

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2019.12.009

不可压缩弹性薄膜球形压痕问题的一种渐近解析解

焦志安, 吴 剑, 万 玲

(重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044)

摘要:针对刚性基底上不可压缩弹性薄膜的轴对称球形压痕问题,采用了一种基于 Kerr 模型的简单解析求解方法。在该方法中,薄膜上表面的接触压强与位移为线性微分关系。之后利用贝蒂互等定理,求解了该问题的高阶渐近解,推导了接触力、压痕深度和接触半径之间的显式关系。当忽略高阶项时,得出的高阶渐近解与现有研究中的低阶解相同。此外还建立了有限元模型来验证渐近解的精度。结果显示,与已有的低阶渐近解相比,高阶渐近解与现有的数值计算结果和有限元分析结果吻合得更好。

关键词:球形压痕;不可压缩;Kerr 模型;贝蒂互等定理;弹性薄膜;接触

中图分类号:O343.3

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2019)12-074-07

An asymptotic analytical solution to the spherical indentation problem of incompressible elastic thin film

JIAO Zhian, WU Jian, WAN Ling

(College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: In order to solve the problem of axisymmetric indentation of an incompressible elastic film on a rigid substrate, a simple analytical method based on Kerr-model is derived, in which the differential relation between the contact pressure and the displacement of the film's upper surface is established. Then, the high-order asymptotic solution to the problem is solved by using Betti's reciprocal theorem and the explicit relation between contact pressure, indentation depth and contact radius is built. When the high-order term is ignored, the present asymptotic solution is the same as the existing low-order solution. In addition, a finite element model is established to verify the accuracy of the asymptotic solution. The result shows that, compared with the existing low-order asymptotic solutions, the higher-order asymptotic solution agrees better with the existing numerical results and the newly developed numerical simulation results.

Keywords: spherical indentation; incompressible; Kerr-model; Betti's reciprocal theorem; elastic film; contact

收稿日期:2019-07-11

基金项目:国家自然科学基金项目(11802043);重庆市留学人员创新资助项目(51204067);重庆市基础科学与前沿技术研究专项项目(cstc2016jcyjA0058)。

Supported by National Natural Science Foundation of China(11802043), the Innovative Support Program for Returned Overseas Students in Chongqing City(51204067) and Chongqing Research Program of Basic Research and Frontier Technology(cstc2016jcyjA0058).

作者简介:焦志安(1995—),男,重庆大学硕士研究生,主要从事固体力学研究,(E-mail)20163102004@cqu.edu.cn。

通讯作者:万玲(1963—),重庆大学教授,博士生导师,(E-mail)lhwan@cqu.edu.cn。

在现代生活生产中,不可压缩材料诸如凝胶^[1]、橡胶^[2-3]、生物组织^[4]等,扮演着越来越重要的角色。虽然在大变形条件下上述材料的本构关系复杂,但是在小变形条件下,仍可将其视为线弹性材料^[5]。合理利用不可压缩材料的前提是了解其力学性能,如杨氏弹性模量,硬度等,而且在超弹性模型^[6]、黏弹性模型^[7]中,杨氏弹性模量等也是至关重要的材料弹性常数。目前测量材料杨氏弹性模量的方法主要可归结为 2 种,即静态法(拉伸法、压痕法等)与动态法(共振法、超声法等)。由于压痕法^[8]的测量结果较为精确且测量过程简单,研究者通常通过开展压痕分析来得到不可压缩材料的力学性能;如 Zisis 等^[9]利用改进的压痕法得到不可压缩超弹性材料的材料性能,Feng 等^[10]利用压痕法结合有限元分析估计了不可压缩蛋白质组织的材料参数。

在进行材料的压痕分析时,接触半径与薄膜厚度之比直接影响着计算结果,例如接触力与压痕深度,接触半径之间的关系。当薄膜较厚时,研究者往往应用赫兹接触模型进行压痕分析,如 Dimitriadis 等^[11]利用校正了的赫兹模型计算了材料的杨氏弹性模量。但是当薄膜厚度小于接触半径时,赫兹模型便不再适用。于是 Greenwood 等^[12]采用积分和级数展开相结合的方法研究分析了刚性圆柱与弹性薄膜的压痕问题;Delavoipière 等^[13]研究了水凝胶在其压痕试验中的压痕深度与弹性薄膜厚度、压痕半径的关系;Yang^[14]和 Chadwick^[15]给出了不可压缩弹性薄膜压痕问题的低阶渐近解。相对传统的线弹性求解手段而言,引入 Kerr 模型中的微分关系可以简化计算,如 Ru^[16]曾利用 Kerr 模型^[17-19]解析分析了薄膜的褶皱问题。在本文中,将利用 Kerr 模型对不可压缩薄膜的球形压痕问题进行解析分析,推导问题的高阶渐近解,建立接触力、压痕深度以及接触半径之间的显式联系。

