonding and characterization of thermomechanical fatigue in particle reinforced composites[D]. Beijing: Tsinghua University, 2003. (in Chinese)
- [11] 秦庆华, 杨庆生. 非均匀材料多场耦合行为的宏细观理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
QIN Qinghua, YANG Qingsheng. Macro-micro-theory on multi-field coupling behavior of heterogeneous materials[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [12] Yang Q S, Qin Q H. Modelling the effective elasto-plastic properties of unidirectional composites reinforced by fibre bundles under transverse tension and shear loading[J]. *Materials Science & Engineering A*, 2003, 344(12):140-145.
- [13] Yang Q S, Qin Q H. Micro-mechanical analysis of composite materials by BEM[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, 28(8):919-926.
- [14] Bensoussan A, Lions J L, Papanicolou G. Asymptotic analysis for periodic structures[M]. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [15] Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory[M]. Springer, 1980.
- [16] Yang Q S, Becker W. A comparative investigation of different homogenization methods for prediction of the macroscopic properties of composites[J]. *Computer Modeling in Engineering and Science*, 2004(6):319-332.
- [17] Yang Q S, Becker W. Numerical investigation for stress, strain and energy homogenization of orthotropic composite with periodic microstructure and non-symmetric inclusions[J]. *Computational Materials Science*, 2004(31):169-180.
- [18] Yang Q S, Becker W. Effective stiffness and microscopic deformation of an orthotropic plate containing arbitrary holes[J]. *Computers and Structures*, 2004(82):2301-2307.