

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2018.05.003

# 宏纤维复合材料对弧板结构的作动方程

涂建维,黄倩文,张家瑞,罗 威,赖方鹏

(武汉理工大学 道路桥梁与结构工程湖北省重点实验室,武汉 430070)

**摘要:**为了得到宏纤维复合材料(MFC, macro fiber composite)对弧板结构的精确作动力与作动弯矩以及提高 MFC 的振动控制效果,提出了一种 MFC 复合弧板结构的作动方程计算方法。基于 MFC 的第一类压电方程,建立了考虑 MFC 与受控结构的复合作用和 MFC 受弧板曲率影响的 P1 型 MFC 复合弧板结构作动方程,得到了 MFC 对弧板结构的作动力与作动弯矩。将推导的计算结果与官方数据进行比较,两者偏差在 4% 以内;完成了 MFC 复合弧板结构的振动控制试验,采用该作动方程的有限元仿真结果与试验数据的偏差在 8.5% 以内。研究表明,文中推导的 P1 型 MFC 作动方程是正确的,完全可以用于 MFC 对弧板结构的减振控制仿真计算中。

**关键词:**宏纤维复合材料;作动方程;有限元分析;弧板结构;振动控制

**中图分类号:**TU328

**文献标志码:**A

**文章编号:**1000-582X(2018)05-023-07

## Actuating equation of macro-fiber composite on arc-plate structures

TU Jianwei, HUANG Qianwen, ZHANG Jiarui, LUO Wei, LAI Fangpeng

(Hubei Key Laboratory of Roadway Bridge and Structure Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, P.R.China)

**Abstract:** In order to obtain accurate actuating force and actuating moment of MFC(macro fiber composite) on arc-plate structures and improve the vibration control effect of MFC, we present a calculation method of MFC arc-plate structure actuating equation. On the basis of the first kind of piezoelectric basic equations, considering the compound effect between MFC and the controlled structure and the influence of arc-plane structure curvature on MFC, we establish the P1-type MFC coupled-plate structure actuating equation and obtain the actuating force and actuating moment of MFC on arc-plate structure. By comparing the model's results with the official data, it's found the deviation is less than 4%. The vibration control experiment of MFC coupled-plate structure is completed, and the deviation between the simulation results and the experimental results is less than 8.5%, which indicates that the P1-type MFC actuating equation is correct. The P1-type MFC actuating equation can be used in the simulation calculation of vibration control for the MFC arc-plate structure.

**Keywords:** macro-fiber composite; actuating equation; finite element analysis; arc-plane structure; vibration control

**收稿日期:**2017-12-09

**基金项目:**国家自然科学基金面上项目(51478372);湖北省创新群体项目(2016CFA020)。

Supported by the National Natural Science Foundation of China(51478372) and Innovation Group Project of Hubei Province(2016CFA020).

**作者简介:**涂建维(1975—),男,研究员,博士生导师,主要从事土木工程结构的振动控制和无机纤维钢筋混凝土结构方向的研究,(E-mail)tujianwei@whut.edu.cn。

压电材料可以通过不同的变形产生不同的电荷,也可以对其施加变化的电压而产生不同的变形,利用压电材料的这种智能特性可以制作传感装置和驱动装置。目前,应用较多的压电材料是压电晶体和压电陶瓷,但是,上述压电材料是脆性材料,柔韧性和弹性都很差,不能弯折,完全不能应用于球形和圆柱形等曲面结构。为此,国内外研发了一类新型压电材料——宏纤维复合材料(MFC, macro fiber composite)。MFC是将压电陶瓷制作成纤维状,然后和有机聚合物基按照不同的连通方式、体积比和空间分布复合而成。与传统的压电陶瓷相比,MFC具有极好的弯折特性、较高的耦合系数和良好的耐久性,这些优良性能使得MFC在弧形圆形板壳结构的减振降噪方面具有广阔的应用前景<sup>[1]</sup>。