1 薄膜上表面接触压强 $p(r)$ 与位移 $w(r)$

有一厚度为 h 的各向同性线弹性薄膜,底面粘结在刚性基底上,将半径为 R 的球形刚性压头压入弹性薄膜中,压痕深度为 δ ,接触半径为 a (如图 1 所示),该种压痕问题相对于 z 轴是轴对称的。

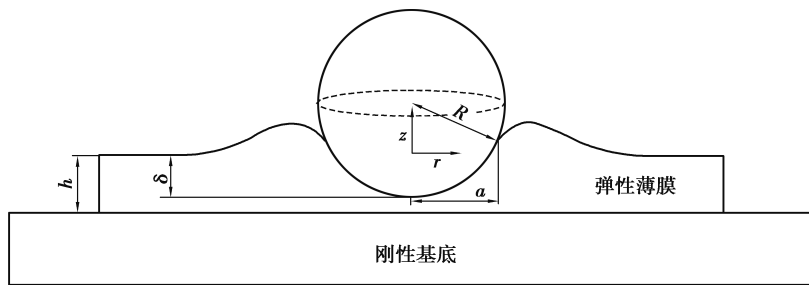


图 1 不可压缩弹性薄膜的球形压痕问题

Fig. 1 Spherical indentation of an incompressible elastic thin film

假定压头与弹性薄膜之间无摩擦力作用,且 $R \gg a \gg h$ 。在接触区边界处,由于材料凸起^[19],薄膜的上表面位移有可能与压力方向相反。Kerr 给出了薄膜上表面接触压强 $p(r)$ 与位移 $w(r)$ 之间的微分关系^[16]。

$$w - A_1 h^2 D^2 w + A_2 h^4 D^4 w = B_1 \frac{h}{E} p - B_2 \frac{h^3}{E} D^2 p, \quad (1)$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, D^4 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$A_1 = \frac{1}{1-\nu} = 2, A_2 = \frac{3-4\nu}{12(1-\nu)^2} = \frac{1}{3}, B_1 = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} = 0, B_2 = \frac{(3-4\nu)(1+\nu)}{3(1-\nu)} = 1, \quad (2)$$

式中: r 是点到接触中心的距离; E 是薄膜的杨氏弹性模量; ν 为不可压缩薄膜的泊松比,大小为 0.5。

在接触区内($r \leq a$), $w(r)$ 可通过图 1 中的几何关系得出,是接触半径 a 和压痕深度 δ 的函数。结合表面压强 $p(r)$ 在接触区边界 $r = a$ 处的连续性条件, $p(r)$ 可根据等式(1)求出。另一方面,在接触区外($r \geq a$),薄膜上表面压强 $p(r)$ 处处为零,根据 $w(r)$ 在 $r = a$ 处的连续性条件, $w(r)$ 可根据等式(1)求出。之后利

用 Betti 互等定理得到 a 和 δ 之间的关系。最后根据力的平衡得出接触力 F 与接触半径 a 、压痕深度 δ 之间的关系。

1.1 接触区内的压强 $p(r)$

在接触区内 ($h \ll a \ll R$), 薄膜上表面位移 $w(r)$ 可表示为

$$w = \delta + \sqrt{R^2 - r^2} - R \approx \delta - \frac{r^2}{2R}, r \leq a. \quad (3)$$

对于不可压缩薄膜 ($\nu = 0.5$), 从式(2)中可以看到 $B_1 = 0$ 。因此将式(3)代入式(1)中得到

$$-B_2 \frac{h^3}{E} D^2 p = \delta + 2A_1 \frac{h^2}{R} - \frac{r^2}{2R}. \quad (4)$$

因为在 $r=0$ 处, 压强应为有限值, 故解得

$$p = c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4. \quad (5)$$

其中,

$$c_2 = -\frac{1}{4h^3} \frac{E}{B_2} \left(\delta + 2A_1 \frac{h^2}{R} \right), c_3 = \frac{1}{32h^3 R} \frac{E}{B_2} \left(1 - 4A_1 \frac{h^2}{R^2} \right). \quad (6)$$

