

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2017.02.011

对偶性与特大增量步算法在复杂平面框架中的应用

陈朝晖^{a,b}, 王旭荣^a

(重庆大学 a.土木工程学院; b.山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

摘要:特大增量步算法(LIM)是一种基于力法和广义逆矩阵理论的迭代算法,在简单桁架和刚架非线性初步应用中,达到相同计算精度下有同等甚至超过位移有限元的计算效率。针对工程中的复杂杆系结构,利用平衡与协调的对偶性,探讨 LIM 在复杂平面框架结构中的应用,建立了平面框架结构的 LIM 基本方程,提出了针对典型支座约束以及组合结点的处理方法。该处理方法的线弹性问题算例表明,与位移有限元相比具有至少同等的精度和相当的计算效率。在支座本身不考虑塑性的情况下,该方法同样适用于弹塑性问题,为 LIM 在复杂杆系结构的弹塑性分析中奠定了基础。

关键词:特大增量步法;对偶性;支座约束;组合结点;广义逆

中图分类号: O342; TU311.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-582X(2017)02-080-11

Application of contragradient law and large increment method to the analysis of complex frame structure

CHEN Zhaohui^{a,b}, WANG Xurong^a

(a. School of Civil Engineering; b. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, P.R.China)

Abstract: The large increment method(LIM) is an iterative method based on the force method and the generalized inverse matrix theory. In the nonlinear initial application of trusses and rigid frames, LIM reaches the same solution as the displacement-based finite element method with the same number of iterations or even less. Aiming at the complex skeletal structure, we discussed the application of LIM and contragradient law to the complex frame structure, established the LIM basic formula in frame structure and proposed the analysis approaches for complex boundary condition and composite joints. The illustrative example of linear elastic problem clearly reveals that the accuracy and the efficiency of LIM are the same as those of displacement-based finite element method. The method is also applicable to elasto-plastic problems without considering the plasticity of the support itself, which lays the foundation for LIM in the elasto-plastic analysis of complex skeletal structures.

Keywords: large increment method (LIM); contragradient law; complex boundary condition; composite joint; generalized inverse

收稿日期:2016-06-19

基金项目:国家自然科学基金面上项目(11272362)。

Supported by the National Natural Science Foundation of China(11272362).

作者简介:陈朝晖(1968-),女,博士,教授,主要从事有限元与本构理论研究,(E-mail)zhaohuic@cqu.edu.cn。

结构内力分析需满足平衡、协调和本构三大基本方程以及边界条件。传统的矩阵位移法和矩阵力法^[1]通常是将这 3 个方程和边界条件统一在一套结构刚度方程或柔度方程中,通过求解节点位移或多余未知力达到求解结构内力的目的。这种思路,对于求解材料非线性问题的位移法而言,存在“牵一动万”的不足,即结构局部进入屈服后,需要修正结构的整体刚度方程,重新计算整个结构,将大量的计算消耗在远离屈服区域、内力变形变化不大的单元上;此外,由于自动选取基本体系较难实现,矩阵力法虽然具有求解精度高、未知数少的特点,却一直未能在计算机上发挥优势^[2-3]。

特大增量算法^[4](large increment method, LIM) 是一种基于广义逆矩阵理论^[5]、以力法为基础的迭代算法(始称广义逆算法^[6])。该算法有如下主要特点:1)毋需像传统力法一样选取静定结构作为基本体系,而是直接利用当前带结构约束的体系作基本体系,从选取基本未知量到方程迭代求解都完全适合于电算^[7-8];2)LIM 天然具有很强的可并行性,无需进行子结构划分就可以直接以单元为最小单位并行求解本构方程,且对于材料非线性问题,无需像传统的逐步增量法递进求解,极大地提高了力法在大型数值分析中效率^[8-9]。

研究表明,LIM 的收敛性有理论保证,且算法通用性强,计算精度与 FEM 相比有较大优势。但目前的研究主要集中在材料非线性问题的实体单元的建立与扩展上^[10],对于 LIM 在杆系结构中应用研究尚不充分。美国学者 Aref 教授等研究了 LIM 在受集中力的简单梁式结构弹塑性问题中的分析方法,与 ABAQUS 相比,在塑性铰开始出现以后,LIM 拥有远超过前者的计算效率^[11]。但该方法仍有诸多不足,笔者将针对其中平面框架结构的常见复杂约束条件以及组合节点的处理方法进行探讨,更加严密地推导出 LIM 在平面杆系结构中的基本方程,为 LIM 在复杂框架结构弹塑性分析中的应用打下基础。文中仅限于小变形及静力问题的讨论。

