

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2020.03.008

# 基于 Sobol 法的 RC 框架结构随机化 Pushover 分析及参数敏感性

张望喜<sup>1a,1b</sup>, 杨学峰<sup>1b</sup>, 张瑾熠<sup>2</sup>, 熊浩<sup>1b</sup>

(1.湖南大学 a.工程结构损伤诊断湖南省重点实验室;b.土木工程学院,长沙 410012;

2.湖南科技大学 土木工程学院,湖南湘潭 411201)

**摘要:**为研究 reinforced concrete 框架结构的随机参数敏感性,结合 Matlab 和 SAP2000 对 Sobol 法和随机化 Pushover 方法进行编程,然后对一榀平面框架结构进行分析,考虑了随机化 Pushover 方法中水平地震影响系数最大值、混凝土抗压强度和弹性模量、钢筋屈服强度和抗拉强度以及钢筋弹性模量对顶点位移的敏感性。结果表明,水平地震影响系数最大值对随机化 Pushover 方法顶点位移敏感性和重要程度最大,在分析中可以忽略其余 5 个参数的随机性。同时通过 2 个算例进一步验证了研究结果在多层和高层框架结构中的适用性。

**关键词:**随机化 Pushover 方法;Sobol 法;敏感性;框架结构;顶点位移

中图分类号:TU313

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2020)03-070-09

## Randomized pushover analysis and parameter sensitivity of reinforced concrete frame structure based on Sobol' method

ZHANG Wangxi<sup>1a,1b</sup>, YANG Xuefeng<sup>1b</sup>, ZHANG Jinyi<sup>2</sup>, XIONG Hao<sup>1b</sup>

(1a.Hunan Provincial Key Lab on Diagnosis for Engineering Structures;1b. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410012, P. R. China; 2.School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, Hunan, P. R. China)

**Abstract:** To investigate the random parameter sensitivity of reinforced concrete frame structure, Matlab and SAP2000 were used to program Sobol' method and randomized Pushover method. One plane frame structure was established to analyze the sensitivity of parameters to roof displacement. The parameters contained maximum value of horizontal earthquake influence coefficient, concrete compressive strength, elastic modulus of concrete, yield strength and tensile strength of steel bar and elastic modulus of steel bar. The results showed that the most sensitive and important parameter to roof displacement in randomized Pushover method was maximum value of horizontal earthquake influence coefficient and the randomness of remaining five parameters could be ignored in the analysis. In addition, two examples were used to verify the applicability of the findings in the multi-layer and high-rise frame structures.

**Keywords:** randomized Pushover method; Sobol' method; sensitivity; frame structures; roof displacement

收稿日期:2019-08-26

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51578228);国家重点研发计划专项资助项目(2016YFC0701400)。

Supported by National Natural Science Foundation of China (51578228), National Key Research and Development Program of China(2016YFC0701400).

作者简介:张望喜(1971—),男,教授,博士,主要从事砌及砌体结构空间分析与抗震设计,(E-mail) wxizhang2000@hnu.edu.cn.

Pushover 分析方法被广泛用于评估结构的抗震性能。随着研究的深入,随机化 Pushover 方法也得到了不断的发展。欧进萍等<sup>[1]</sup>利用结构评估体系的概率 Pushover 分析方法来处理抗力曲线和目标谱曲线随机化关系;李浩等<sup>[2]</sup>在 Pushover 分析中将能力曲线随机化而使用凸集模型考虑地震作用的随机性;宋鹏彦<sup>[3]</sup>基于随机化 Pushover 方法分析了结构的整体变形能力概率特性,并以此求解得到了结构整体抗震可靠指标;贡金鑫等<sup>[4]</sup>通过编制随机化 Pushover 方法程序对框架结构的抗震可靠度进行了分析。

随机化 Pushover 方法在随机化方式以及分析程序方面都进行了深入研究,但是涉及到其中分析参数敏感性的研究则不多。张望喜等<sup>[5]</sup>采用了有限差分法和 Tornado 图形法分析了框架结构实际需求谱 Pushover 方法顶点位移的敏感性。其中分析需求谱的敏感性时采用实际地震记录获得需求谱,而文献[3-4]中需求谱是以水平地震系数最大值等参数随机化的方式来实现的。

敏感性分析中的全局分析法不受模型限制,对非线性、非叠加、非单调问题能够进行分析,各因素变化范围可以不同并且同时变化,能够较为全面地反映模型对各因素的敏感性。Sobol 法是一种基于方差的全局性敏感性分析方法,自 1993 年 Sobol<sup>[6]</sup>提出以来被广泛研究。Saltelli<sup>[7-8]</sup>随后提出改进计算方法,对比几种敏感性指标计算公式,使得计算次数大幅减少,改善了计算精度;Dimov<sup>[9]</sup>提出了自适应蒙特卡洛算法提高了总体敏感性指标的计算效率。