因为在 $r=a$ 处, 压强 $p(r)=0$, 代入式(5)得

$$c_1 = -c_2 a^2 - c_3 a^4. \quad (7)$$

1.2 接触区外的位移 $w(r)$

接触区外, 薄膜上表面接触压强 $p(r)$ 为 0, 等式(1)即为

$$w - A_1 h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) w + A_2 h^4 \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \right) w = 0; \quad (8)$$

$$w = 0, r \rightarrow \infty.$$

因此

$$w = d_1 K_0 \left(\frac{r}{h \sqrt{\lambda_1}} \right) + d_2 K_0 \left(\frac{r}{h \sqrt{\lambda_2}} \right), r \geq a; \quad (9)$$

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4A_2}{A_1^2}} \right) = 1.82, \lambda_2 = \frac{A_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4A_2}{A_1^2}} \right) = 0.18,$$

式中: K_0 为第二类零阶的修正贝塞尔函数; d_1 和 d_2 是 2 个实常数, 可由 $w(r)$ 及其斜率在 $r=a$ 处的连续性条件求出。

$$w(r=a) = d_1 K_0 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_1}} \right) + d_2 K_0 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_2}} \right) \approx \delta - \frac{a^2}{2R}, \quad (10)$$

$$-w'(r=a) = \frac{d_1}{h \sqrt{\lambda_1}} K_1 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_1}} \right) + \frac{d_2}{h \sqrt{\lambda_2}} K_1 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_2}} \right) \approx \frac{a}{R}.$$

K_1 为第二类一阶的修正贝塞尔函数。当 $h \ll a$,

$$\frac{K_0 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_1}} \right)}{K_1 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_1}} \right)} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{h \sqrt{\lambda_1}}{a}. \quad (11)$$

从式(10)(11), 得出

$$d_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1} \left(\delta - \frac{a^2}{2R} \right) - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \frac{ah}{R} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2} \frac{h}{a} \right)}{K_1 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_1}} \right) \left[\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} + \frac{1}{2} \frac{h}{a} (\lambda_2 - \lambda_1) \right]}, d_2 = \frac{\sqrt{\lambda_2} \left(\delta - \frac{a^2}{2R} \right) - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \frac{ah}{R} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2} \frac{h}{a} \right)}{K_1 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_2}} \right) \left[\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1} + \frac{1}{2} \frac{h}{a} (\lambda_1 - \lambda_2) \right]}. \quad (12)$$

2 计算结果

2.1 接触半径 a 与压痕深度 δ 的关系

假设在薄膜上施加均匀的压力 P_0 , 由式(1)可得薄膜上表面位移 $w(r)$ 为 0, 因此, 根据贝蒂互等定理可得

$$2\pi p_0 \int_0^{\infty} wr dr = 2\pi w_0 \int_0^a pr dr = 0. \quad (13)$$

由式(13)看到线弹性不可压缩薄膜在当前球形压痕问题中, 体积变化量为零。将式(3)和式(9)代入到式(13)中得

$$d_1 \sqrt{\lambda_1} K_1 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_1}} \right) ah + d_2 \sqrt{\lambda_2} K_1 \left(\frac{a}{h \sqrt{\lambda_2}} \right) ah + \frac{\delta a^2}{2} - \frac{a^4}{8R} = 0. \quad (14)$$

将等式(11)代入式(14)中得

$$\frac{(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}) \left(\delta - \frac{a^2}{2R} \right) ha - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \frac{a^2 h^2}{R}}{1 - (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}) \frac{h}{a}} + \frac{\delta a^2}{2} - \frac{a^4}{8R} = 0. \quad (15)$$

当 $h \ll a$ 时, 可得

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}) \left(\frac{R\delta}{a^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{h}{a} + (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})^2 \left(\frac{R\delta}{a^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{h^2}{a^2} - \\ & \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \frac{h^2}{a^2} + \frac{R\delta}{2a^2} - \frac{1}{8} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

根据式(16)可得接触半径 a 与压痕深度 δ 之间的三阶渐近关系

$$\begin{aligned} \frac{\delta R}{a^2} &= \frac{1}{4} + \alpha \left(\frac{h}{a} \right) + \beta \left(\frac{h}{a} \right)^2 + O \left(\frac{h}{a} \right)^3; \\ \alpha &= \frac{1}{2} (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}) = 0.89, \beta = \frac{1}{4} (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})^2 + 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - 2\alpha (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}) = -1.21. \end{aligned} \quad (17)$$

