

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2017.04.012

基于行人动力学模型的人-桥竖向动力相互作用

张琼,南娜娜,朱前坤,杜永峰

(兰州理工大学防震减灾研究所,兰州 730050)

摘要:基于行人动力学模型,研究了人-桥竖向动力相互作用。行人动力学模型采用以行人步频和体重表示的刚度-质量-阻尼(SMD)模型,人行桥假定为 Euler-Bernoulli 梁模型,建立人-桥竖向动力相互作用控制方程。采用状态空间法进行非比例阻尼系统瞬时模态的求解,得到系统的时变频率和阻尼比;利用变步长四阶五级 Runge-Kutta-Fehlberg 算法求解时变控制方程,对比分析考虑人-桥竖向动力相互作用和只在人行荷载作用下人行桥的动力响应。结果表明:考虑人-桥动力相互作用,人行桥自振频率略有降低,阻尼有显著增大;当行人以人行桥的频率行走时,考虑人-桥竖向动力相互作用结构的动力响应比不考虑人-桥相互作用显著降低。

关键词:桥梁工程;行人动力学模型;人-桥动力相互作用;时变非比例阻尼系统;状态空间法

中图分类号:U441+.3

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2017)04-093-08

Pedestrian-bridge dynamic interaction in the vertical based on biodynamic model

ZHANG Qiong, NAN Nana, ZHU Qiankun, DU Yongfeng

(Institute of Earthquake Protection and Disaster Mitigation, Lanzhou University of Technology,
Lanzhou 730050, P.R.China)

Abstract: The vertical dynamic interaction of pedestrian-bridge is studied by using biodynamic model. The biodynamic model adopts the stiffness-mass-damping (SMD) model expressed by pedestrian's step frequency and weight, under the assumption that the foot bridge is of Euler-Bernoulli model, and the control equation of pedestrian-bridge dynamic interaction in the vertical is established. The state-space method is used to solve the instantaneous model of non-proportionally damped system, and the time-varying frequency and damping ratio are obtained. The time-varying control equation is determined by using variable step four-level-five-order Runge-Kutta-Fehlberg algorithm, and the dynamic responses of pedestrian bridge were compared with considering pedestrian-bridge vertical dynamic interaction and under the action of the pedestrian load. The calculated results show that with considering the pedestrian-bridge dynamic interaction in the vertical, the frequency of the foot bridge is lowered slightly, and the damping is increased significantly. When pedestrians walk at the frequency of foot bridge, the dynamic response with

收稿日期:2016-11-01

基金项目:国家自然科学基金(51508257,51578274);教育部长江学者创新团队项目(IRT13068);甘肃省高等学校科研项目(2015B-34)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (51508257, 51578274), Program for Chongqing Scholars and Innovative Research Team in University of Ministry of Education of China (IRT13068) and Higher Education Science and Technology Project of Gansu Province (2015B-34).

作者简介:张琼(1984-),女,兰州理工大学讲师,主要从事行人-结构耦合振动方面的研究,(E-mail)283322638@qq.com。

considering the Pedestrian-bridge dynamic interaction in the vertical should be obviously lower than that without considering pedestrian-bridge interaction.

Keywords: bridge engineering; biodynamic model; pedestrian-bridge dynamic interaction; time-varying non-proportionally damped system; state-space method

人致振动已成为人行桥设计中必须考虑的重要问题^[1-2]。当前大多数设计规范中,估算人致激励引起人行桥竖向振动幅值的方法,均把行人对人行桥的作用单纯看作人行荷载^[3-4]。这种方法适用于大多数情形,但不同于一般荷载,行人是具有独立反馈系统的动力系统,步行力随着人行桥振动而发生改变,进而再次影响人行桥的振动情况,从而构成所谓的人-桥动力相互作用,对于轻质人行桥,特别是行人步频与结构自振频率接近时,忽略人-桥动力相互作用,估算结果与实测值会偏离很大^[5]。