1 单元平衡矩阵与柔度矩阵

1.1 局部分析

以平面框架结构为例,阐述平面杆件单元平衡矩阵与柔度矩阵的建立及其特性。图 1 所示为局部坐标系下的单元杆端外力。

如图 2 所示,受单元平衡条件约束,杆端内力向量只有 3 个独立分量,选取 3 个线性无关的单元内力分量作为单元广义内力向量^[12],如:杆元轴力 N_x 、杆端弯矩 M_{iz} 和 M_{jz} ,记作 \mathbf{F}^e ,即

$$\mathbf{F}^e = \{N_x \quad M_{iz} \quad M_{jz}\}^T \tag{1}$$

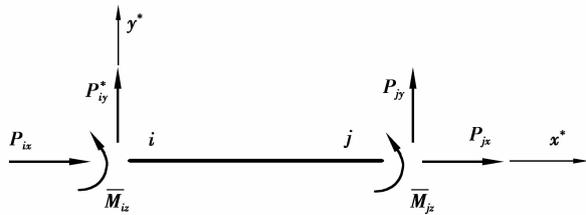


图 1 局部坐标下单元杆端外力

Fig.1 Element nodal forces in local coordinates

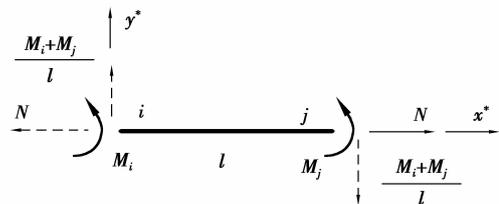


图 2 局部坐标下单元广义内力

Fig.2 Element generalized inner forces in local coordinates

杆件的弯矩和轴力分布为

$$M(x) = \frac{l-x}{l}M_i - \frac{x}{l}M_j; N(x) = -N \tag{2}$$

由单元平衡条件可知:

$$\begin{bmatrix} P_{ix}^* \\ P_{iy}^* \\ M_{iz} \\ P_{jx}^* \\ P_{jy}^* \\ M_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ M_{iz} \\ M_{jz} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

即

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i^* \\ \mathbf{P}_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i \\ \mathbf{H}_j \end{bmatrix} \mathbf{F}^e = \mathbf{H}^* \mathbf{F}^e, \quad (4)$$

上式为局部坐标下的单元平衡方程, \mathbf{H}^* 称为局部坐标下单元平衡矩阵。

如图 3 所示, 单元杆端位移向量为

$$\mathbf{D}^* = \{u_i^* \quad v_i^* \quad \theta_i \quad u_j^* \quad v_j^* \quad \theta_j\}^T. \quad (5)$$

选取与单元广义内力向量 \mathbf{F}^e 共轭的变形向量 $\boldsymbol{\delta}^e$, 称为单元广义变形向量, 具体如下:

$$\boldsymbol{\delta}^e = \{\Delta_x \quad \varphi_{iz} \quad \varphi_{jz}\}^T, \quad (6)$$

其中:

$\Delta_x = u_i^* - u_j^*$, 单元轴向变形;

$\varphi_{iz} = \theta_i - \gamma$, 杆端 i 相对新轴线 $i'j'$ 的转角; $\varphi_{jz} = \theta_j - \gamma$,

杆端 j 相对新轴线 $i'j'$ 的转角;

γ 为轴线 ij 与 $i'j'$ 之间的夹角, 即杆件的刚体转角, 在小变形条件下, 有 $\gamma = (v_i^* - v_j^*)/l$ 。

则单元广义变形向量与杆端位移向量之间存在如下关系:

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \varphi_{iz} \\ \varphi_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ \theta_i \\ u_j^* \\ v_j^* \\ \theta_j \end{bmatrix}, \quad (7)$$

即

$$\boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i \\ \mathbf{H}_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^* \\ \mathbf{D}_j^* \end{bmatrix} = \mathbf{G}^* \mathbf{D}^*. \quad (8)$$

上式即单元协调方程, 称为单元协调矩阵或单元几何矩阵。比较式(4)和式(8)可知,

$$\mathbf{G}^* = (\mathbf{H}^*)^T. \quad (9)$$

即, 在局部坐标系下单元平衡矩阵与单元协调矩阵互为转置。显然, 当单元广义内力与单元广义位移满足共轭条件时, 单元平衡方程及其协调方程在形式上具有对偶性, 即:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^* = \mathbf{H}^* \mathbf{F}^e; \\ \boldsymbol{\delta}^e = (\mathbf{H}^*)^T \mathbf{D}^*. \end{cases} \quad (10)$$

从能量原理计算单元柔度矩阵^[13], 杆件应变能 U 为

$$U = \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI_z} dx + \int_0^l \frac{N(x)^2}{2EA} dx. \quad (11)$$