据笔者所知, 目前关于不可压缩弹性薄膜的高阶关系研究的还很少, 在本文的结论中, 若忽略 α, β 项, 则“ $a-\delta$ ”关系(式(17))可退化为已有的渐近结果^[15]。

此外, 为了验证所得的高阶渐近解的精度, 建立了轴对称有限元模型。在有限元模型中, 压头为刚性材料, 半径为 8 mm, 不可压缩弹性薄膜厚度为 5 μm , 半径为 2 mm。对压头施加垂直向下的位移, 在薄膜的下表面, 所有方向上的位移设置为零。模型中应用了 160 000 个 0.25 $\mu\text{m} \times 0.25 \mu\text{m}$ 的轴对称混合单元 (CAX4RH)。球形压痕轴对称有限元几何模型如图 2 所示。

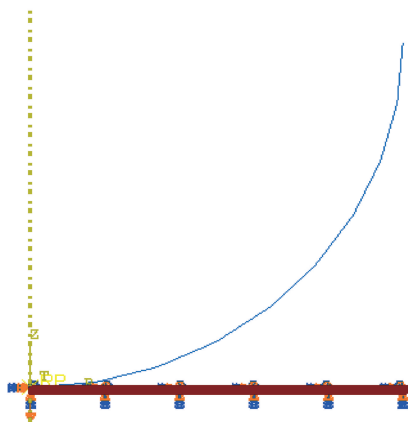


图 2 球形压痕问题轴对称有限元几何模型

Fig. 2 The axisymmetric finite element geometric model of spherical indentation test

图3反映了压痕深度 δ 与接触半径 a 的关系,与现有的低阶渐近解^[15]相比,本文的高阶解更加接近已有的数值解^[21]与新开展的有限元分析结果。当 a/h 大于3时,材料凸起现象出现。和新开展的有限元分析结果相比,本文的高阶渐近解相对误差在10%以内,精度比现有低阶渐近解高。

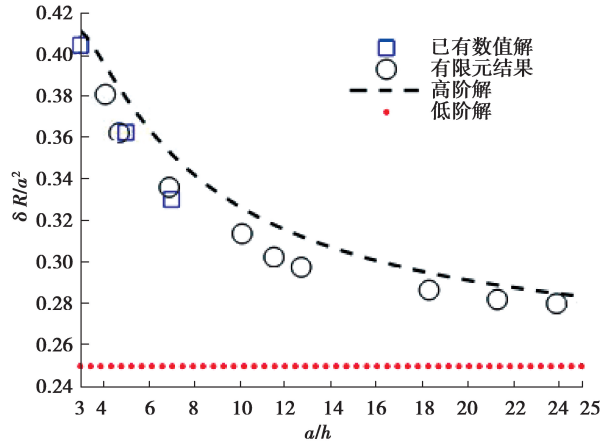


图3 压痕深度 δ 与接触半径 a 的关系

Fig. 3 The relation between indentation depth δ and contact radius a

2.2 接触力 F 与接触半径 a 的关系

最后,根据垂直方向上的力的平衡,可以求解接触力 F

$$2\pi \int_0^a pr dr = 2\pi \int_0^a (c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4) r dr = F. \quad (18)$$

由式(6)(7)(18)可得

$$-\frac{1}{2}c_2 a^4 - \frac{2}{3}c_3 a^6 = \frac{F}{\pi}. \quad (19)$$

由式(6)(7)(17)和(19)可得不可压缩弹性薄膜的“ $F-a$ ”关系

$$\left[1 + 12\alpha \frac{h}{a} + 12(2A_1 + \beta) \frac{h^2}{a^2} \right] \left(\frac{a}{h} \right)^6 \frac{h}{96R} = \frac{B_2 F}{\pi E h^2}. \quad (20)$$

“ $F-a$ ”关系(式(20))在忽略高阶项后可退化为现有的低阶渐近解^[15]。图4反映了接触力 F 与接触半径 a 的关系。当接触半径与压痕深度之比 a/h 较小时,本文的高阶解精度显著高于现有渐近解;随着比值的增加,两种解的精度均在提高,但本文的高阶精度始终高于现有渐近解,更加接近已有的数值解^[21]与有限元分析结果。