文中采用 Sobol 法从全局性的角度来评估基于文献[3-4]的随机化 Pushover 方法中各参数的敏感性。基于 Sobol 法,联合了 Matlab 和 SAP2000 编制随机化 Pushover 方法的程序,以一榀框架为计算模型分析了随机化 Pushover 方法中水平地震影响系数最大值、混凝土抗压强度和弹性模量、钢筋屈服强度和抗拉强度以及钢筋弹性模量对顶点位移的敏感性,并且通过 2 个算例验证结论的适用性。

## 1 敏感性分析方法和程序

### 1.1 分析方法

参考文献[7]中改进的 Sobol 法,其主要思想是优化计算过程使得关键结果一阶敏感性指标和总体敏感性指标的计算次数大幅缩减为  $n(k+2)$  次,其中,  $n$  为抽样次数,  $k$  为考虑的参数数量。假定输出模型  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , 则模型的总方差为

$$V(y) = \sum_i V_i + \sum_i \sum_{j>i} V_{ij} + \dots + V_{12\dots k}, \quad (1)$$

式中:  $V(y)$  是输出的总方差;  $V_i$  是参数  $x_i$  时输出  $y$  的方差,即为  $V(E(Y|x_i))$ ;  $V_{ij}$  是参数  $x_i$  和  $x_j$  相互作用下时输出的方差。模型中参数的敏感性指标可表示为

$$S_i = \frac{V(E(y|x_i))}{V(y)} = \frac{U_i - E^2(y)}{V(y)}, \quad (2)$$

$$S_{Ti} = \frac{V(y) - V(E(y|x_{-i}))}{V(y)} = 1 - \frac{U_{-i} - E^2(y)}{V(y)}, \quad (3)$$

式中:  $S_i$  是参数  $x_i$  的一阶敏感性指标,表示  $x_i$  对输出的影响程度;  $S_{Ti}$  是参数  $x_i$  的总体敏感性指标,等于涉及参数  $x_i$  的各阶敏感性指标之和。例如,有 3 个因素的模型中因素 1 的总体敏感性指标  $S_{T1} = S_1 + S_{12} + S_{123}$ , 其中二阶敏感性指标  $S_{12}$  表示因素 1 和因素 2 的交叉影响。在实际研究中,一般通过  $S_i$  和  $S_{Ti}$  就可以评估参数对于模型输出的敏感性程度。

### 1.2 分析程序

文中敏感性分析是通过 Matlab 和 SAP2000 联合编制随机化 Pushover 方法程序,再结合 Sobol 法加以计算。图 1 表示基于 Sobol 法的敏感性指标计算总过程。使用蒙特卡洛抽样,依据考虑各参数的分布信息抽取 2 个  $n \times k$  阶样本矩阵  $M_1$  和  $M_2$ , 然后以  $M_1$  矩阵中第  $j$  列置换  $M_2$  矩阵中第  $j$  列,得到矩阵  $N_j$ ; 将矩阵  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $N_j$  中数据导入到随机化 Pushover 分析程序中计算得到相应的顶点位移矩阵,依次计算得到均值、方差等其他中间运算量,最后,由式(2)、式(3)计算得到各参数的一阶和总体敏感性指标,并据此评估相应参数的敏感性程度。

敏感性计算过程中的关键一环是随机化 Pushover 分析,其计算过程通过 Matlab 外部调用 SAP2000 来实现,流程如图 2 所示。先建立分析模型,然后通过句组建立 Matlab 与 SAP2000 之间的连接。Matlab 外部

循环调用 SAP2000 获得随机化的能力曲线,并将其与随机化的需求谱曲线相交,通过能力谱法中的 Procedure B 方式<sup>[10]</sup>获得性能点。