目前人-桥动力相互作用主要局限于侧向相互作用,而关于竖向的动力相互作用研究成果较少。王海等^[6]基于具有分布参数的人体动力学模型,分析了人-简支梁耦合体系的动力学特征,研究了人对简支梁动力特性的影响。何卫等^[7]基于单自由度的人体模型,将分布人群简化成均匀连续分布的质量-弹簧-阻尼系统,考虑楼板的阻尼,建立了有阻尼的分布人群-薄板耦合系统模型,研究了人体等参数对耦合系统动力特性的影响。以上研究关注静态的人或人群对结构竖向动力特性的影响。李红利等^[8]基于反映行人步行特征的生物力学模型,从等效的观点研究振动环境下行人平衡控制理论,借用风工程中强迫振动气动导数识别的思想,研究了人-桥竖向动力相互作用效应理论。秦敬伟等^[9]基于生物力学中的双足步行模型,通过施加水平控制力的反馈机制保持行走中的步态稳定,采用 Lagrange 方程推导人体-结构相互作用系统的运动方程,探讨了低频结构考虑人体-结构相互作用的必要性。对于结构工程师所关注的行人对结构的动力学特性的影响以及考虑人-结构相互作用时结构的动力响应而言,以上分析所采用人体动力学模型过于复杂。Kim 等^[10]提出一种两自由度的人体动力学模型以模拟行走过程中人体竖向动力特征,但是该人体动力学模型参数取自 ISO 5982 所建议的人站立时的相关动力参数,不能代表实际行走过程中的动力参数。Silva 等^[11]基于 20 组行人行走在坚硬地面上的实测加速度数据,提出了模拟行人行走竖向动力特性的单自由度人体动力学模型,模型中质量、刚度和阻尼等参动力数用人体质量和步频表示。文献[5]、[12]和[13]分别基于 Silva 和 Pimentel 提出的人体动力学模型,研究了人-结构竖向动力相互作用,但在研究中均把结构当作单自由度动力系统处理,关注点都是共振时的动力响应,没有深入探讨行人对结构动力特性的影响。

笔者在已有研究成果基础上,建立人-桥竖向动力相互作用控制方程,由于结构阻尼较低,人体阻尼较高,使得人-桥竖向动力耦合系统是非比例阻尼系统,采用状态空间法进行瞬时模态的求解,得到系统的时变频率和阻尼比;由于行人在人行桥的不断移动,使得人-桥竖向动力相互作用系统是时变系统,利用变步长四阶五级 Runge-Kutta-Fehlberg 算法求解控制方程,对比分析考虑人-桥竖向动力相互作用和只在人行荷载作用下人行桥的动力响应。

1 人-桥竖向动力相互作用控制方程

图 1 所示为由行人和人行桥组成的耦合动力系统。人行桥假定为均匀截面的 Euler-Bernoulli 梁, L 为人行桥跨度, EI 为人行桥的抗弯刚度(E 为弹性模量, I 为惯性矩), m 为人行桥单位长度的质量。行人模型由

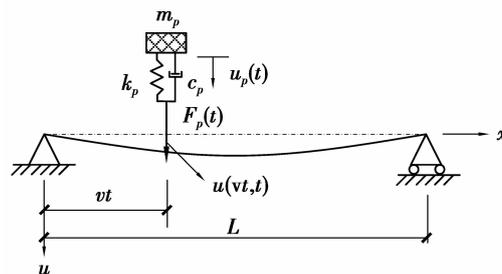


图 1 人-桥竖向动力相互作用示意图

Fig.1 Pedestrian-bridge dynamic interaction in the vertical

弹簧-质量-阻尼器(SMD)的人体动力学模型和人行荷载共同组成,人行荷载用傅立叶级数模拟^[11,14]。 m_p 、 k_p 、 c_p 分别表示人体动力学模型中的质量、刚度和阻尼, F_p 表示为人行荷载, v 表示为行人步速,一般可取0.9倍的步频, u_p 、 u 表示行人和人行桥的竖向位移, t 为步行时间。假定在步行中,行人与桥面始终处于接触状态。

1.1 行人动力平衡方程

行人的受力包括:惯性力 $F_I = m_p \ddot{u}_p$ 、阻尼力 $F_D = c_p (du/dt - \dot{u}_p)$ 、弹性力 $F_S = k_p (u - u_p)$ 。由行人受力情况,可得到行人动力平衡方程

$$m_p \ddot{u}_p + k_p (u_p - u) + c_p (\dot{u}_p - du/dt) = 0, \quad (1)$$

式中: m_p 、 k_p 、 c_p 为人体动力参数。Felipe等^[11]对20个行人利用加速度传感器对行人的走行情况进行试验研究,将得到的每个行人的加速度以及对应的人行荷载取前三阶幅值,通过求解相应的方程得到每个行人的动力参数,将参数进行统计分析得出行人步频、质量与人体动力学参数的相关关系,拟合出关于行人步频、质量的人体参数回归表达式,其中

$$\left. \begin{aligned} m_p &= 97.082 + 0.275M - 37.518f_p, \\ c_p &= 29.041m_p^{0.883}, \\ k_p &= 30\ 351.744 - 50.261c_p + 0.035c_p^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: M 为行人实际质量, f_p 为行走频率。