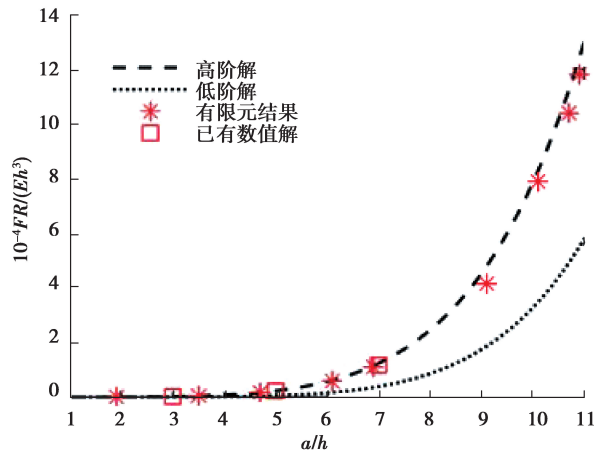


图4 接触力 F 与接触半径 a 的关系

Fig. 4 The relation between contact force F and contact radius a

2.3 接触力 F 与压痕深度 δ 的关系

由式(17)(20)得

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{h} \right)^3 \left(\frac{R}{h} \right)^2 + (4A_1 - 8a^2) \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \frac{R}{h} = \frac{B_2 F}{\pi E h^2} \quad (21)$$

笔者所提出的高阶“ $F-\delta$ ”关系(21)在忽略高阶项后与已有渐近解一致^[15]。将基于 Kerr 模型微分关系(1)得到的显式公式(21)与现有的低阶渐近解^[15]以及本文中所开展的有限元结果进行了比较。图 5 反映了接触力 F 与压痕深度 δ 的关系。通过对比发现,本文的高阶解比现有的低阶解更加贴近有限元分析结果,且随着压痕深度与膜厚之比 δ/h 的增大,本文的高阶解误差会越来越小。

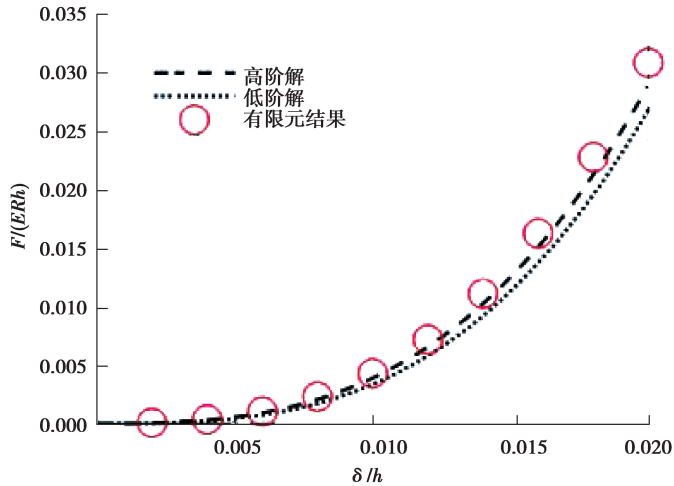


图 5 接触力 F 与压痕深度 δ 的关系

Fig. 5 Relationship between contact force F and indentation depth δ

3 结 论

利用 Kerr 模型推导了不可压缩弹性薄膜球形压痕问题的高阶渐近解析解。应用贝蒂互等定理,得到了接触力、压痕深度和接触半径之间的显式关系。本项工作的主要结论概述如下。

1)与已有的低阶渐近解相比,本文的高阶渐近解与已有的数值结果和新开展的有限元分析结果更为接近,精度更高。

2)当接触半径与膜厚之比较小时,本文的高阶解比现有低阶解明显更加接近数值解和有限元分析结果;随着接触半径与膜厚的比值的增大,两种解的精度均在提高。值得一提的是,本文的高阶解精度始终高于现有的低阶解,当接触半径与膜厚的比值大于 3 后,材料凸起现象出现,本文的高阶解精度可稳定在 10% 以内。

3)随着压痕深度与膜厚之比的增大,本文中得出的接触力与压痕深度的关系的精度随之而增大。

参考文献:

- [1] Ramaswamy R, Bourantas G, Jülicher F, et al. A hybrid particle-mesh method for incompressible active polar viscous gels[J]. Journal of Computational Physics, 2015, 291: 334-361.
- [2] Setiyana B, Jamari J, Khafidh M. Numerical investigation on the elastic modulus of rubber-like materials by a rigid ball indentation technique[C]//MATEC Web of Conferences. EDP Sciences; 2018, 204: 07002.
- [3] 胡景, 严波, 张宏雁, 等. 覆冰导线舞动数值仿真分析[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2010, 33(3): 76-81.
HU Jing, YAN Bo, ZHANG Hongyan, et al. Numerical simulation on galloping of iced conductors[J]. Journal of Chongqing University(Natural Science Edition), 2010, 33(3): 76-81.(in Chinese)
- [4] 颜功兴, 刘占芳, 酆光丰, 等. 离体培养成骨细胞的有限元分析[J]. 重庆大学学报, 2010, 33(11): 119-123.
YAN Gongxing, LIU Zhanfang, LI Guangfeng, et al. The finite element analysis on electromechanical behaviors in bone tissues[J]. Journal of Chongqing University, 2010, 33(11): 119-123.(in Chinese)

- [5] Lopera Perez J C, Kwok C Y, Senetakis K. Effect of rubber size on the behaviour of sand-rubber mixtures: a numerical investigation[J]. *Computers and Geotechnics*, 2016, 80: 199-214.
- [6] Laino G, de Santis R, Gloria A, et al. Calorimetric and thermomechanical properties of titanium-based orthodontic wires: DSC-DMA relationship to predict the elastic modulus[J]. *Journal of Biomaterials Applications*, 2012, 26(7): 829-844.
- [7] Hamma A, Kaci M, Mohd Ishak Z A, et al. Starch-grafted-polypropylene/kenaf fibres composites. Part 1: Mechanical performances and viscoelastic behaviour [J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2014, 56: 328-335.
- [8] 陈蓓, 丁培道, 程川. ZrO_2 层状复合陶瓷压痕开裂力学分析[J]. *重庆大学学报(自然科学版)*, 2004, 27(7): 65-67,71. CHEN Bei, DING Peidao, CHENG Chuan. Indentation cracking mechanical analysis of ZrO_2 laminated ceramics[J]. *Journal of Chongqing University(Natural Science Edition)*, 2004, 27(7): 65-67,71.(in Chinese)
- [9] Zisis T, Zafiropoulou V I, Giannakopoulos A E. Evaluation of material properties of incompressible hyperelastic materials based on instrumented indentation of an equal-biaxial prestretched substrate [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, 64/65: 132-144.
- [10] Feng Y, Lee C H, Sun L N, et al. Characterizing white matter tissue in large strain via asymmetric indentation and inverse finite element modeling[J]. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2017, 65: 490-501.
- [11] Dimitriadis E K, Horkay F, Maresca J, et al. Determination of elastic moduli of thin layers of soft material using the atomic force microscope[J]. *Biophysical Journal*, 2002, 82(5): 2798-2810.
- [12] Greenwood J A, Barber J R. Indentation of an elastic layer by a rigid cylinder[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49(21): 2962-2977.
- [13] Delavoipière J, Tran Y, Verneuil E, et al. Poroelastic indentation of mechanically confined hydrogel layers[J]. *Soft Matter*, 2016, 12(38): 8049-8058.
- [14] Yang F Q. Axisymmetric indentation of an incompressible elastic thin film[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2003, 36(1): 50-55.
- [15] Chadwick R S. Axisymmetric indentation of a thin incompressible elastic layer[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2002, 62(5): 1520-1530.
- [16] Ru C Q. Surface wrinkling of two mutually attracting elastic thin films due to van der Waals forces[J]. *Journal of Applied Physics*, 2001, 90(12): 6098-6104.
- [17] Li M, Ru C Q, Gao C F. An alternative method for indentation of an elastic thin beam by a rigid indenter[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, 149: 508-513.
- [18] Li M, Ru C Q, Gao C F. Axisymmetric indentation of an elastic thin plate by a rigid sphere revisited[J]. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 98(8): 1436-1446.
- [19] Li M, Gao C F, Ru C Q. Asymmetric indentation of an elastic beam by a rigid cylinder[J]. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik*, 2018, 69(4): 93.
- [20] Hasenhuettl E, Kasada R, Zhang Z X, et al. Evaluation of ion-irradiation hardening of tungsten single crystals by nanoindentation technique considering material pile-up effect[J]. *Materials Transactions*, 2017, 58(5): 749-756.
- [21] Jaffar M J. A numerical solution for axisymmetric contact problems involving rigid indenters on elastic layers[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1988, 36(4): 401-416.