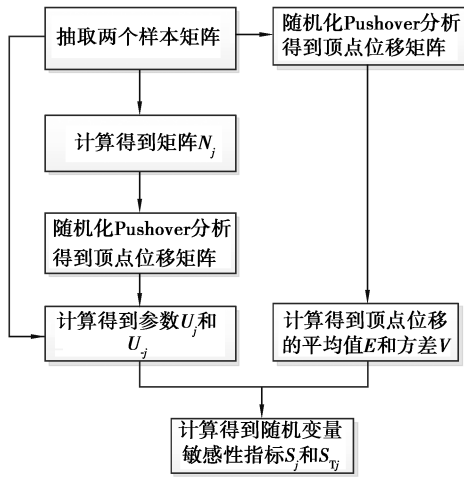


图 1 敏感性计算过程图

Fig. 1 Process for sensitivity calculation

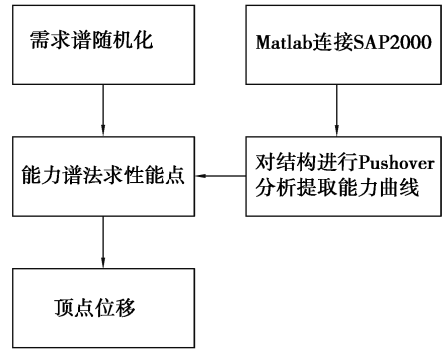


图 2 随机化 Pushover 分析过程

Fig. 2 Process for randomized Pushover analysis

## 2 框架结构参数敏感性

### 2.1 分析模型

模型采用 4 跨 6 层的平面钢筋混凝土框架结构,如图 3 所示。设计信息为:结构抗震设防烈度为 8 度 (0.2 g),场地类别为三类,设计地震分组为第二组,其余信息如表 1 所示。经 PKPM 计算得到该平面框架梁柱详细配筋信息如图 4 所示。

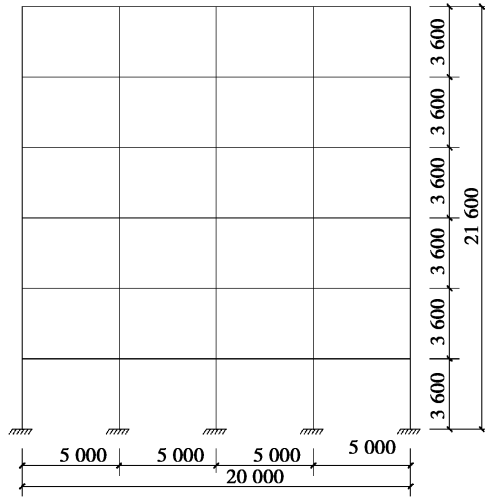


图 3 6 层平面框架模型

Fig. 3 Six-story plane frame model

表 1 结构基本信息

Table 1 Basic information of structure

柱截面/ (mm×mm)	梁截面/ (mm×mm)	楼板 厚度/(mm)	混凝土 等级	楼屋面 活荷载/ (kN·m <sup>-2</sup> )	梁柱 纵筋	梁柱 箍筋	板配筋
600×600	250×600	120	C30	2.0	HRB400	HPB300	HPB300

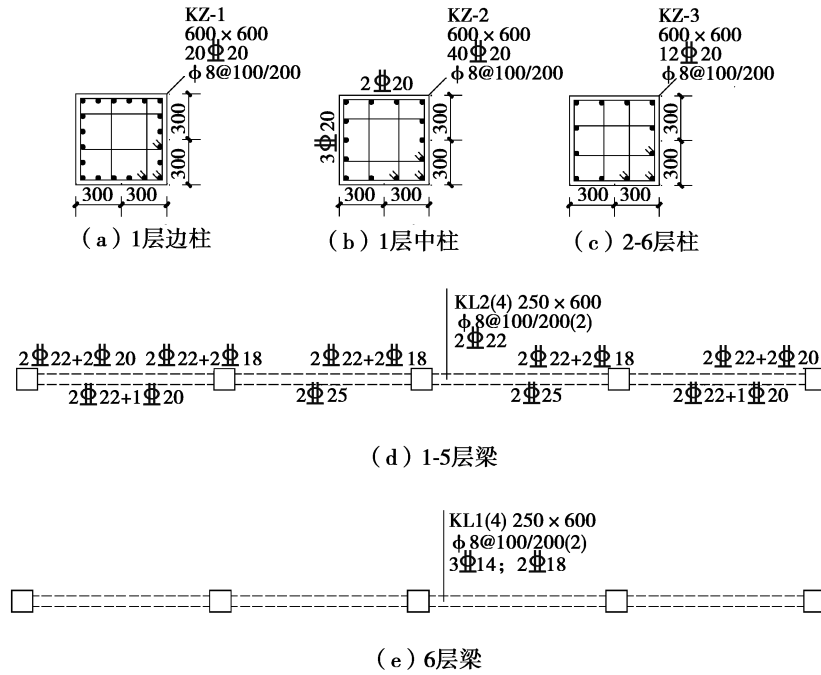


图 4 6 层框架中梁柱配筋图

Fig. 4 Reinforcement of beams and columns in six-story frame

2.2 随机变量参数

笔者分析了包括混凝土抗压强度  $f_c$ , 钢筋屈服强度  $f_y$ , 钢筋抗拉强度  $f_s$ , 混凝土弹性模量  $E_c$ , 钢筋弹性模量  $E_s$  和水平地震影响系数最大值  $\alpha_{max}$  共 6 个随机变量, 在 8 度下各参数统计情况如表 2 所示。

表 2 随机变量统计参数

Table 2 Statistical parameters of random variables

随机变量/ ( $N \cdot mm^{-2}$ )	均值	变异系数	分布类型
$f_c$	26.1	0.14	正态分布 <sup>[11,12]</sup>
$f_y$	432	0.045	正态分布 <sup>[11,12]</sup>
$f_s$	574	0.036	正态分布 <sup>[10,12]</sup>
$E_c$	30 000	0.08	正态分布 <sup>[5,13]</sup>
$E_s$	200 000	0.033 3	正态分布 <sup>[5,13]</sup>
$\alpha_{max}$	0.9	0.1	极值 I 型分布 <sup>[4]</sup>