由卡氏第二定理可得单元柔度矩阵:

$$\boldsymbol{\Phi}^e = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI_z} & -\frac{l}{6EI_z} \\ 0 & -\frac{l}{6EI_z} & \frac{l}{3EI_z} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

1.2 整体分析

如图 4 所示, 在全局坐标系下分别定义单元等效结点荷载向量 \mathbf{P}^e 和结点位移向量 \mathbf{D}^e 为^[10]:

$$\mathbf{P}^e = \{P_{ix} \quad P_{iy} \quad \bar{M}_{iz} \quad P_{jx} \quad P_{jy} \quad \bar{M}_{jz}\}^T, \quad (13)$$

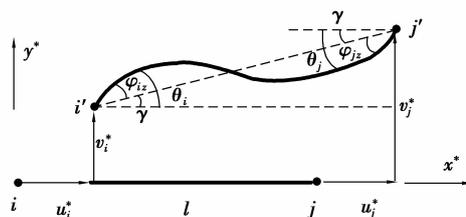


图 3 局部坐标下单元杆端位移与广义变形

Fig.3 Element nodal displacements and generalized deformations in local coordinates

$$\mathbf{D}^e = \{u_{ix} \quad v_{iy} \quad \theta_i \quad u_{jx} \quad v_{jy} \quad \theta_j\}^T. \quad (14)$$

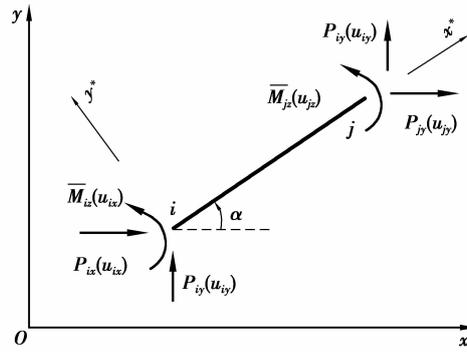


图 4 全局坐标系下单元杆端外力和杆端位移

Fig.4 Element nodal forces and displacements in global coordinates

则局部坐标系与整体坐标系下,单元杆端力向量具有如下转换关系:

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{R}\mathbf{P}^*, \quad (15)$$

\mathbf{R} 为坐标转换矩阵,且是正交矩阵:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

则全局坐标下单元平衡方程为

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{P}_i^* \\ \mathbf{R}\mathbf{P}_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{H}_i \mathbf{F}^e \\ \mathbf{R}\mathbf{H}_j \mathbf{F}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{H}_i \\ \mathbf{R}\mathbf{H}_j \end{bmatrix} \mathbf{F}^e = \mathbf{C}^e \mathbf{F}^e. \quad (17)$$

式中, \mathbf{C}^e 为整体坐标下的单元平衡矩阵。单元节点位移向量的转换关系与此类似。则整体坐标下的单元协调方程为

$$\boldsymbol{\delta}^e = [\mathbf{H}_i^T \mathbf{R}^{-1} \mid \mathbf{H}_j^T \mathbf{R}^{-1}] \mathbf{D}^e = \mathbf{G}^e \mathbf{D}^e, \quad (18)$$

\mathbf{G}^e 为整体坐标下的单元协调矩阵。可知:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{H}_i \\ \mathbf{R}\mathbf{H}_j \end{bmatrix} = [\mathbf{H}_i^T \mathbf{R}^{-1} \mid \mathbf{H}_j^T \mathbf{R}^{-1}]^T, \quad (19)$$

即

$$\mathbf{G}^e = (\mathbf{C}^e)^T. \quad (20)$$

可见,在整体坐标下单元平衡矩阵与单元协调矩阵的转置关系依然成立,单元平衡条件和协调条件在形式上同样存在对偶性。即在小变形前提下,若:1)杆端力向量与杆件广义内力向量满足平衡条件;2)杆端位移向量与杆件广义变形向量满足协调条件;3)杆端力向量与杆端位移向量共轭;4)杆件广义内力向量与杆件广义变形向量共轭。则单元的平衡关系与协调关系具有式(17)和(18)所示的对偶性。该对偶性可采用虚功原理加以证明,详见文献[14]。

根据结点平衡条件,采用“对号入座”法装配结构整体平衡矩阵,以结点编号为行码、单元编号为列码,将各单元平衡矩阵填入相应位置,毋需叠加计算,这是有别于位移有限元集成系统刚度矩阵之处。