注意到 $du/dt = \partial u/\partial t + v\partial u/\partial x$,第一项表示荷载所在位置梁的振动速度;第二项表示由于荷载的移动,使其在人行桥振动过程中引起的斜率上移动而产生的附加速度。由于人行走速度较低和一般人行桥在活载作用下变形斜率很小,这一项可忽略不计。式(1)可写成

$$m_p \ddot{u}_p + k_p (u_p - u) + c_p (\dot{u}_p - \partial u/\partial t) = 0. \quad (3)$$

1.2 人行桥动力平衡方程

人行桥的受力包括:行人重力 $F'_G = m_p g$ 、惯性力 $F'_I = m_p d^2/dt^2$ 、弹性力 $F'_S = k_p (u_p/u)$ 、阻尼力 $F'_D = c_p (\dot{u}_p - du/dt)$ 。此外还受到行人荷载作用^[11,14],如式(4)所示。

$$F_p = G \sum_i \alpha_i \sin(2\pi i f_p t - \theta_i), \quad (4)$$

式中: G 为行人体重,一般取750 N; α_i 为动载因子; f_p 为行走步频; θ_i 为相位角,一般取0。动载因子一般取前三阶,如式(5)所示。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(f_p) &= -0.27f_p^3 + 1.32f_p^2 - 1.76f_p + 0.76, \\ \alpha_2 &= 0.07, \\ \alpha_3 &= 0.06. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则人行桥所受的荷载,可表示为

$$F = \delta(x - vt)(F'_G - F'_I + F'_S + F'_D + F_p). \quad (6)$$

人行桥动力平衡方程可表示为

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \delta(x - vt)[m_p g + k_p (u_p - u) + c_p (\dot{u}_p - \partial u/\partial t) + F_p], \quad (7)$$

将 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \cdot \phi_n(x)$ 代入式(7),荷载项可表示为

$$\left. \begin{aligned} F_m &= F_{m1} + F_{m2}, \\ F_{m1} &= \int_0^L \delta(x - vt)(m_p g + F_p) \phi_m dx, \\ F_{m2} &= \int_0^L \delta(x - vt) \left\{ k_p u_p + c_p \dot{u}_p - \sum_{n=1}^{\infty} [k_p y_n + c_p \dot{y}_n] \phi_n \right\} \phi_m dx. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

人行桥的动力平衡方程可化为

$$m_n \ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n m_n \dot{y}_n + c_p \sum_{m=1}^{\infty} \dot{y}_m \phi_m \phi_n + m_n \omega_n^2 y_n + \left. \begin{aligned} k_p \sum_{m=1}^{\infty} y_m \phi_m \phi_n - \phi_n (k_p u_p + c_p \dot{u}_p) &= \phi_n (m_p g + F_p). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: m_n 、 ξ_n 、 $\omega_n = 2\pi f_n$ 为模态质量、模态阻尼比和模态圆频率。

1.3 人-桥竖向动力相互作用控制方程

行人所在位置人行桥的位移也用振型叠加表示,即 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \cdot \phi_n(x)$, 则行人的动力学平衡方程可化为

$$m_p \ddot{u}_p + c_p \dot{u}_p + k_p u_p - c_p \sum_{n=1}^{\infty} \dot{y}_n \phi_n - k_p \sum_{n=1}^{\infty} y_n \phi_n = 0. \quad (10)$$

将式(9)和式(10)联立,就得到人-桥竖向动力相互作用控制方程组,该动力系统是时变系统,写成如(11)的矩阵形式。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{F}, \quad (11)$$

式中:质量矩阵 \mathbf{M} 、刚度矩阵 \mathbf{K} 和阻尼矩阵 \mathbf{C} 如式(12)所示。

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p \end{pmatrix}, \quad (12a)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} & -k_p \phi_1 \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} & -k_p \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} & -k_p \phi_N \\ -k_p \phi_1 & -k_p \phi_2 & \cdots & -k_p \phi_N & -k_p \end{pmatrix}, \quad (12b)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} & -c_p \phi_1 \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} & -c_p \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} & -c_p \phi_N \\ -c_p \phi_1 & -c_p \phi_2 & \cdots & -c_p \phi_N & -c_p \end{pmatrix}, \quad (12c)$$

式中, $C_{ii} = 2\xi_i \omega_i m_i + c_p \phi_i \phi_i$, $K_{ii} = \omega_i^2 m_i + k_p \phi_i \phi_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $C_{ij} = c_p \phi_i \phi_j$, $K_{ij} = k_p \phi_i \phi_j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ 且 $i \neq j$ 。

式(11)中 \mathbf{F} 为广义力向量, \mathbf{y} 为广义位移向量即

$$\mathbf{F} = [\rho_F \phi_1, \rho_F \phi_2, \dots, \rho_F \phi_N, 0]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N, u_p]^T, \quad (14)$$