2.3 分析结果

根据表 2 中 6 个随机变量分布类型, 分别对其进行 3 组抽样计算, 每组选取 2 个  $1\ 000 \times 6$  阶样本矩阵, 共计算 24 000 次。第一组抽样的  $M_1$ 、 $M_2$  样本矩阵值如图 5 所示。其中, 横坐标 1~6 依次代表混凝土抗压强度、钢筋屈服强度、钢筋抗拉强度、水平地震影响系数最大值、混凝土弹性模量, 钢筋弹性模量。

为方便对比各随机变量抽样值, 图 5 中以混凝土抗压强度样本值为标准, 其余各随机变量样本值大小均经处理, 如钢筋屈服强度和抗拉强度样本值缩小 10 倍, 水平地震影响系数最大值样本值扩大 20 倍, 混凝土弹性模量样本值缩小 1 000 倍以及钢筋弹性模量样本值缩小 10 000 倍。

完成抽样后, 将各随机变量的抽样值循环代入基于 SAP2000 模型编制随机化 Pushover 分析的 Matlab

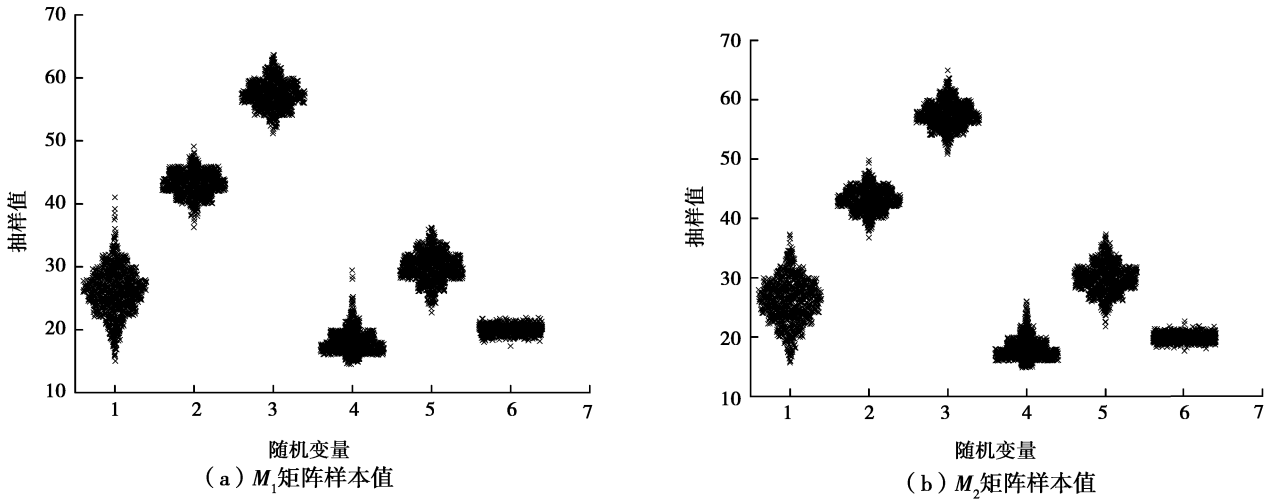


图 5 随机变量样本

Fig. 5 Samples of random variables

程序中,求解得到框架相应的顶点位移值。图 6 为第一组计算顶点位移结果,其中样本次序 1~8 分别代表抽样的  $M_1$  和  $M_2$  矩阵样本计算的顶点位移值以及依次经置换后的 6 个样本矩阵  $N_j$  计算的顶点位移值。

图 6 中,各顶点位移矩阵数值整体分布大致相同。从图中可以看出,在 0.09~0.10 区间内,数据分布较为密集,在 0.10~0.12 区间内,数据分布最为集中;在 0.12~0.15 区间内,数据分布逐渐稀疏;而在 0.15~0.24 区间内,数据分布最为稀疏。在文中条件下,结果显示随机化 Pushover 分析的顶点位移矩阵具有较好的稳定性,即顶点位移分布能保持一致。另外根据式 (2)和式(3)计算即可得到一阶敏感性指标  $S_i$  (如图 7 所示)和总体敏感性指标  $S_{Ti}$  (如图 8 所示)。