以结点 k 为例,平衡子矩阵 \mathbf{C}_{ke} 的确定规则如下:

$$\mathbf{C}_{ke} = \begin{cases} \mathbf{R}\mathbf{H}_i & \text{结点 } k \text{ 与杆元 } e \text{ 负关联;} \\ \mathbf{R}\mathbf{H}_j & \text{结点 } k \text{ 与杆元 } e \text{ 正关联;} \\ 0 & \text{结点 } k \text{ 与杆元 } e \text{ 不关联。} \end{cases} \quad (21)$$

设系统可离散为 b 个单元,每个单元广义内力向量有 l 个独立分量, $B=bl$,相应地,设系统有 n 个结点,每个结点有 q 个位移分量, $N=nq$ 。

系统整体平衡方程为

$$CF = P, \quad (22)$$

式中, C 是 $N \times B$ 的平衡矩阵 ($N \leq B$)。对于静定结构, $N = B$, 可以直接解出 F (P 为已知量)。

系统整体协调方程为

$$\delta = GD = C^T D. \quad (23)$$

单元本构关系可以表示为

$$\delta^e = \Phi^e F^e \text{ 或 } F^e = K^e \delta^e, \quad (24)$$

其中: K^e 为单元刚度矩阵; Φ^e 为单元柔度矩阵。对于整个系统可以写为

$$\delta = \Phi(F), \quad (25)$$

其中, $\Phi = [\Phi^1 \quad \Phi^2 \quad \dots \quad \Phi^b]$ 为对角阵。

引入边界约束条件即可求解结构的内力和位移。

以上平衡方程和协调方程对线性和非线性问题是通用的, 本构方程在非线性问题中有很大的不同, 与材料本构特性有关, 文中不作讨论。

2 基于广义逆理论的 LIM

2.1 广义逆和系统控制方程

对于超静定结构, 由于 $N < B$, C^{-1} 不再存在, 系统平衡方程(22)将有无数多组解。引入广义逆矩阵理论可以得到满足式(22)的通解:

$$F = C^+ P + \beta X, \quad \forall X \in R^B, \quad (26)$$

$$C^+ = C^T (CC^T)^{-1}, \quad (27)$$

式中, C^+ 为 C 阵的广义右逆。则 $C^+ P$ 为满足平衡而不满足协调的内力矢; βX 为满足协调的平衡力矢, 两者之和即为同时满足平衡和协调的系统内力向量 F 。

令

$$\alpha = C^+ C; \quad \beta = I - C^+ C. \quad (28)$$

由广义逆理论知:

$$\text{rank}(\alpha) = N; \quad \text{rank}(\beta) = B - N. \quad (29)$$

$$C\alpha = C; \quad C\beta = 0. \quad (30)$$

$$\alpha^2 = \alpha; \quad \beta^2 = \beta; \quad \alpha\beta = 0. \quad (31)$$

依据矩阵 α 和 β 的定义, 易得

$$\alpha\delta = \delta; \quad \beta\delta = 0. \quad (32)$$

$$D = (CC^T)^{-1} C\delta. \quad (33)$$

至此原问题转化为寻找满足如下控制方程的 F 和 δ 的解。

$$CF = P; \quad \beta\delta = 0; \quad \delta = \Phi(F). \quad (34)$$

2.2 LIM 迭代过程

对式(34)所示问题可采用迭代的方法求解^[4], 基本思想是先寻找满足平衡方程(22)的初始解, 而后通过协调方程(32)修正该初始解, 最终得到同时满足平衡与协调条件的原问题的解。即将原问题转化为如下优化问题:

$$CF = P; \quad \delta = \Phi(F); \quad \min \|\beta\delta\|. \quad (35)$$

具体步骤如下:

第1步: 首先由广义逆矩阵理论, 求得平衡方程的一个特解, 作为迭代初值:

$$F_0 = C^+ P. \quad (36)$$

第2步: 由 F_n 迭代求解 F_{n+1} 。

1) 求解 F_n 对应的广义变形:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_n = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{F}_n)。 \quad (37)$$

2) 检验 $\hat{\boldsymbol{\delta}}_n$ 是否满足协调收敛标准:

$$\varepsilon(\hat{\boldsymbol{\delta}}_n) = \frac{\|\boldsymbol{\beta}\hat{\boldsymbol{\delta}}_n\|}{\|\hat{\boldsymbol{\delta}}_n\|} \leq e。 \quad (38)$$

式中 e 为给定协调收敛标准。若上式满足,迭代终止, \mathbf{F}_n 为内力最终解,跳转至第3步。否则,继续;

3) 确定搜索方向:

$$\begin{cases} \mathbf{S}'_n = \boldsymbol{\beta}\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}\hat{\boldsymbol{\delta}}_n; \\ k_f = \frac{(\hat{\boldsymbol{\delta}}_n - \hat{\boldsymbol{\delta}}_{n-1})^T \mathbf{S}'_n}{\hat{\boldsymbol{\delta}}_{n-1}^T \mathbf{S}'_{n-1}}; \\ \mathbf{S}_n = k_f \mathbf{S}_{n-1} - \mathbf{S}'_n。 \end{cases} \quad (39)$$

4) 确定搜索步长 h_n :

由 $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{n+1} \mathbf{S}_n = 0$ 可得:

$$h = -\frac{\hat{\boldsymbol{\delta}}_n^T \mathbf{S}_n}{\mathbf{S}_n^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{S}_n}。 \quad (40)$$

5) 求 \mathbf{F}_{n+1} :

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_n + h_n \mathbf{S}_n; \quad n = n + 1。 \quad (41)$$

转至1)进行下一步迭代。

第3步:计算 \mathbf{F} 、 $\boldsymbol{\delta}$ 和 \mathbf{D} 最终解:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n; \quad \boldsymbol{\delta}_n = \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{\delta}}_n; \quad \mathbf{D} = (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C}\boldsymbol{\delta}_n。 \quad (42)$$

2.3 对 LIM 求解思想的讨论

控制方程式(22)和式(23)中, \mathbf{F} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{D} 、 $\boldsymbol{\delta}$ 可视为有限维矢量空间中的矢量,它们之间的相互关系可视为在有限维矢量空间中,像与像原的变换。即 \mathbf{F} 、 $\boldsymbol{\delta} \in \mathbf{R}^M$, \mathbf{P} 、 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^L$, $\mathbf{R}^M \subset \mathbf{R}^N$, 则存在与 \mathbf{R}^M 正交的子空间 \mathbf{R}^L , 使 $\mathbf{R}^N = \mathbf{R}^M + \mathbf{R}^L$ 。

平衡方程(22)意味着在向量空间 \mathbf{R}^M 中,内力矢量 \mathbf{F} 经过矩阵 \mathbf{C} 的作用后,成为与荷载矢量 \mathbf{P} 同模反向的矢量,从而构成平衡力系。

因此,LIM 的求解思想可阐释为:

1) 结构首先在荷载作用下产生内力,该内力可由广义逆矩阵理论求得,是1组满足平衡条件的特解 \mathbf{F}_p , \mathbf{F}_p 在 \mathbf{C} 阵的列矢张成的像空间 \mathbf{R}^M 中;

2) \mathbf{F}_p 使杆件发生变形 $\boldsymbol{\delta}$,该变形可由单元本构方程确定,因而产生结点位移 \mathbf{D} ,通常 \mathbf{D} 不满足协调条件;

进一步调整杆件变形,使其产生新的内力 \mathbf{F}_g , \mathbf{F}_g 是1组满足平衡条件 $\mathbf{C}\mathbf{F} = 0$ 的特解,存在于正交子空间 \mathbf{R}^L 中,它不会影响结构的平衡,但可以调整结构的协调性。则结构的内力矢为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g$ 。其中, \mathbf{F}_g 是正交子空间中的自由矢,但对于确定的结构, \mathbf{F}_g 是唯一的,应使 $\mathbf{F} \perp \mathbf{R}^L$, 否则将导致新的不平衡力。

显然,满足 $\mathbf{F} \perp \mathbf{R}^L$ 的矢量,必是一切 \mathbf{F} 中模最小者,所对应的 $\boldsymbol{\delta}$ 的模也最小。可以证明,这符合最小势能原理。

3 不同支座约束条件的处理

事实上,式(22)、式(23)、式(25)尚需加入边界条件^[15],才能唯一确定结构的内力与变形。常见平面杆系结构的支座,按其约束性质可分为:刚性支座、弹性支座和给定位移支座。以平面框架结构为例,设结构的第 s 个支座的结点编号为 n_k ,与结点相连的杆元记做 α 、 β 和 γ 。以下分别讨论三类支座约束以及组合节点的

处理方法。

3.1 刚性支座

刚性支座指受力后不发生变形的支座,如图 5 所示。由图 5 可知,除 y 方向线位移被支座约束(称约束位移)外,其余方向位移均自由(称为自由位移)。

为加入边界条件,对式(22)做如下修正:

1)在 \mathbf{F} 中第 $b+s$ 的位置上增加一个反力矢 \mathbf{F}_{b+s} ,包含结点处全部反力分量,即:

$$\mathbf{F}_{b+s} = \{F_x \quad F_y \quad M_z\}^T, \tag{43}$$

所对应的变形矢量 δ_{b+s} 为

$$\delta_{b+s} = \{\Delta_x \quad \Delta_y \quad \varphi_z\}^T. \tag{44}$$

2)在平衡矩阵 \mathbf{C} 中,对应第 $b+s$ 杆元(即支座)处,增加 3×3 阶元阵列,该元阵列仅在第 n_k 个节点处有一非零对角阵:

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \tag{45}$$

式中,自由位移, $a_i = 0$;约束位移, $a_i = 1$,其余元阵均为 0 阵。

经过以上处理后的结构整体平衡方程变为:

$$n_k \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & C_j^\alpha & \dots & C_j^\beta & \dots & C_j^\gamma & \dots & \bar{\mathbf{I}} & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}^\alpha \\ \vdots \\ \mathbf{F}^\beta \\ \vdots \\ \mathbf{F}^\gamma \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{b+s} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{P}. \tag{46}$$

这时反力已被当作内力包括在内力矢中。

在式(25)中与子块 \mathbf{F}_{b+s} 相对应的位置上,给 Φ 加上如下“相当柔度矩阵”:

$$\Phi_{n_k} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

式中,对于约束位移, $b_i = 0$;对自由位移, $b_i = 1 \times 10^{20}$ (因该方向反力为 0,无实际意义)。相当于在 δ 中的第 $b+s$ 位置处增加了一个广义变形矢量 δ_{b+s} ,则式(25)成为

$$\begin{bmatrix} \delta^1 & \dots & \delta^\alpha & \dots & \delta^\beta & \dots & \delta^\gamma & \dots & \delta_{b+s} & \dots \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Phi^1 & \dots & \Phi^\alpha & \dots & \Phi^\beta & \dots & \Phi^\gamma & \dots & \Phi_{n_k} & \dots \end{bmatrix} \mathbf{F}. \tag{48}$$

式(23)中的 \mathbf{C}^T 及 δ 必须具备与式(46)和式(48)相同的符号含义。这样,最后求得的反力与真实反力反号。

当支座如图 6 所示有倾斜角时,需要引入局部坐标系和转换矩阵进行修正,则

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \tag{49}$$

式中 a_i 取值规则与式(45)相同。式(45)则为式(49)倾斜角为 0 的特殊情况, α 为 x 轴到 x^* 轴的夹角,逆时针为正。式(47)依然适用。

3.2 弹性支座

弹性支座指受力后会发生弹性变形的支座,如图 7 所示。

此时,式(49)和式(47)依然适用,但弹性位移方向 $a_i = 1, b_i = 1/k$ (k 为支座刚度系数)。

3.3 给定位移支座

给定位移支座指在某些方向会发生给定位移值的支座,如图 8 所示。

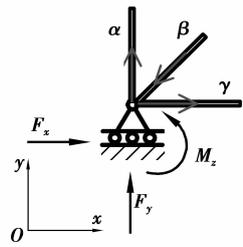


图 5 刚性支座示意图
Fig.5 Rigid support

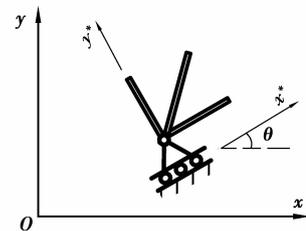


图 6 倾斜支座示意图
Fig.6 Tilting support

$$M_i^e = 0 \quad (56)$$

通过向 \mathbf{C} 中添加新行和向 \mathbf{P} 添加一个 0 分量将式(56)与式(46)合并,以强制杆元 e 负端弯矩为 0。此时计算出④结点位移角转角不能代表杆元 e 铰接端转角,需通过式(6)求出,并叠加外荷载在铰接端引起的转角。

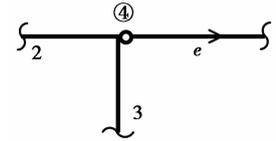


图 9 杆端铰接示意图

Fig.9 Member-end hinged

4 算 例

采用前述特大增量步算法编程计算,如图 10 所示。平面框架各结点的位移和各梁端内力及支座反力,并与商业有限元软件 ANSYS 计算结果对比。已知:结点⑥支座倾斜角 45° ,结点③支座沉降 3 mm,弹簧刚度 $k = 2.0 \times 10^4$ kN/m; $EI = 4.2 \times 10^7$ Pa · m², $EA = 2.1 \times 10^9$ Pa · m²。