要运用MFC对弧板结构进行振动控制,首先,需要了解MFC的力电关系,推导MFC复合弧板结构的作动方程,近些年,不少学者对MFC作动方程进行了研究。Zhang等<sup>[2]</sup>在Reissner-Mindlin理论的基础上,运用线性压电本构方程,建立了粘贴有MFC复合悬臂梁的有限元模型,研究了在常压下压电纤维不同的排列方式对悬臂梁变形的影响差异。Ma等<sup>[3]</sup>针对悬臂梁轴向运动产生的振动问题,运用Hamilton原理推导了梁轴向运动的自由振动方程,将MFC和主体结构分开考虑,把MFC对主体结构的作用当作外部控制力,从而简化了结构的作动方程,这为研究MFC复合结构作动方程提供了新思路。Dano等<sup>[4]</sup>用MFC对悬臂梁的热致变形进行主动控制,利用有限元软件完成了复合结构的建模并进行了实验,结果表明,MFC对减小悬臂梁热致变形有显著效果。Kwak等<sup>[5]</sup>基于Donnell-Mushtari壳理论,利用pin-force模型建立了MFC复合圆柱壳的作动方程,认为MFC为结构提供了等效作用力,该公式只考虑了MFC压电系数、弹性模量和外加电场强度3个因素,只单纯考虑了MFC的作用力,并未考虑MFC和主体结构之间的复合作用。Akash等<sup>[6]</sup>利用Kirchhoff板理论建立了二维MFC板单元动力学模型,并将其与Mindlin板理论模型和实验结果进行了对比,证明了该建模方法的有效性。Gangolu等<sup>[7]</sup>利用MFC对一弧形壳进行主动控制,基于一阶剪切变形理论,建立了四节点复合面-壳单元,运用有限元法推导出MFC弧形壳的动力学模型,但没有得到确切的MFC力电关系。

基于以上研究,推导了考虑MFC和受控结构之间的复合作用以及MFC受弧板曲率影响产生的径向作动力的作动方程,得到了精确的MFC力电关系。在此基础上进行了关于弧板结构的振动控制仿真,并完成了主动控制试验。

## 1 宏纤维复合弧板结构的作动方程

MFC复合弧板结构的作动方程是基于MFC的第一类压电方程推导的。通过对第一类压电方程的变换得到MFC中的应力,再根据应力方程推导出MFC复合弧板结构的作动方程,进而计算出MFC对弧板结构的作动力和作动弯矩。

### 1.1 MFC的压电方程

将MFC作动层视为均质的压电纤维,如图1所示。在 $x$ 轴方向极化的MFC线弹性压电材料的本构方程可以写成<sup>[8]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_y \\ \epsilon_x \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_y \\ \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_x \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: $s_{ij}^E$ 为MFC的柔度系数,其中 $i$ 表示MFC的应变方向, $j$ 表示MFC的应力方向; $d_{ij}$ 为MFC的压电应变系数,其中 $i$ 表示电场作用方向, $j$ 表示受到电场作用后压电材料的应变方向,1、2、3分别对应于笛卡尔坐标系下的 $z$ 、 $y$ 、 $x$ 方向,4、5、6分别对应于笛卡尔坐标系下的剪切变形方向 $yx$ 、 $xz$ 、 $zy$ ;  $E_x$ 为 $x$ 方向的电场强度。

MFC形状为薄片状,厚度只有0.3 mm,可以忽略厚度方向,即忽略 $y$ 方向的应力与应变。MFC剪切应变 $\gamma_{xz}$ 与电场强度 $E_x$ 无关,并且MFC本身的剪切应变 $\tau_{xz}$ 也很小,可以忽略剪切应变的影响,公式可简化为

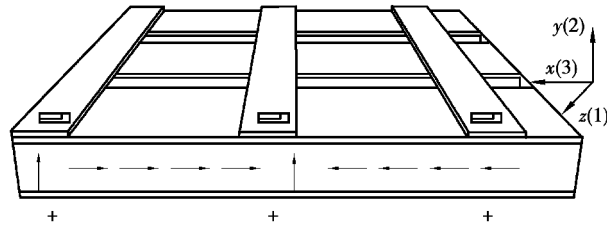


图 1 MFC 的单元结构

Fig.1 Unit Structure of MFC

$$\begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{13}^E \\ s_{13}^E & s_{33}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{33} \end{bmatrix} E_x, \quad (2)$$