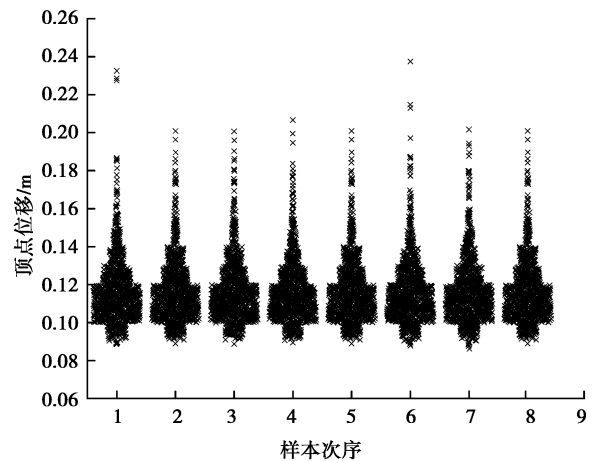


图 6 顶点位移值

Fig. 6 Roof displacements

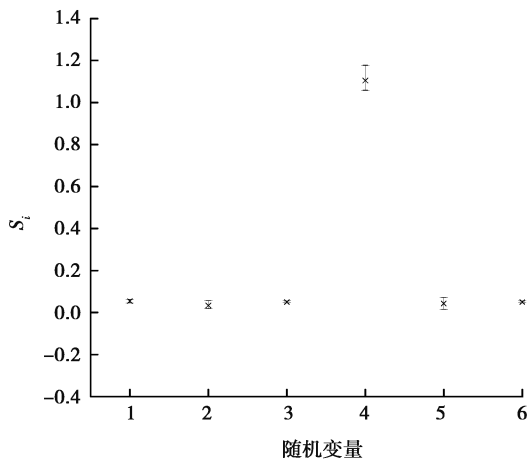


图 7 一阶敏感性指标

Fig. 7 First order sensitivity indices

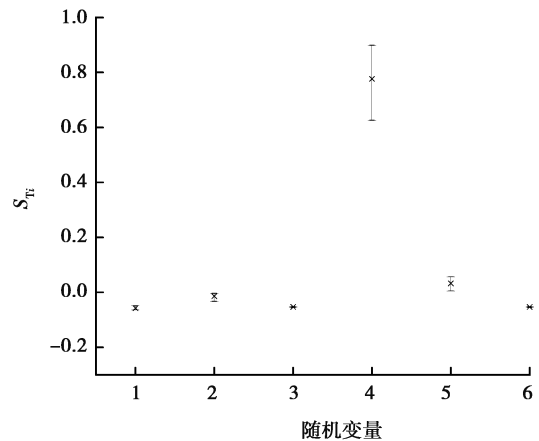


图 8 总体敏感性指标

Fig. 8 Total sensitivity indices

表 3 为第 1 组抽样计算所得敏感性指标。从表中可知,一阶敏感性指标中,水平地震系数最大值最大,且接近 1.0,而其他 5 个随机变量指标值很小,接近于 0;总体敏感性指标中,水平地震系数最大值最大,且接近 1.0,而其他 5 个随机变量指标值很小,近似于 0。根据文献[9]中定义,随机变量的输入对于模型输出的重要性程度可以划分为 4 个等级:当  $S_{T_i} > 0.8$  时,非常重要;当  $0.5 < S_{T_i} < 0.8$  时,重要;当  $0.3 < S_{T_i} < 0.5$  时,不重要;当  $S_{T_i} < 0.3$  时,不相关<sup>[9]</sup>。因此,图中数据表明水平地震影响系数最大值对于顶点位移的影响最大,而其他 5 个随机变量则影响很小,即不相关。

表 3 敏感性指标  
Table 3 Sensitivity indices

指标	$f_c$	$f_y$	$f_s$	$\alpha_{max}$	$E_c$	$E_s$
$S_i$	0.045 3	0.027 0	0.046 1	1.059 0	0.041 4	0.046 1
$S_{T_i}$	-0.049 4	-0.005 9	-0.052 0	0.804 4	0.036 5	-0.052 0

文中为防止随机抽样的偶然性,共进行了 3 组计算,并将其敏感性计算结果标记在图 7 与图 8 中。从 3 组计算结果图中可以发现,水平地震影响系数最大值的一阶敏感性指标接近于 1.0,总体敏感性接近于 0.8,而其他 5 个随机变量敏感性指标值都很小,均接近于 0。这说明,水平地震影响系数最大值对于顶点位移最重要,而其他 5 个参数则相对不敏感。

### 3 算例分析

通过对表 3 各参数敏感性指标比较,进一步验证结构随机化 Pushover 分析中,水平地震影响系数对于顶点位移的重要性,而其他参数不相关。

#### 3.1 算例一 多层框架结构

使用 2.1 小节中的模型,首先,分为 2 组抽样,第 1 组考虑 2.2 小节中包括水平地震影响系数最大值 1 内的 6 个随机变量参数,第 2 组仅考虑水平地震影响系数最大值一个随机变量参数,并将其余参数固定在其均值处。每组抽取 1 000 个样本,分别进行随机化 Pushover 分析,得到其顶点位移矩阵,如图 9(a)所示。从图中可以看出,2 组数据分布保持一致,大致成矩形形状三角形变化,端部略有差异。随着顶点位移值的增加,其分布密度逐渐减小。通过最大熵法<sup>[14]</sup>将图 9(a)中数据拟合成顶点位移概率密度曲线,如图 9(b)所示。然后,将仅考虑水平地震影响系数最大值的概率密度函数和考虑 6 个随机变量的概率密度函数相减,可得差值曲线,如图 9(c)所示。