式中, $\rho_F = m_p g + F_p(t)$ 。由于行人在人行桥上行走, \mathbf{K} 、 \mathbf{C} 和 \mathbf{F} 都在不断变化, 成为一个时变的微分方程组。对于这样的时变的微分方程组, 笔者基于 MATLAB 计算仿真平台, 利用变步长四阶五级 Runge-Kutta-Fehlberg 算法求解。

1.4 人-桥竖向动力相互作用模态分析

人-桥竖向动力相互作用耦合系统中, 由于结构阻尼较低, 人体阻尼较高, 使得人-桥耦合系统的阻尼为非比例阻尼, 笔者采用状态空间方法进行瞬时模态的求解^[15]。定义以下变量:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

通过求解特征值, 可得到系统的模态特性, 见式(16):

$$\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi. \quad (16)$$

第 i 阶频率 f_i 和阻尼比 ξ_i 可由式(17)确定:

$$f_i = \frac{|\lambda_i|}{2\pi}; \xi_i = \frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|}. \quad (17)$$

2 算例分析

本文算例取自文献[16]提供的由 FRP 材料制作成的斜拉轻质人行桥。该桥全长为 113 m, 主跨为

63 m,该桥全重 20 000 kg。在文献[16]中把该人行桥主跨部分近似为简支梁,在本算例中沿用这一做法。该人行桥实测得到的竖向前两阶模态参数为: $f_1 = 1.52 \text{ Hz}$, $\xi_1 = 0.42\%$, $m_1 = 2\ 750 \text{ kg}$, $f_2 = 1.86 \text{ Hz}$, $\xi_2 = 0.70\%$, $m_2 = 3\ 600 \text{ kg}$ 。

图 2 所示为行人以 1.74 Hz 的步频通过人行桥时,系统瞬时频率变化情况,可以看出结构瞬时频率与空载时相比略有减少,而人体频率有增大趋势。结构一阶瞬时频率在一阶振型顶点处达到最小值,结构二阶瞬时频率在二阶振型两个顶点处达到最小值,行人的瞬时频率的两个峰值介于结构一阶振型和二阶振型顶点之间。这与早期的研究发现行人行走不改变结构的频率结果不一致^[17],而与近期的研究结果吻合^[18]。

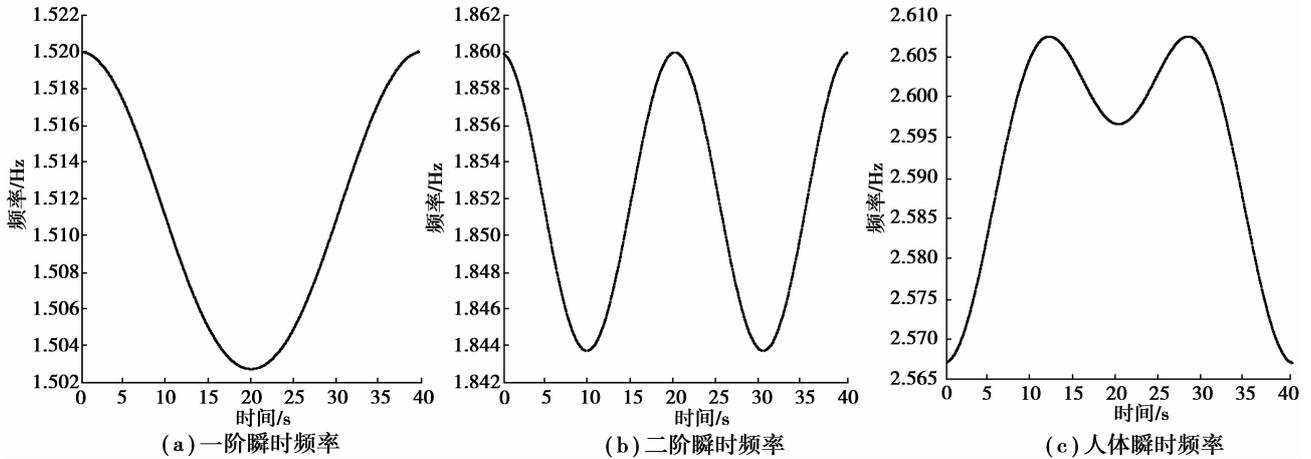


图 2 系统瞬时频率

Fig.2 Vibration frequencies of the pedestrian-bridge dynamic interaction system

图 3 所示为行人以 1.74 Hz 的步频通过人行桥时,系统瞬时阻尼变化情况,可以看出与空载时相比,均呈增大趋势。结构瞬时阻尼均在相应振型峰值点处达到最大值,类似于 TMD 减振器,放置在相应振型峰值点处,可得到最佳减振效果;人体最大阻尼出现在结构一阶振型峰值点处。

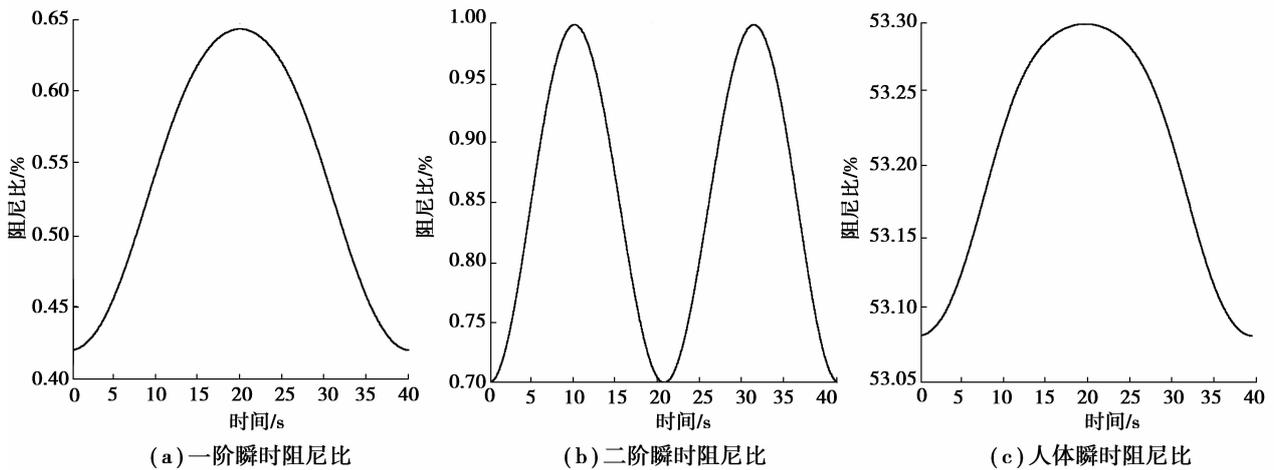


图 3 系统瞬时阻尼比

Fig.3 Damping ratio of the pedestrian-bridge dynamic interaction system

图 4 所示为结构动力特性随行人行走步频的变化率,变化率定义为考虑人-桥相互作用时的动力特性(频率、阻尼比)极值与空载时值的差值再与空载时值的比值。从图 4 中可以看出,考虑人-桥相互作用,人行桥自振频率都有所降低,一阶频率的变化率绝对值要比二阶的值要大,频率变化率的绝对值随着行走步频的增大而减少,但变化率总体很少;考虑人-桥相互作用时结构阻尼比均有显著增加,一阶阻尼比的变化率绝对值要比二阶的值大,变化率也随着行走步频的增大而减少。