式中, MFC 内的电场强度  $E_x$  为

$$E_x = \frac{V}{\omega}, \quad (3)$$

其中:  $V$  为施加的电压幅值;  $\omega$  为 MFC 电极丝插值电极间距。

MFC 的柔度系数  $s_{33}^E$  可表示为

$$s_{33}^E = \frac{1}{E_f}, \quad (4)$$

其中,  $E_f$  为 MFC 的弹性模量。

### 1.2 二维 MFC 复合弧板的作动方程

二维 MFC 复合弧板结构, 如图 2 所示。板的厚度为  $H$ ; MFC 有效长度为  $a$ 、宽度为  $b$ 、厚度为  $h$ ;  $L$  为结构中中性轴距离受控结构上表面的距离, 由于 MFC 厚度极小, 故近似令  $L=0.5H$ 。

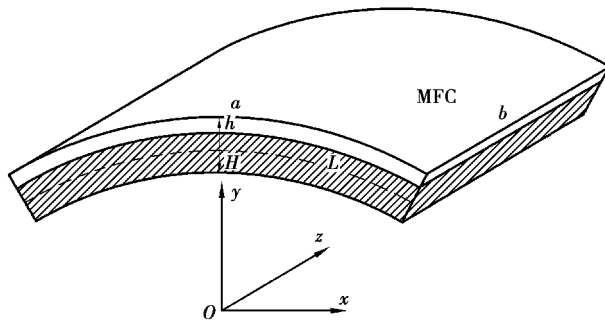


图 2 MFC 复合弧板的单元结构

Fig.2 Unit structure of composite arc plate

由公式(3)可知二维 MFC 的应力为

$$\begin{bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^E & Q_{13}^E \\ Q_{31}^E & Q_{33}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_z - d_{31} E_x \\ \epsilon_x - d_{33} E_x \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中, 矩阵  $Q^E$  是矩阵  $s^E$  的逆矩阵

$$Q_{11}^E = \frac{s_{33}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}, Q_{13}^E = Q_{31}^E = \frac{-s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2}, Q_{33}^E = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - (s_{13}^E)^2} \quad (6)$$

二维柔度矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{13}^E \\ s_{31}^E & s_{33}^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_f} & \frac{-\mu_f}{E_f} \\ \frac{-\mu_f}{E_f} & \frac{1}{E_f} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中,  $\mu_s$  为 MFC 的泊松比。

MFC 对二维弧板结构的单位长度作动弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_{z_0} &= \int_L^{L+h} (-\sigma_z) y dy = \\ & \int_L^{L+h} [Q_{11}^E (d_{31} E_x - \epsilon_z) + Q_{13}^E (d_{33} E_x - \epsilon_\theta)] y dy \\ M_{\theta_0} &= \int_L^{L+h} (-\sigma_\theta) y dy = \\ & \int_L^{L+h} [Q_{31}^E (d_{31} E_x - \epsilon_z) + Q_{33}^E (d_{33} E_x - \epsilon_\theta)] y dy \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

由弯曲变形理论可知,二维 MFC 复合结构的应变可以由弯矩  $M_x$  与  $M_z$  表示:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_z y}{E_p I_{pz}} - \frac{\mu_p M_\theta y}{E_p I_{p\theta}} \\ \frac{M_\theta y}{E_p I_{p\theta}} - \frac{\mu_p M_z y}{E_p I_{pz}} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中: $E_p$  为受控结构的弹性模量; $I_{p\theta}$ 、 $I_{pz}$  分别为弧板结构横截面绕 MFC 横向与纵向中性层的惯性矩。将式 (9) 代入式 (8) 可以求得

$$\left. \begin{aligned} M_{z_0} &= \frac{AE_p E_x I_{pz} ((d_{31} + \mu_p d_{33})C + d_{31} Q_{11} + d_{33} Q_{13})}{E_p^2 I_{px} I_{pz} + BC(1 - \mu_p^2) + B(Q_{11} + Q_{33} - \mu_p Q_{31} - \mu_p Q_{13})} \\ M_{\theta_0} &= \frac{AE_p E_x I_{px} ((d_{33} + \mu_p d_{31})C + d_{33} Q_{33} + d_{31} Q_{31})}{E_p^2 I_{px} I_{pz} + BC(1 - \mu_p^2) + B(Q_{11} + Q_{33} - \mu_p Q_{31} - \mu_p Q_{13})} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(L+h)^2 - L^2}{2}; B = \frac{(L+h)^3 - L^3}{3}; \\ C &= B(Q_{11}^E Q_{33}^E - Q_{13}^E Q_{31}^E); \\ Q_{11} &= E_p I_{px} Q_{11}^E, Q_{13} = E_p I_{px} Q_{13}^E; \\ Q_{31} &= E_p I_{pz} Q_{31}^E, Q_{33} = E_p I_{pz} Q_{33}^E. \end{aligned}$$

因此, MFC 对二维板结构的单位长度作动力为

$$\left. \begin{aligned} F_{z_0} &= - \int_L^{L+h} \sigma_z dy = \\ & \int_L^{L+h} [Q_{11}^E (d_{31} E_x - \epsilon_z) + Q_{13}^E (d_{33} E_x - \epsilon_\theta)] dy \\ F_{\theta_0} &= - \int_L^{L+h} \sigma_\theta dy = \\ & \int_L^{L+h} [Q_{31}^E (d_{31} E_x - \epsilon_z) + Q_{33}^E (d_{33} E_x - \epsilon_\theta)] dy \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

化简式 (11) 可得

$$\left. \begin{aligned} F_{z_0} &= (d_{31} Q_{11}^E + d_{33} Q_{13}^E) h E_x + \frac{AM_{z_0} (\mu_p Q_{13}^E - Q_{11}^E)}{E_p I_{pz}} + \frac{AM_{\theta_0} (\mu_p Q_{11}^E - Q_{13}^E)}{E_p I_{p\theta}} \\ F_{\theta_0} &= (d_{31} Q_{31}^E + d_{33} Q_{33}^E) h E_x + \frac{AM_{z_0} (\mu_p Q_{33}^E - Q_{31}^E)}{E_p I_{pz}} + \frac{AM_{\theta_0} (\mu_p Q_{31}^E - Q_{33}^E)}{E_p I_{p\theta}} \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

MFC 对二维弧板结构的环向单位面积的径向作动力为

$$\begin{aligned} \int_0^\gamma F_{r_0} R \cos\left(\frac{\gamma - 2\theta}{2}\right) d\theta &= 2F_{\theta_0} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), \\ F_{r_0} &= \frac{F_{\theta_0}}{R}, \end{aligned}$$

其中: $R$  为弧板半径; $\gamma$  为 MFC 的所占的弧度。

## 2 MFC 复合弧板结构作动方程的试验验证

为了验证推导的 MFC 复合弧板结构作动方程的正确性,将 P1/d<sub>33</sub> 型 MFC 粘贴于弧板结构上,完成了仿真模拟和振动控制试验。

首先,利用 ANSYS 有限元软件进行弧板结构建模,弧板模型的建模参数如表 1 所示。然后,定义激振力与 MFC 的作动力与作动弯矩,将激振力的激振位置设置在弧板中心,MFC 的作用位置如图 3 的黑线位置所示。MFC 与弧板结构复合所产生的作动力与作动弯矩为文中第二部分推导求得,将计算得到的  $F_{\theta_0}$ 、 $F_{z_0}$  与  $M_{x_0}$ 、 $M_{z_0}$  施加在图 3 中黑线所在位置的节点处,将计算得到的径向作动力  $F_{r_0}$  施加在黑线包围位置的各个节点处。在仿真模拟中,激振力与 MFC 的作动力均为简谐力,且激振力与 MFC 作动力与作动弯矩所产生的位移相位相反,这样 MFC 的作动力与作动弯矩可以起到减小振动的作用。仿真模拟中激振力共 3 种工况,分别为 20 Hz、10 N,50 Hz、10 N 与 100 Hz、10 N,MFC 的工作电压为 300 V。