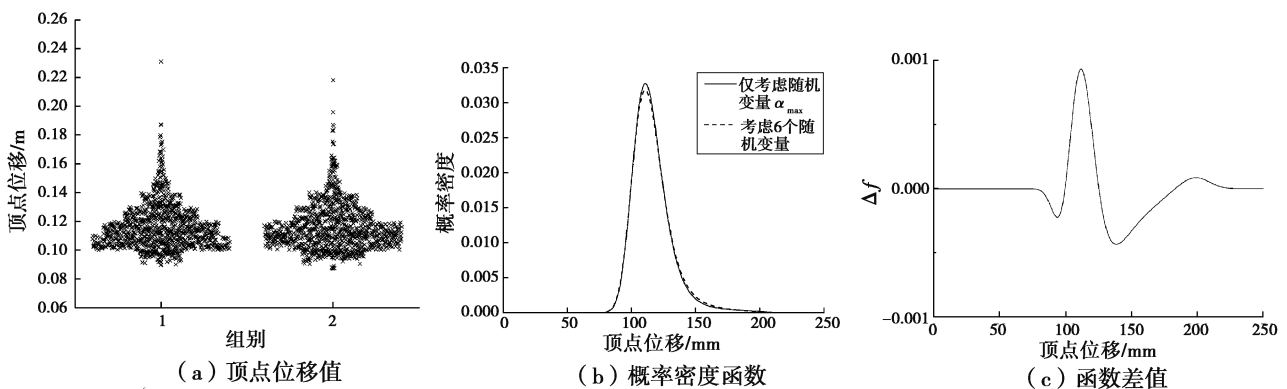


图 9 6 层框架分析结果

Fig. 9 Analysis results of six-story frame

图 9(b)、9(c)表明,2 条曲线整体和数值上接近,且两者间最大差值也仅为 0.001。由此可见,对于多层结构而言,随机化 Pushover 分析并统计拟合的 2 条概率密度曲线相差不大,证明了水平地震影响系数最大