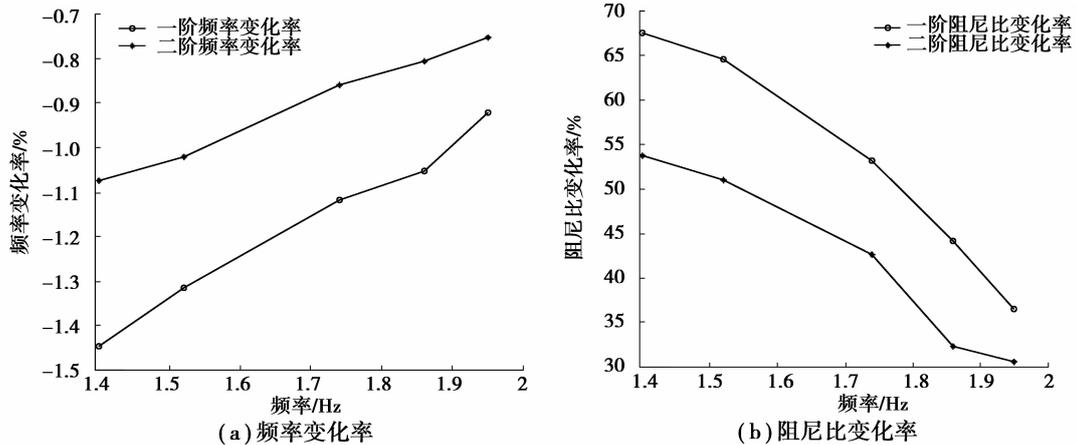


图 4 结构频率和阻尼比变化率

Fig.4 Change rate of vibration frequencies and damping ratio

图 5 所示为行人以 1.52、1.70、1.86 Hz 的步频通过时人行桥的加速度时程曲线。其中当行人以与结构的一阶频率 1.52 Hz 相等的步频通过该桥时,只是在人行荷载作用下该桥的加速度峰值为 3.36 m/s^2 ,考虑人-桥相互作用时的加速度峰值为 2.35 m/s^2 ,比只是在人行荷载作用下降低 30.7%;当行人以与结构的二阶频率 1.86 Hz 相等的步频通过该桥时,只是在人行荷载作用下的加速度峰值为 2.32 m/s^2 ,考虑人-桥相互作用时的加速度峰值为 1.98 m/s^2 ,比只是在人行荷载作用下降低 14.7%;当行人以处在结构一阶频率和二阶频率之间的 1.70 Hz 的步频通过该桥时,只是在人行荷载作用下加速度峰值为 0.39 m/s^2 ,考虑人-桥相互作用时的加速度峰值为 0.34 m/s^2 ,比只是在人行荷载作用下降低 12.4%。根据文献[2],加速度峰值为 0.35 m/s^2 取为振动舒适度限值,可知行人以结构一阶频率和二阶频率相等的步频通过人行桥时,无论是否考虑人-桥相互作用,加速度峰值都远超振动舒适度限值,而当行人以 1.70 Hz 的步频通过该桥时,只是在人行荷载作用下评估结果会出现振动舒适度问题,考虑人-桥相互作用则不会引起振动舒适度问题。

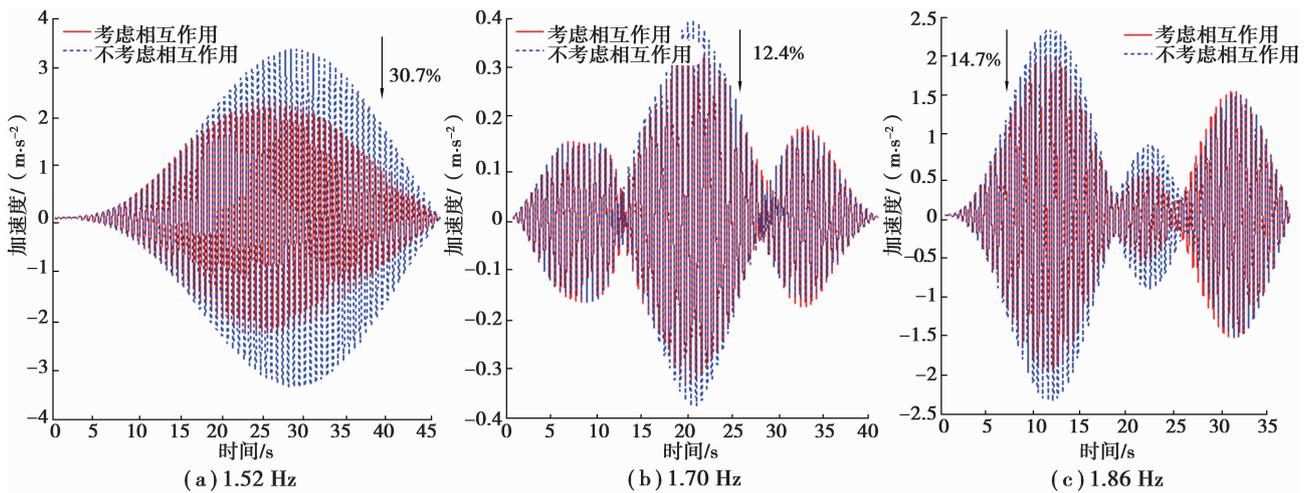


图 5 不同行走步频人行桥的加速度时程曲线

Fig.5 Acceleration of the bridge at different walking frequency

图 6 所示为行人以 1.52、1.70、1.86 Hz 的步频通过,人行桥加速度时程的傅立叶谱曲线。由图 6 可以看出,当行人以与结构一阶频率 1.52 Hz 相等的步频通过该桥时,引起该桥一阶频率共振,在其步频倍频处亦有较小振动;当行人以与结构二阶频率 1.86 Hz 相等的步频通过该桥时,人行桥的加速度时程的傅立叶谱值在 1.807、1.855、1.904 Hz 处较大,其中 1.855 Hz 与行人步频十分接近,而 1.807 Hz 和 1.904 Hz 可以看成由行人类似于 TMD 减振器分解而成,降低了共振时傅立叶谱峰值;当行人以处在结构一阶频率和二阶频率之间的 1.70 Hz 的步频通过该桥时,激起人行桥一阶频率振动量较小,其步频的倍频处也有一定的振动谱值,而傅立叶谱峰值谱的峰值主要出现在 1.672 Hz 和 1.733 Hz 处,实际上这是行人类似于 TMD 减振器把步频