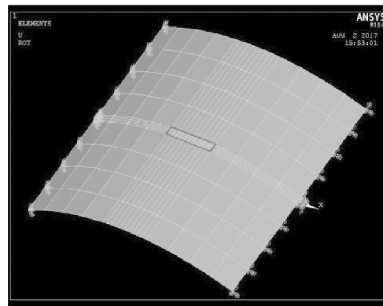


图 3 MFC 复合弧板结构的 ANSYS 模型

Fig. 3 ANSYS model of composite arc plate structure

表 1 材料属性

Table 1 Material properties

材料	$E/\text{GPa}$	密度/ $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	泊松比	跨度/mm	宽度/mm	厚度/mm	高度/mm
弧板(铝)	70.5	2 700	0.30	350	400	2	55

在 MFC 复合弧板振动控制试验中,弧板与 MFC 的参数与仿真一致。试验中主要仪器有加速度传感器、MFC、激振器、功率放大器和 dSPACE 实时仿真系统等,试验系统如图 4 所示。其中,加速度传感器自重相对较轻,对试验结果与模拟结果差异的影响可忽略不计。试验通过 dSPACE 输出频率为 20、50、100 Hz 的 3 种正弦信号为激振器与 MFC 提供激励信号,且激振器与 MFC 的信号相位相反,通过加速度传感器获得加速度信号,试验模型如图 5 所示。



图 4 MFC 复合弧板试验系统

Fig.4 Test system of MFC composite arc plate

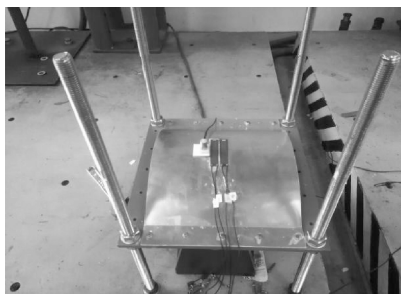


图 5 MFC 复合弧板试验模型

Fig.5 Test model of MFC composite arc plate

图 6~图 8 比较了不同工况下仿真模拟和实际试验的加速度时程。从图中可以明确看到,在 3 种工况下,仿真结果与试验结果的偏差均在 8.5%以内,因此,文中推导的 MFC 复合弧板结构的作动方程可以正确描述 MFC 的力电关系。当激振力为 20 Hz、10 N 与工作电压为 300 V 时,试验中单片 MFC 可以使加速度幅值减小 9.54%;当激振力为 50 Hz、10 N 与工作电压为 300 V 时,单片 MFC 可以使加速度幅值减小 12.68%;当激振力为 100 Hz、10 N 与工作电压为 300 V 时,单片 MFC 可以使加速度幅值减小 15.44%。由此可知,MFC 可以有效地减小弧板结构振动,对于高频振动尤为明显。

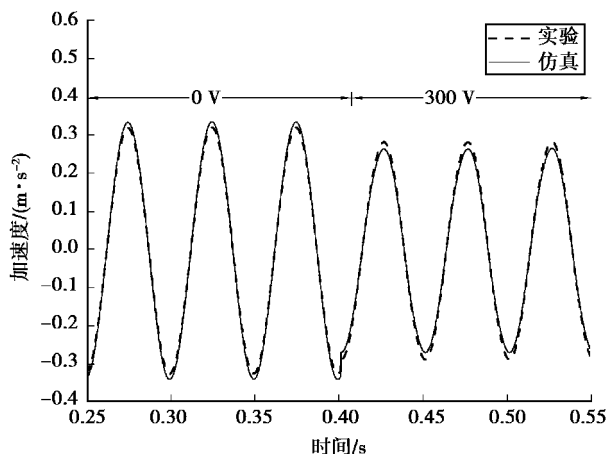


图 6 20 Hz 弧板试验与仿真结果对比

Fig.6 Comparison of arc plate test and simulation results with 20 Hz

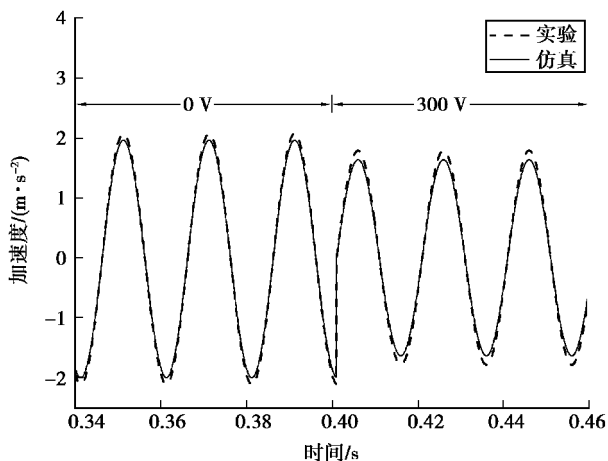


图 7 50 Hz 弧板试验与仿真结果对比

Fig.7 Comparison of arc plate test and simulation results with 50 Hz

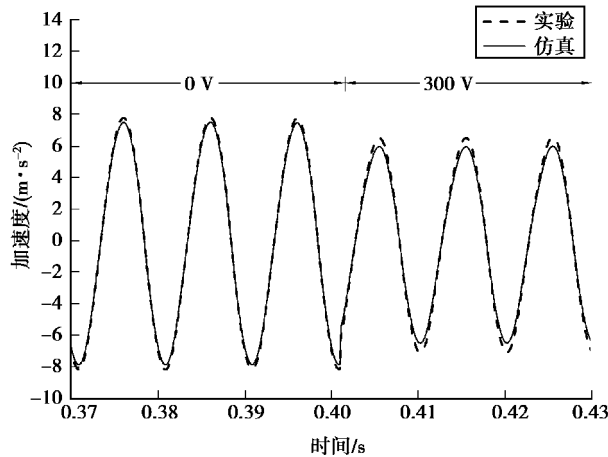


图 8 100 Hz 弧板试验与仿真结果对比

Fig.8 Comparison of arc plate test and simulation results with 100 Hz

### 3 结 论

文中推导了 MFC 复合弧板结构的作动方程,并通过仿真与试验加以验证。

1)推导的二维 MFC 复合弧板结构作动方程考虑了 MFC 与弧板结构的复合作用以及 MFC 在弧板结构曲率影响下产生的径向作动力,使得 MFC 对弧板作用的力电关系更加精实用。

2)完成了 MFC 对弧板结构振动的主动控制仿真与试验。通过仿真模拟与试验验证,得到了在 20 Hz、10 N 与 50 Hz、10 N 激励下仿真与试验的控制前后对比结果。在 20 Hz、10 N,50 Hz、10 N 与 100 Hz、10 N 的工况下,仿真与试验的偏差在 8.5% 以内。研究结果进一步证明了文中给出的 MFC 作动方程是正确的,适用于弧板结构,还表明了 MFC 对弧板结构的振动控制具有良好的效果。

### 参考文献:

- [ 1 ] Williams B R , Park G , Inman D J , et al . An overview of composite actuators with piezoceramic fibers[C]. LosAngles : CA.Proceedings of 20th International Modal Analysis Conference, February 4-7, 2002.
- [ 2 ] Zhang S Q , Rüdiger S . Modeling and simulation of macro-fiber composite layered smart structures[J]. Compos Struct , 2015,126 :89-100.
- [ 3 ] Ma G L , Minglong X , Zengyong A , et al . Active vibration control of an axially moving cantilever structure using MFC[J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2016,52 :967-974.
- [ 4 ] Dano M L , Jullière B . Active control of thermally induced distortion in composite structures using Macro Fiber Composite actuators[J]. Smart Mater Struct, 2007,16 :2315-2322.
- [ 5 ] Kwak M K , Heo S , Jeong M . Dynamic modelling and active vibration controller design for a cylindrical shell equipped with piezoelectric sensors and actuators[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009,321(3/5) : 510-524.
- [ 6 ] Akash P , Arockiarajan A . Actuation performance of macro-fiber composite (MFC): Modeling and experimental studies[J]. Sensors and Actuators, 2016,248 :114-129.
- [ 7 ] Gangolu V K , Samikkannu R , Karavadappa B P . Vall, Finite Element Analysis and Vibration Control of a Deep Composite Cylindrical Shell Using MFC Actuators[J]. Smart Materials Research, 2012(12) :12-24.
- [ 8 ] Sreenivasa S , Prasath A A . Effective electromechanical response of macro-fiber composite (MFC): analytical and numerical models[C]. [S.l.]:Int. J. Mech.Sci. 77 ,2013,98-106.