值对顶点位移是最重要的,而其他参数的影响较小,可固定在其均值处。

### 3.2 算例二 高层框架结构

建立 1 个 4 跨 11 层的平面钢筋混凝土框架结构模型,如图 10 所示,其余参数和第二节中模型相同。配筋信息如图 11 所示。

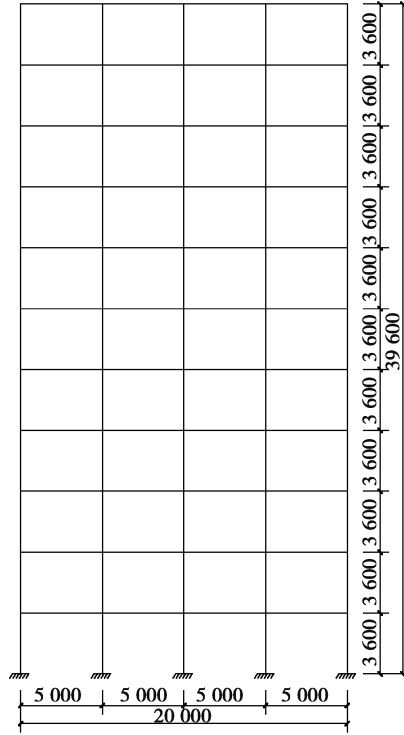


图 10 11 层平面框架模型

Fig. 10 11-story plane frame model

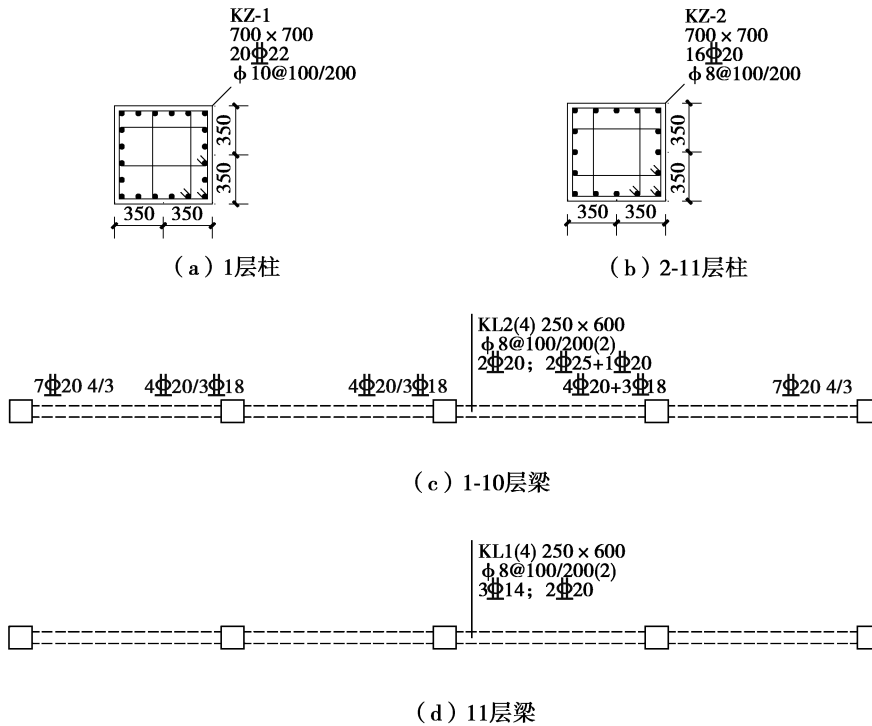


图 11 11 层框架中梁柱配筋图

Fig. 11 Reinforcement drawing of beams and columns

和算例一计算过程类似,分成2组,第1组考虑包括水平地震影响系数最大值在内的6个随机变量参数,第2组仅考虑水平地震影响系数最大值一个随机变量参数,并将其余参数固定在其均值处,每组抽取1000个样本,然后依据图2进行随机化 Pushover 分析计算顶点位移矩阵,如图12(a)所示。

由图12(a)中数据对比可知,2组顶点位移数据分布趋于一致,呈矩形形状逐渐减小,端部略有不同。将其通过最大熵法拟合成顶点位移概率密度函数示于图12(b),然后将其仅考虑水平地震影响系数最大值的概率密度函数减去考虑6个随机变量的概率密度函数,得其函数差值如图12(c)所示。从图12(b)、12(c)中可以知道,2条曲线整体分布非常接近,且在中间位置出现最大差值也仅为0.002。通过2组顶点位移数据和其差值可知,高层结构的随机化 Pushover 分析中,水平地震影响系数最大值仍是6个随机变量中的最为重要的因素,而其他5个随机变量影响较小,可固定在其均值处。即随机化 Pushover 分析中,可以仅考虑水平地震影响系数最大值,而将其他随机变量固定在其均值处。

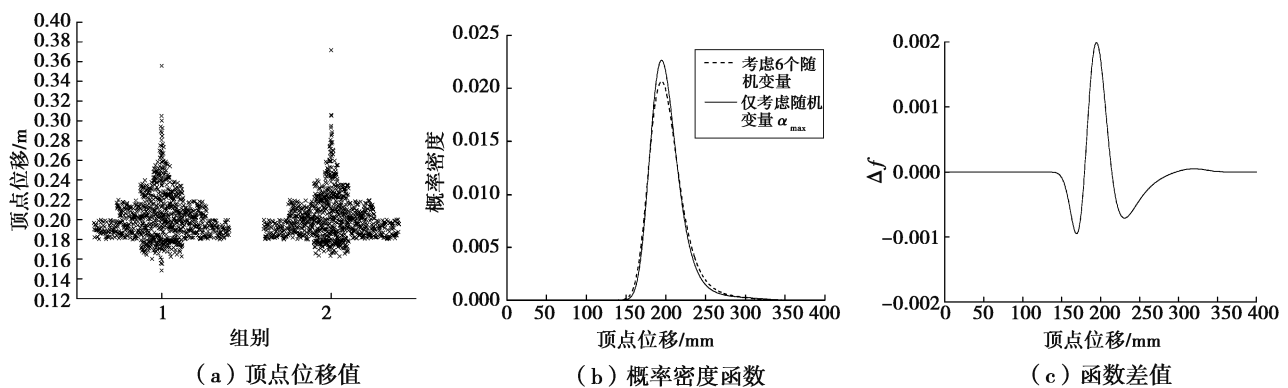


图12 11层框架分析结果

Fig. 12 Analysis results of 11-story frame

## 4 结果分析

1)多层和高层框架结构分析数据显示,两者随机化 Pushover 计算的顶点位移矩阵数据密度分布接近,均呈现矩形形状逐级递减型分布。不同的是,在考虑包括水平地震影响系数最大值在内的6个随机变量参数和仅考虑水平地震影响系数最大值一个随机变量参数的抽样中,多层函数差值仅为0.001,高层函数差值也仅为0.002,由此说明,水平地震影响系数最大值对结构顶点位移的影响最大,而其他参数可固定在均值处。当仅考虑水平地震影响系数最大值这一随机变量时,计算误差将会随着结构高度的上升而增加。