1.70 Hz 谱峰值分解而成。从图 6 中还可以看出考虑人-桥相互作用与不考虑人-桥相互作用傅立叶谱值有不同程度减小。

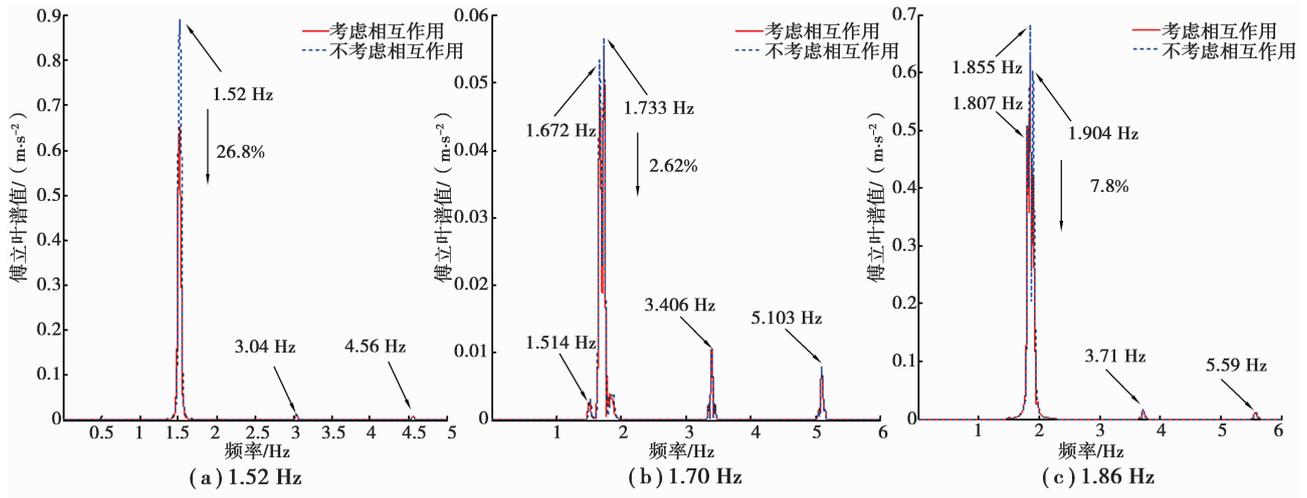


图 6 不同行走步频下人行桥加速度时程傅立叶谱曲线

Fig.6 Fourier spectrum of acceleration at different walking frequency

图 7 所示为不同步频下考虑人-桥动力相互作用与只在人行荷载作用下加速度峰值变化率,变化率定义为只在人行荷载作用下结构加速度峰值与考虑相互作用加速度峰值的差值与只在人行荷载作用下加速度峰值的比值。从图 7 中可以看出当行人步频与人行桥频率相等时,考虑人-桥相互作用加速度峰值要比不考虑相互作用时显著减小,这与现场测试结果吻合^[18];而当行人以其它步频行走时,考虑人-桥相互作用加速度峰值与只在人行荷载作用下的值相比不确定。行人实际上类似与 TMD 减振器,当 TMD 的频率与结构频率一致时,有较好的减振效果,若 TMD 参数取值不合适,非但没有减振效果,反而会增大结构振动。

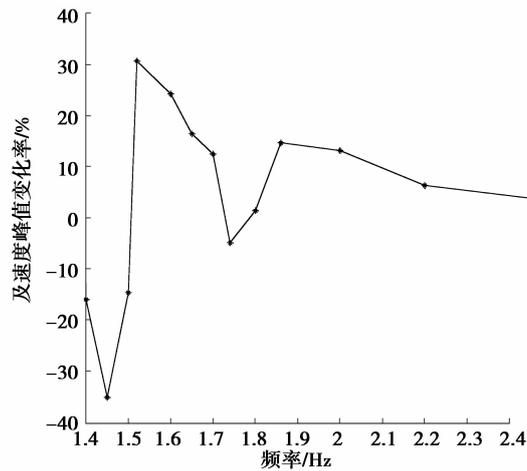


图 7 不同步频下人行桥加速度峰值变化率

Fig.7 Acceleration peak change rate of bridge at different walking frequency

3 结 论

1)考虑人-桥动力相互作用,行人在通过人行桥过程中,系统的频率和阻尼是时变的,这与早期的研究认为行人行走不改变动力特性结果不一致,而与近期的研究结果一致;由于人体是高阻尼的动力系统,考虑人-桥相互作用后,结构的阻尼比比不考虑人-桥相互作用显著增加,但结构的频率比不考虑人-结构相互作用略有降低,变化率均随着行走步频的增大而减少。

2)在考虑人-桥动力相互作用人行桥的时变频率和阻尼,在行人行至其相应振型顶点处达到极值,这一结论类似把行人看成 TMD 减振器,把 TMD 安置到振型顶点处得到较好的减振率。

3)当行人的行走频率与结构频率一致时,考虑人-结构相互作用结构的动力响应比只在人行荷载作用显著降低,与实测结果一致,行人类似于 TMD 减振器,把共振时的谱值分解成与共振频率相邻两个频率上较小的谱峰值;而当行人以其它步频行走时,考虑人-桥相互作用加速度峰值与只在人行荷载作用的值相比不确定,类似于 TMD 减振器,如果取的参数不合适,非但没有减振效果,反而会增大结构振动。

4)这里主要研究了单人-桥竖向动力相互作用,对于随机人群-人行桥竖向动力相互作用有待在后续工作中进行。

参考文献:

- [1] Živanović S, Pavić A, Reynolds P. Probability-based prediction of multi-mode vibration response to walking excitation[J]. *Engineering Structures*, 2007, 29(6): 942-954.
- [2] 冯鹏,金飞飞,叶列平,等.人行天桥结构振动舒适度量化与振动特性实测研究[J]. *振动工程学报*, 2013, 26(4): 545-553.
FENG Peng, JING Feifei, YE Lieping, et al. Quantification of pedestrian's comfort level and dynamic properties of footbridge vibration based on in-situ measurement[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(4): 545-553. (in Chinese)
- [3] Caetano E, Cunha Á, Moutinho C, et al. Studies for controlling human-induced vibration of the Pedro e Inês footbridge, Portugal. Part 2: Implementation of tuned mass dampers[J]. *Engineering Structures*, 2010, 32(4): 1082-1091.
- [4] BS Institute. Steel, concrete and composite bridges. Specification for loads, BS 5400: Part 2[M]. London: British Standard Institution, 1978.
- [5] da Silva F T, Brito H M B F, Pimentel R L. Modeling of crowd load in vertical direction using biodynamic model for pedestrians crossing footbridges[J]. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2013, 40(12): 1196-1204.
- [6] 王海,周叮,王曙光.人-梁相互作用动力学模型研究[J]. *工程力学*, 2010, 27(5): 14-20.
WANG Hai, ZHOU Ding, WANG Shuguang. Modeling of the dynamic interaction of human occupants and beam[J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(5): 14-20. (in Chinese)
- [7] 何卫,谢伟平,刘隆.人-板耦合系统动力特性研究[J]. *工程力学*, 2013, 30(1): 295-300
HE Wei, XIE Weiping, LIU Long. Study on dynamic characteristics of human-floor interaction system[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(1): 295-300. (in Chinese)
- [8] 李红利,陈政清.人-桥竖向动力相互作用效应理论与试验研究[J]. *土木工程学报*, 2014, 47(6): 78-87
LI Hongli, CHEN Zhengqing. Analytical and experimental study on vertically dynamic interaction between human and bridge[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2014, 47(6): 78-87. (in Chinese)
- [9] 秦敬伟,杨庆山.基于双足步行模型和反馈机制的人体-结构相互作用[J]. *建筑结构学报*, 2014, 35(s1): 18-24
QIN Jingwei, YANG Qingshan. Human-structure interaction based on bipedal walking model and feedback mechanism[J]. *Journal of Building Structures*, 2014, 35(s1): 18-24. (in Chinese)
- [10] Kim S H, Cho K I, Choi M S, et al. Development of human body model for the dynamic analysis of footbridges under pedestrian induced excitation[J]. *International Journal of Steel Structures*, 2008, 8(4): 333-345.
- [11] Silva F T, Pimentel R. Biodynamic walking model for vibration serviceability of footbridges in vertical direction[C]//EURODYN 2011 Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, Leuven, Belgium, 2011: 1090-1096.
- [12] Pfeil M, Amador N, Pimentel R, et al. Analytic-numerical model for walking person-footbridge structure interaction[C]// Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2014, Porto, Portugal, Portugal: [s. n.], 2014: 1079-1085.
- [13] Dang H V, Živanović S. Modelling pedestrian interaction with perceptibly vibrating footbridges[J]. *FME Transactions*, 2013, 41(4): 271-278.
- [14] Kerr S C, Bishop N W M. Human induced loading on flexible staircases[J]. *Engineering Structures*, 2001, 23(1): 37-45.
- [15] Juang J N. Applied system identification[M]. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1994.
- [16] Živanović S. Probability-based estimation of vibration for pedestrian structures due to walking[D]. Sheffield, England: The University of Sheffield, 2006.
- [17] Ellis B R. Human-structure interaction in vertical vibrations[J]. *Proceedings of the ICE-Structures and Buildings*, 1997, 122(1): 1-9.
- [18] Gomez D, Silva C E, Dyke S J, et al. Interactive platform to include human-structure interaction effects in the analysis of footbridges[M]//Caicedo J, Pakzad S. *Dynamics of Civil Structures, Volume 2*. [S. l.]: Springer International Publishing, 2015: 59-65.