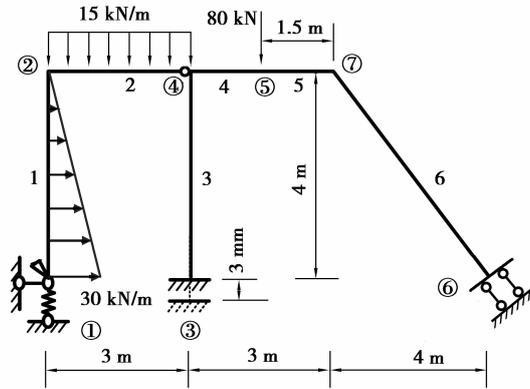


图 10 受复杂支座约束的平面框架

Fig.10 2D frame in control of complex support

采用 LIM 经 6 次迭代计算得到的解与 ANSYS 解对比数据如表 1~3 所示, LIM 计算用时 0.05 s, ANSYS 计算用时 0.03 s。

表 1 杆端内力

Table 1 Member-end Inner Force

单元号	节点号	特大增量步解			ANSYS 解		
		轴力	剪力	弯矩	轴力	剪力	弯矩
1	1	34 176.699 1	32 541.318 8	5 195.372 65	-34 176.699 1	32 541.318 8	-5 195.372 65
	2	-34 176.699 1	27 458.681 2	-35 030.097 3	-34 176.699 1	-27 458.681 2	-35 030.097 3
2	2	27 458.681 2	34 176.699 1	35 030.097 3	-27 458.681 1	34 176.699 1	-35 030.097 3
	4	-27 458.681 2	10 823.300 9	0.000 000 00	-27 458.681 2	-10 823.300 9	0.000 000 00
3	3	54 041.451 1	-9 323.168 57	-18 829.884 0	-54 041.451 1	-9 323.168 57	18 829.884 0
	4	-54 041.451 1	9 323.168 57	-18 462.790 3	-54 041.451 1	-9 323.168 57	-18 462.790 3
4	4	36 781.849 7	43 218.150 3	18 462.790 3	-36 781.849 7	43 218.150 3	-18 462.790 3
	5	-36 781.849 7	-43 218.150 3	46 364.435 1	-36 781.849 7	43 218.150 3	46 364.435 1
5	5	36 781.849 7	-36 781.849 7	-46 364.435 1	-36 781.849 7	-36 781.849 7	46 364.435 1
	7	-36 781.849 7	36 781.849 7	-8 808.339 50	-36 781.849 7	-36 781.849 7	-8 808.339 50
6	6	52 017.390 8	0.000 000 00	-8 808.339 50	-52 017.390 8	0.000 000 00	8 808.339 50
	7	-52 017.390 8	0.000 000 00	8 808.339 50	-52 017.390 8	0.000 000 00	8 808.339 50

表 2 支座反力
Table 2 Supporting Force

结点号	特大增量步解			ANSYS 解		
	X 向	Y 向	M_z	X 向	Y 向	M_z
1	-32 541.318 8	34 176.699 1	5 195.372 65	-32 541.318 8	34 176.699 1	5 195.372 65
3	9 323.168 57	54 041.451 1	-18 829.884 0	9 323.168 57	54 041.451 1	-18 829.884 0
6	-36 781.849 7	36 781.849 7	-8 808.339 50	-36 781.849 7	36 781.849 7	-8 808.339 50

表 3 结点位移
Table 3 Nodal Displacement

单元号	节点号	特大增量步解			ANSYS 解		
		u -水平位移	v -竖直位移	θ -转角	u -水平位移	v -竖直位移	θ -转角
1	1	0.000 000 00	-0.001 708 83	0.000 000 00	0.000 000 00	-0.001 708 83	0.000 000 00
	2	-0.001 179 63	-0.001 773 93	-0.000 010 74	-0.001 179 63	-0.001 773 93	-0.000 010 74
2	2	-0.001 179 63	-0.001 773 93	-0.000 010 74	-0.001 179 63	-0.001 773 93	-0.000 010 74
	4	-0.001 218 86	-0.003 102 94	-0.000 458 25	-0.001 218 86	-0.003 102 94	-0.000 458 25
3	3	0.000 000 00	-0.003 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	-0.003 000 00	0.000 000 00
	4	-0.001 218 86	-0.003 102 94	0.000 017 48	-0.001 218 86	-0.003 102 94	0.000 017 48
4	4	-0.001 218 86	-0.003 102 94	0.000 017 48	-0.001 218 86	-0.003 102 94	0.000 017 48
	5	-0.001 245 13	-0.002 992 44	0.000 515 72	-0.001 245 13	-0.002 992 44	0.000 515 72
5	5	-0.001 245 13	-0.002 992 44	0.000 515 72	-0.001 245 13	-0.002 992 44	0.000 515 72
	7	-0.001 271 40	-0.001 469 56	0.001 186 37	-0.001 271 40	-0.001 469 56	0.001 186 37
6	6	0.001 002 26	0.001 002 26	0.000 000 00	0.001 002 26	0.001 002 26	0.000 000 00
	7	-0.001 271 40	-0.001 469 56	0.001 186 37	-0.001 271 40	-0.001 469 56	0.001 186 37

对比 ANSYS 的计算结果,可以验证文中所建立的方法是有效的,且两者具有相同的计算精度,计算效率相当。

5 结 论

1)该算法在复杂平面框架中的应用显示,与位移法集成总刚阵相比,LIM 平衡矩阵的集成更加简洁直观。

2)与文献[17]相比,文中阐述的边界条件处理方法适用的约束类型更广,计算更加简洁通用,为 LIM 在复杂平面框架弹塑性中的应用奠定了基础。新的约束处理方法不用对平衡矩阵进行局部冲零处理,不用另开辟内存存储被冲零元素,可一次性计算出内力和支反力,节约了内存和计算时间。

3)LIM 以广义内力作为基本未知量,并将三大控制方程分离,理论上当有比位移有限元更高的计算精度,但在线弹性问题中未能发挥这样的优势,也没有表现出文献[11-12]论述的效率优势。笔者将在后续弹塑性问题研究中就效率和精度继续探讨。

参考文献:

- [1] Bathe K J. Finite element procedures[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2014.
[2] Giambanco F, Palizzolo L, Panzeca T. The indirect force method[J]. Computers & Structures, 1990, 37(5): 759-768.

- [3] Kaneko I, Lawo M, Thierauf G. On computational procedures for the force method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1982, 18(10): 1469-1495.
- [4] 刘西拉,张春俊.基于广义逆矩阵的特大增量步算法[C/OL]//第三届全国结构工程学术会议.北京:工程力学杂志社,1994[2016-04-03].<http://cpfd.cnki.com.cn/Article/CPFDTOTAL-LXFY199406001006.htm>.
LIU Xila, ZHANG Chunjun. Generalized-inverse-based large increment method[C/OL]. *Proceedings of the third National Conference on structural engineering*. Beijing: Engineering Mechanics Presss, 1994 [2016-04-03]. <http://cpfd.cnki.com.cn/Article/CPFDTOTAL-LXFY199406001006.htm>. (in Chinese)
- [5] Ben I A, Greville T. Generalized inverse: theory and application[M]. New York: Wiley, 1974.
- [6] 周其刚.桁架结构分析的广义逆矩阵力法[J].西南交通大学学报,1988(1):60-66.
ZHOU Qigang. The force method using generalized inverse of matrices[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 1988(1): 60-66. (in Chinese)
- [7] 刘西拉,王开健,张春俊.桁架结构材料非线性弹性问题的广义逆力法[J].工程力学,2005,22(S1):7-15.
LIU Xila, WANG Kaijian, ZHANG Chunjun. The large increment method for nonlinear elastic problems of truss systems[J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(S1): 7-15. (in Chinese)
- [8] 郭早阳.特大增量步方法和并行程序设计[D].北京:清华大学,1999.
GUO Zaoyang. The large increment method and the parallelprograming[D]. Beijing: Tsinghua University, 1999. (in Chinese)
- [9] 王开健.基于特大增量步算法的网络并行计算[D].北京:清华大学,2005.
WANG Kaijian. Network parallel computation based on the large increment method[D]. Beijing: Tsinghua University, 2005. (in Chinese)
- [10] 龙丹冰.基于并行的特大增量步算法在计算固体力学中的应用[D].上海:上海交通大学,2012.
LONG Danbing. The extended application of parallel computing-based large increment method in computational solid mechanics[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2012. (in Chinese)
- [11] Barham WS, Aref A J, Dargush G F. Flexibility-based large increment method for analysis of elastic - perfectly plastic beam structures[J]. *Computers & Structures*, 2005, 83(28/29/30): 2453-2462.
- [12] Przemieniecki J S. Theory of matrix structural analysis[M]. New York: Mcgraw-hill, 1968.
- [13] 贾红学,龙丹冰,刘西拉.特大增量步算法分析变截面梁问题[J].工业建筑,2013(S1):189-191.
JIA Hongxue, LONG Dandbing, LIU Xila. The analysis of the varying cross-section beam problem using large increment method[J]. *Industrial Construction*, 2013(S1):189-191. (in Chinese)
- [14] Kassimal A. Matrix analysis of structures[M]. New York: Harper & Row, 1983.
- [15] 龙驭球.结构矩阵分析中的平衡-几何互伴定理[J].工程力学,2012,29(5):1-7.
LONG Yuqiu. An adjoint theorem between equilibrium matrix and geometric matrix in structural analysis[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(5): 1-7. (in Chinese)
- [16] 谢用九,李伟.用QR分解进行矩阵力法计[J].西南交通大学学报,1981(3):93-100.
XIE Yongjiu, LI Wei. The matrix force method based on QR decomposition[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 1981(3):93-100. (in Chinese)