2)算例抽取2组各1000个样本,随机化分析得到了各样本值对应的顶点位移矩阵,从而确定该随机变量的概率密度曲线。相比于确定性分析结果的唯一性,该概率密度函数更能反映结果的随机性,同时从概率上讲,其顶点位移值均分布于确定性分析的均值周围。

3)目前对于RC框架结构的 Pushover 分析和参数灵敏度分析研究现状,大多采用一次二阶矩法、Tornado图形法等方法来求解随机变量的敏感性。而文中创新点是通过调用SAP2000的随机化 Pushover 分析结果,结合Sobol方法编制Matlab程序,为灵敏度分析提供了有效途径。

## 5 结论

1) Sobol法对结构随机化 Pushover 分析得出的敏感性结果与验证模型的结果一致,表明Sobol法对于随机化 Pushover 方法中参数敏感性分析是适用的,同时进一步验证了地震需求曲线敏感度远大于能力曲线敏感度的结论。

2)多层框架结构在8度抗震设防烈度下,综合考虑概率 Pushover 分析方法中随机变量对顶点位移的影响。在这些因素中,水平地震影响系数最大值对于随机化 Pushover 分析中顶点位移的敏感性最大,重要性最强,而其他因素对顶点位移相对不敏感。



3)水平地震影响系数对于多、高层框架结构影响最大,而其他因素影响较小。为简化计算过程,在研究概率 Pushover 分析时,可以将其他因素固定在均值处,仅取水平地震影响系数为随机变量也可获得较好精度。

#### 参考文献:

- [1] 欧进萍,侯钢领,吴斌. 概率 Pushover 分析方法及其在结构体系抗震可靠度评估中的应用[J]. 建筑结构学报, 2001, 22(6): 81-86.  
OU Jinping, HOU Gangling, WU Bin. Random pushover analysis method and its application in earthquake-resistant reliability evaluation of structural systems[J]. Journal of Building Structures, 2001, 22(6): 81-86.(in Chinese)
- [2] 李浩,王文,易伟建. 基于能力谱的概率-非概率结构体系抗震可靠度[J]. 地震工程与工程振动, 2012, 32(1): 43-48.  
LI Hao, WANG Wen, YI Weijian. Probabilistic & non-probabilistic hybrid seismic reliability of structure system based on capacity spectrum method[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2012, 32(1): 43-48.(in Chinese)
- [3] 宋彦鹏. 结构整体可靠度方法及 RC 框架非线性整体抗震可靠度分析[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2012.  
SONG Yanpeng. Structural global reliability methods and nonlinear global seismic reliability analysis of RC frames [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012. (in Chinese)
- [4] 贡金鑫,于忠翰,张勤. 基于 pushover 方法的结构抗震可靠度分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2013, 34(12): 1544-1550.  
GONG Jinxin, YU Zhonghan, ZHANG Qin. Pushover-based seismic reliability analysis of structures[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2013, 34(12): 1544-1550.(in Chinese)
- [5] 张望喜,张勇,易伟建,等. RC 框架结构 pushover 方法顶点位移的敏感性分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2014, 41(2): 14-18.  
ZHANG Wangxi, ZHANG Yong, YI Weijian, et al. Sensitivity analysis of the top displacement of the pushover analysis method of reinforced concrete frame structure[J]. Journal of Hunan University(Natural Science), 2014, 41(2): 14-18.(in Chinese)
- [6] Sobol I. On sensitivity estimation for nonlinear mathematical models[J]. Keldysh Applied Mathematics Institute, 1990: 112-118.
- [7] Saltelli A. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices[J]. Computer Physics Communications, 2002, 145(2): 280-297.
- [8] Saltelli A, Annoni P, Azzini I, et al. Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index[J]. Computer Physics Communications, 2010, 181(2): 259-270.
- [9] Dimov I, Georgieva R. Monte carlo algorithms for evaluating sobol' sensitivity indices[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2010, 81(3): 506-514.
- [10] ATC. Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings [R]. Redwood City: Applied Technology Council1997.
- [11] 中华人民共和国住房和城乡建设部.混凝土结构设计规范: GB50010-2010 [S]. 北京:中国建筑工业出版社,2010.  
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Code for design of concrete structures: GB50010-2010 [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010. (in Chinese)
- [12] 沈蒲生,梁兴文. 混凝土结构设计原理[M]. 北京:高等教育出版社,2002.  
SHEN Pusheng, LIANG Xingwen. The design theory for concrete structure [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese)
- [13] 贡金鑫,赵国藩. 工程结构可靠性设计原理[M]. 北京:机械出版社,2007.  
GONG Jinxin, ZHAO Guofan. Design principles of engineering structures reliability[M]. Beijing: China Machine Press, 2007. (in Chinese)
- [14] 张明. 结构可靠度分析-方法与程序[M]. 北京:科学出版社,2009.  
ZHANG Ming. Structural reliability analysis-method and procedure [M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese)